



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

1^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

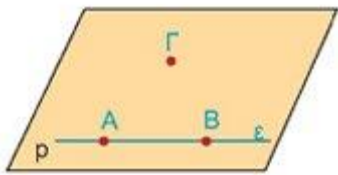
Το

16^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Ευθείες και Επίπεδα



Οι πρωταρχικές έννοιες του χώρου είναι **το σημείο, η ευθεία και το επίπεδο.**

Η επιφάνεια του μαυροπίνακα, ενός λείου πατώματος, ενός καθρέπτη μάς δίνουν την αίσθηση του επιπέδου.

Ωστόσο, το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα και για να το παραστήσουμε, σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο για να χωράει στην επιφάνεια του χαρτιού. Το ονομάζουμε, επίσης μ' ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου (ρ, q, r).

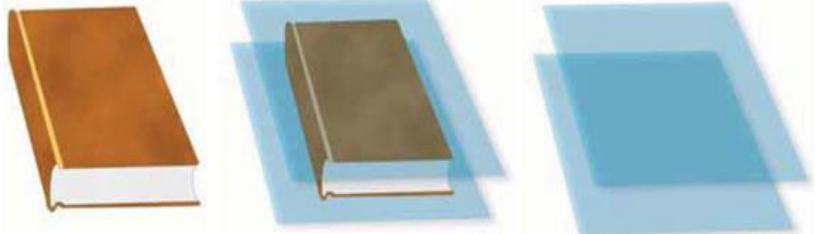
Μία ευθεία ϵ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δύο σημεία **A** και **B**. Αν θεωρήσουμε ένα τρίτο σημείο **Γ** που δεν ανήκει στην ευθεία ϵ , τότε τα τρία αυτά σημεία **A, B**, και **Γ** ορίζουν ένα επίπεδο **p**. Προφανώς, η ευθεία ϵ και το σημείο **Γ** ορίζουν το ίδιο επίπεδο.

Γ' αυτό ακριβώς το λόγο, οι φωτογράφοι για μεγαλύτερη σταθερότητα στηρίζουν τις φωτογραφικές μηχανές τους σε τρίποδο και έτσι εξηγείται η τρίτη ρόδα στα ποδήλατα των μικρών παιδιών.

Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων

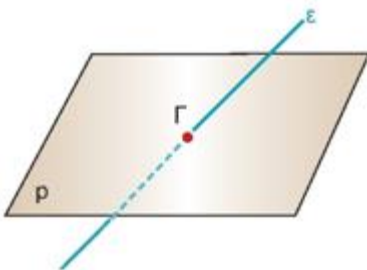
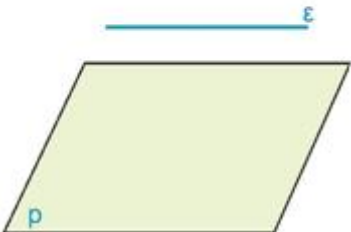
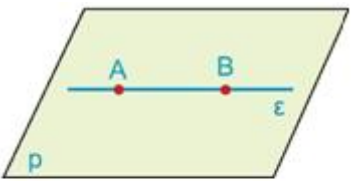
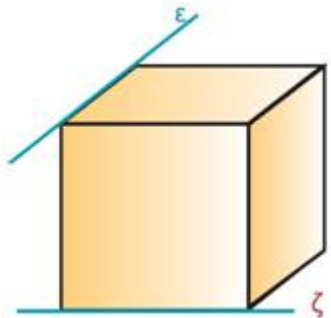
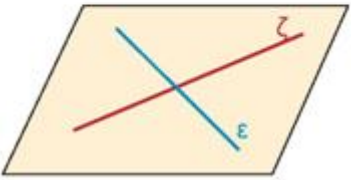
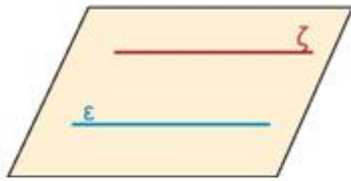
Σε ένα κλειστό βιβλίο οι δύο επιφάνειες που ορίζουν τα εξώφυλλά του, μας δίνουν την αίσθηση ότι όσο και αν τις προεκτείνουμε, δεν τέμνονται ποτέ.

Τα δύο επίπεδα που δημιουργούνται έτσι, λέγονται **παράλληλα**.



Αν τώρα ανοίξουμε το βιβλίο, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο επίπεδα που τα κοινά τους σημεία ανήκουν σε μια ευθεία. Λέμε, τότε, ότι τα επίπεδα τέμνονται.

Η ευθεία αυτή λέγεται **τομή** των δύο επιπέδων.



Επομένως:

Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:

- Να είναι παράλληλα.
- Να τέμνονται κατά μία ευθεία.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο

Γνωρίζουμε ότι δύο διαφορετικές ευθείες που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο μπορούν να είναι παράλληλες ή να τέμνονται. Όμως, όπως φαίνεται στον διπλανό κύβο, υπάρχουν ευθείες στο χώρο που δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμβατες**.

Επομένως:

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες ϵ και ζ , οι μόνες δυνατές θέσεις είναι:

- Να είναι παράλληλες, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο σημείο.
- Να τέμνονται, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Να είναι ασύμβατες, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να έχουν κανένα κοινό σημείο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Όπως ξέρουμε, από δύο σημεία ορίζεται μοναδική ευθεία.

Όταν τα σημεία αυτά ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει στο επίπεδο αυτό.

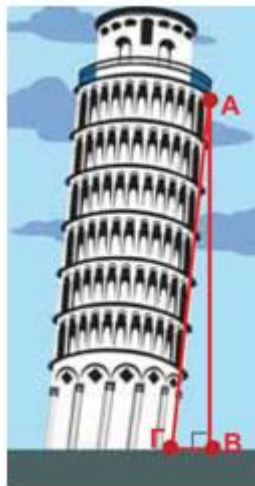
Η ευθεία αυτή λέγεται **ευθεία του επιπέδου**.

Αν μια ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με ένα επίπεδο, τότε είναι **παράλληλη** στο επίπεδο αυτό.

Είναι, όμως, δυνατό μια ευθεία να τέμνει ένα επίπεδο μόνο σε ένα σημείο. Το σημείο Γ ονομάζεται **ίχνος της ϵ στο επίπεδο p** .

Οι δυνατές θέσεις μιας ευθείας και ενός επιπέδου είναι:

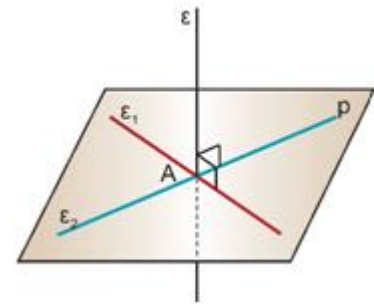
- Η ευθεία να περιέχεται στο επίπεδο.
- Η ευθεία να είναι παράλληλη στο επίπεδο.
- Η ευθεία να τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.



Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία ϵ που τέμνει το επίπεδο ρ στο σημείο A . Αν η ϵ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου ρ , που διέρχεται από το σημείο A , τότε θα λέμε ότι η ευθεία ϵ είναι κάθετη στο επίπεδο ρ .
Αποδεικνύεται ότι:

Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο διέρχονται από το ίχνος της.



Απόσταση σημείου από επίπεδο

Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει από την κορυφή A του κεκλιμένου πύργου της Πίζας, θα παρατηρήσουμε ότι διαγράφει τροχιά κάθετη προς το έδαφος. Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AB , που φέρουμε προς το επίπεδο ρ από ένα σημείο A που δεν ανήκει στο επίπεδο, λέγεται απόσταση του σημείου A από το επίπεδο ρ .
Παρατηρούμε ότι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AB είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα AG .

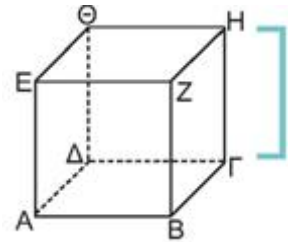
Απόσταση παράλληλων επιπέδων

Η επιφάνεια ρ του τραπεζιού ορίζει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο q του δαπέδου. Το ύψος του τραπεζιού εκφράζει την απόσταση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου του τραπεζιού ρ από το επίπεδο του δαπέδου q .
Η απόσταση αυτή ονομάζεται **απόσταση των παράλληλων επιπέδων** ρ και q .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1

Στον κύβο ΑΒΓΔΕΖΗΘ του διπλανού σχήματος να βρείτε τις ευθείες των ακμών του που είναι ασύμβατες στη ακμή ΑΒ.

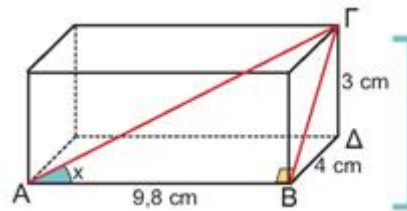


Λύση: Είναι οι ευθείες ΔΘ, ΘΕ, ΗΖ, ΗΓ, γιατί τέμνουν τα επίπεδα στα οποία ανήκει η ΑΒ γ την ΑΒ.

2

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:

α) τη ΒΓ β) τη γωνία $x = \hat{B\hat{A}\hat{G}}$.



Λύση: α) Η ΒΓ είναι υποτεινούσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΒΔΓ έχουμε:
 $B\Gamma^2 = 3^2 + 4^2$ ή $B\Gamma^2 = 25$ ή $B\Gamma = 5$ (cm).

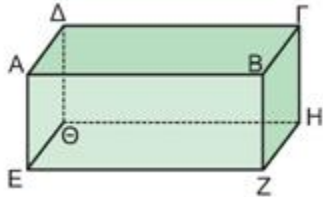
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα υπολογίσουμε τη εφαπτομένη της γωνίας x.
 Είναι λοιπόν $\epsilon\phi x = \frac{B\Gamma}{A\beta}$, οπότε $\epsilon\phi x = \frac{5}{9,8} = 0,51$ και από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι $x = 27^\circ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

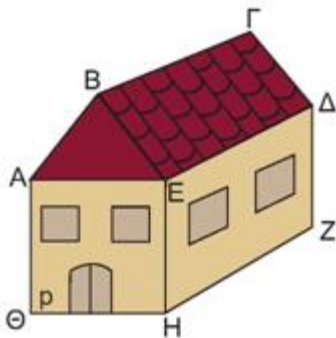
1. Μια ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο, όταν δεν περιέχεται στο επίπεδο αυτό και είναι παράλληλη με μια ευθεία του επιπέδου.
2. Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη σε μια ευθεία του επιπέδου.
3. Μια ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο, όταν δύο σημεία της είναι και σημεία του επιπέδου.
4. Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα.
5. Κάθε ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, τέμνει το επίπεδο αυτό.
6. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
7. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο ρ , τότε είναι κάθετη σε κάθε άλλο επίπεδο που είναι παράλληλο στο ρ .
8. Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται:
Α: Δύο επίπεδα
Β: Μόνο ένα επίπεδο
Γ: Άπειρα επίπεδα
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
9. Πόσα επίπεδα διέρχονται από μια ευθεία;
Α: Ένα
Β: Δύο
Γ: Τρία
Δ: Άπειρα
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι:
- κάθετες στην ΑΕ.
 - παράλληλες στην ΑΒ.
 - ασύμβατες με την ΔΓ.

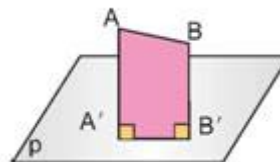


2. Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε επίπεδα τα οποία:
- είναι παράλληλα με το επίπεδο ρ.
 - τέμνουν το επίπεδο ρ.
- Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την κοινή τους ευθεία.

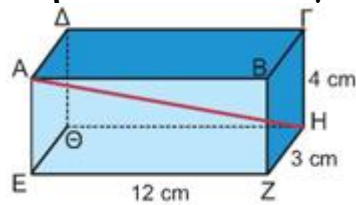


4.

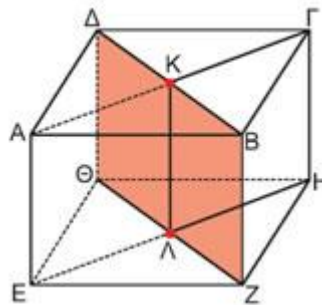
Οι αποστάσεις των σημείων Α, Β από το επίπεδο ρ είναι $AA' = 20$, $BB' = 14$. Αν $A'B' = 8$, να υπολογίσετε το ΑΒ.



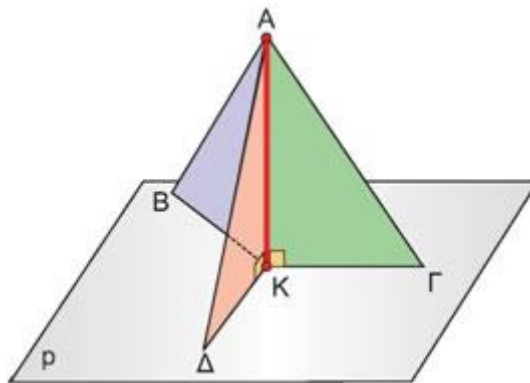
5. Στο παρακάτω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



6. Ο παρακάτω κύβος έχει ακμή 12 cm.
 α) Να εξηγήσετε γιατί η ΗΓ και η ΑΚ είναι κάθετες στην έδρα ΑΒΓΔ του κύβου.
 β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο.



7. Η κεραία ΑΚ του σχήματος, ύψους 12m, είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους. Συγκρατείται με τρία συρματόσχοινα που στερεώνονται στην κορυφή της και στα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν 5m από το Κ Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος των συρματόσχοινων που συγκρατούν την κεραία.



4.1 ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Ασκήσεις σχ. βιβλίου σελίδων 204- 205

Ερωτήσεις κατανόησης

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω ερωτήσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

	Σωστό	Λάθος
1. Μια ευθεία είναι παράλληλη σε ένα επίπεδο όταν δεν περιέχεται στο επίπεδο αυτό και είναι παράλληλη σε μία ευθεία του επιπέδου	Σ	
2. Μία ευθεία είναι κάθετη σ' ένα επίπεδο αν είναι κάθετη σε μία ευθεία του επιπέδου		Λ
3. Μία ευθεία ανήκει σε ένα επίπεδο αν δύο σημεία της είναι και σημεία του επιπέδου	Σ	
4. Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα		Λ
5. Κάθε ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο τέμνει το επίπεδο αυτό	Σ	
6. Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι μεταξύ τους παράλληλες	Σ	
7. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σ' ένα επίπεδο ρ, τότε είναι κάθετη σε κάθε άλλο επίπεδο που είναι παράλληλο στο ρ.	Σ	
8. Από τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία διέρχονται : Α: Δύο επίπεδα Β: Μόνο ένα επίπεδο Γ: Άπειρα επίπεδα Κυκλώστε την σωστή απάντηση		
Απάντηση Σωστό το Β το οποίο και κυκλώνουμε		
9. Πόσα επίπεδα διέρχονται από μία ευθεία Α: Ένα Β: Δύο Γ: Τρία Δ: Άπειρα Κυκλώστε την σωστή απάντηση		
Απάντηση Σωστό το Δ το οποίο και κυκλώνουμε		

Ασκήσεις

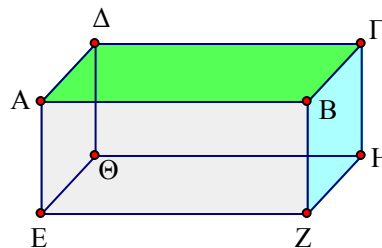
1.

Στο διπλανό παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι

- α) κάθετες στην ΑΕ
- β) παράλληλες στην ΑΒ
- γ) ασύμβατες με την ΔΓ

Προτεινόμενη λύση

- α)
ΔΑ , ΕΘ , ΒΑ , ΕΖ
- β)
ΔΓ , ΘΗ , ΕΖ
- γ)
ΑΕ , ΒΖ , ΖΗ , ΕΘ



2.

Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε επίπεδα τα οποία :

- α) είναι παράλληλα με το επίπεδο ρ
- β) τέμνουν το επίπεδο ρ. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε την κοινή τους ευθεία

Προτεινόμενη λύση

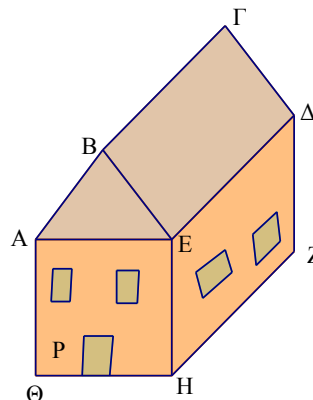
α)

Παράλληλο στο Ρ είναι το επίπεδο το οποίο ορίζεται από τις ευθείες ΓΔ και ΔΖ. (πίσω τοίχος του σπιτιού)

β)

- i) Το ΕΗΖΔ με τομή την ΕΗ
- ii) Το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ΘΗ και ΗΖ (το δάπεδο του σπιτιού) με τομή την ΘΗ
- iii) Το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες ΑΕ και ΕΔ (το ταβάνι του σπιτιού) με τομή την ΑΕ

Βέβαια στην άσκηση υπάρχουν κάποιες ασάφειες, όπως αριστερά τοίχος στο σπίτι δεν υπάρχει ; το επίπεδο ΑΒΕ ταυτίζεται με το Ρ ή είναι διαφορετικό του Ρ



3.

Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

- α) Να σχεδιάσετε το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία Α, Δ, Ζ .
- β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που διέρχεται από το Κ και είναι κάθετη στην κάτω έδρα του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

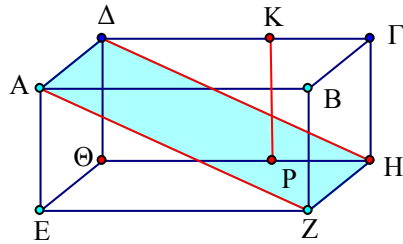
Προτεινόμενη λύση

α)

Είναι το ΑΔΗΖ (γαλάζιο χρώμα)

β)

Είναι η ΚΡ που φέρεται // στην ΓΗ

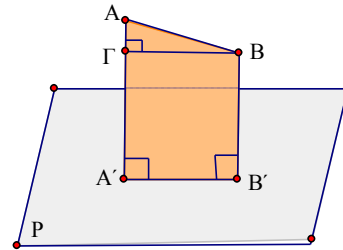


4.

Οι αποστάσεις των σημείων Α και Β από το επίπεδο Ρ είναι $AA' = 20$ και $BB' = 14$. Αν $A'B' = 8$ να υπολογίσετε το ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

Φέρνουμε από το Β την $BΓ \perp AA'$ όπως φαίνεται και στο δίπλα σχήμα. Τότε το $A'B'ΒΓ$ είναι ορθογώνιο με $ΓΑ' = BB' = 14$, $BΓ = A'B' = 8$ και $AΓ = AA' - BB' = 20 - 14 = 6$



Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΓΒ έχουμε ότι $AB^2 = AΓ^2 + BΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Άρα $AB = 10$

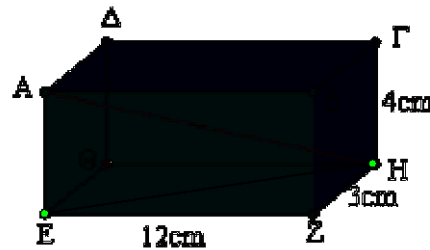
5.

Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ

Προτεινόμενη λύση

Επειδή η ΑΕ είναι κάθετη στις ΕΘ και ΕΖ, θα είναι κάθετη και στο επίπεδο ΕΘΖ. Άρα κάθετη και στην ΕΗ.

Από το Πυθαγόρειο στο ΑΕΗ έχουμε ότι $AH^2 = AE^2 + EH^2$
 Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΖΗ είναι $EH^2 = EZ^2 + ZH^2$
 Άρα $AH^2 = AE^2 + EZ^2 + ZH^2 = 4^2 + 12^2 + 3^2 = 16 + 144 + 9 = 169$



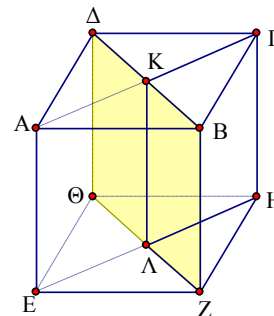
Άρα $AH = 13 \text{ cm}$

6.

Ο διπλανός κύβος έχει ακμή 12 cm

α) Να εξηγήσετε γιατί η ΗΓ και η ΛΚ είναι κάθετες στην έδρα ΑΒΓΔ του κύβου.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο.



Προτεινόμενη λύση**α)**

Επειδή οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα, η ΗΓ είναι κάθετη στις ΒΓ και ΔΓ. Άρα θα είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν, δηλαδή στην έδρα ΑΒΓΔ

Επίσης τα ΚΓΗΛ και ΚΒΖΛ είναι ορθογώνια, άρα η ΚΛ είναι κάθετη στις ΚΓ και ΚΒ. Συνεπώς και στο επίπεδο που αυτές ορίζουν, δηλαδή στην έδρα ΑΒΓΔ

β)

Η απόσταση της κορυφής Γ από το γραμμοσκιασμένο επίπεδο είναι το τμήμα ΓΚ, το οποίο είναι το μισό της διαγωνίου ΑΓ της έδρας ΑΒΓΔ.

$$\text{Όμως } ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288$$

$$\text{Άρα } ΑΓ = \sqrt{288} = 16,9, \text{ οπότε } ΓΚ = 8,5 \text{ cm}$$

7.

Η κεραία ΑΚ του σχήματος ύψους 12m είναι τοποθετημένη κάθετα στο επίπεδο του εδάφους.

Συγκρατείται με τρία συρματόσχοινα που στερεώνονται στην κορυφή της και στα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν 5cm από το Κ.

Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος των συρματόσχοινων που συγκρατούν την κεραία

Προτεινόμενη λύση

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΚ^2 + ΚΓ^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

$$\text{Άρα } ΑΓ = 13$$

Και επειδή ομοίως ΑΔ = ΑΒ = 13, το

συνολικό μήκος των συρματόσχοινων είναι $3 \cdot 13 = 39 \text{ m}$

