ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3^{o}

Μέτρα θέσης
και
διασποράς.

Το

8^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Είναι μέτρο θέσης του "κέντρου" των παρατηρήσεων.
Στα προβλήματα της μέσης τιμής χρησιμοποιούμε το Ελληνικό γράμμα **Σ** (που χρησιμοποιείται διεθνώς, ουάου!!), το οποίο λειτουργεί ως εξής: $\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4$,

$\sum_{i=1}^{3} 5x_i = 5x_1+5x_2+5x_3$.

Α) Όταν σε ένα δείγμα οι παρατηρήσεις είναι $x_1, x_2, x_3,\ldots x_\nu$ τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$.

Β) Όταν σε ένα δείγμα οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3,\ldots x_\kappa$ έχουν αντίστοιχα συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \nu_3,\ldots,\nu_\kappa$ τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i$.

Γ) Όταν σε ένα δείγμα οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3,\ldots x_\kappa$ έχουν αντίστοιχα σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, f_3,\ldots,f_\kappa$ (όχι ποσοστά!), τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$.

Δ) Όταν σε ένα δείγμα οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3,\ldots x_\kappa$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, w_3,\ldots,w_\kappa$ τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$.

(Προσοχή! Στον παρονομαστή βάζουμε το άθροισμα των συντελεστών).

Μέση τιμή χωρίς συχνότητες

π.χ. Να βρείτε την μέση τιμή των αριθμών: 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Έχουμε $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{6} t_i = \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \mathbf{7}$.

Μέση τιμή με συχνότητες

π.χ. Ένας μαθητής πήρε τους παρακάτω βαθμούς:
13 ,13, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των βαθμών του. (Μέσο όρο το λέμε συνήθως).

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$
13	2	26
14	1	14

Για διευκόλυνση κατασκευάζουμε τον πίνακα:

15	3	45
16	3	48
17	1	17
Σύνολα	ν=10	$\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = 150$

Άρα $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = \frac{150}{10}$=**15**.

Σταθμικός μέσος

π.χ. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι x_1=12, x_2=10, x_3=16, x_4=18, x_5=14 με συντελεστές στάθμισης w_1=2, w_2=3, w_3=1, w_4=1, w_5=3 αντίστοιχα. Να βρείτε την μέση επίδοση.

Έχουμε: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = \frac{12\cdot 2 + 10\cdot 3 + 16\cdot 1 + 18\cdot 1 + 14\cdot 3}{2+3+1+1+3}$=**13**.

Μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα.

π.χ. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των επισκέψεων 40 μαθητών σε μουσεία της χώρας

Επισκέψεις	Συχνότητα v_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i \cdot v_i$
[0,2)	8	1	8
[2,4)	12	3	36
[4,6)	10	5	50
[6,8)	6	7	42
[8,10)	4	9	36
Σύνολα	ν=40		$\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = 172$

Άρα $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = \frac{172}{40}$=**4,3**.

Μέση τιμή σε ελλιπή πίνακα

π.χ. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αν γνωρίζετε ότι $\bar{x} = 2,4$.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1		
2		30
3		
4		20
Σύνολο	ν=50	

Προφανώς v_2=15 και v_4=5. Θέτουμε v_1=x και v_3=y οπότε ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1	x	x
2	15	30
3	y	3y
4	5	20
Σύνολο	ν=50	

Πρέπει: x+15+y+5=50 (**1**) και $\frac{x+30+3y+20}{50}=2,4$ (**2**)
και λύνουμε το σύστημα των (**1**) και (**2**)...

Μέση τιμή ενός τμήματος του πληθυσμού.

π.χ. Δίνεται ο διπλανός πίνακας:

α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων.
β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολα		1

α) Έχουμε $\bar{x}=\sum_{1}^{4} x_i f_i$ =55·0,1+65·0,3+75·0,2+85·0,4=**74**

(Υπόψη: Οι σχετικές συχνότητες <u>όχι</u> σε ποσοστά, αλλά $f_1+f_2+f_3+f_4=1$)

β) Επειδή παίρνουμε μέρος του πληθυσμού η μέση τιμή θα υπολογιστεί με τον τύπο του
σταθμικού μέσου, αφού οι κλάσεις δεν έχουν το ίδιο πλήθος.

Άρα $\bar{x}=\frac{\sum_{1}^{3} x_i f_i}{\sum_{1}^{3} w_i}=\frac{55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2}{0,1+0,2+0,3}=\frac{\mathbf{200}}{\mathbf{3}}$

Μέση τιμή με σχετικές συχνότητες.

π.χ. Το 10% των μελών ενός συλλόγου συνεισέφερε από 40 € για φιλανθρωπικούς σκοπούς, το
50% συνεισέφερε από 20 € και οι υπόλοιποι από 15 €. Ποια είναι η μέση τιμή των συνεισφορών των μελών του συλλόγου;

Έχουμε $\bar{x}=\sum_{i=1}^{3} x_i f_i=0,1\cdot 40+0,5\cdot 20+0,4\cdot 15=$**20€.**

Υπάρχουν ασκήσεις που μας δίνουν ή μας ζητούν τη **μέση τιμή ενός υποσυνόλου του πληθυσμού.** Ένα καλό colpomath δείτε στο επόμενο παράδειγμα:

π.χ. Η μέση τιμή της ηλικίας των 20 ανδρών μιας επιχείρησης είναι 48 έτη, ενώ η μέση τιμή
της ηλικίας των 15 γυναικών είναι 40 έτη. Να βρείτε την μέση ηλικία όλων των

εργαζομένων της επιχείρησης.

Ονομάζουμε **$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,..,\alpha_{20}$** τους άνδρες και **$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,..,\gamma_{15}$** τις γυναίκες.

Έχουμε: $\bar{x}_\alpha = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{20}}{20} = 48$ και $\bar{x}_\gamma = \dfrac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+...+\gamma_{15}}{15} = 40$.

Άρα $\bar{x}_{o\lambda} = \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{20})+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+...+\gamma_{15})}{35} = \dfrac{20\cdot 48+15\cdot 40}{35}$ =**44,6**

Γενικά αν η μέση τιμή ενός συνόλου ν ατόμων είναι $\bar{x}_\nu$ και η μέση τιμή μ ατόμων είναι $\bar{x}_\mu$ τότε η συνολική μέση τιμή είναι $\bar{x}_{o\lambda} = \dfrac{\nu\bar{x}_\nu+\mu\bar{x}_\mu}{\nu+\mu}$

π.χ. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τιμές ενός δείγματος με μέση τιμή $\bar{x}$=30. Θεωρούμε ότι κάθε μία από τις 20 πρώτες αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda\in R$, με $\lambda>0$. Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τιμών να είναι ίση με 31.

Δίνεται ότι $\bar{x} = \dfrac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}$=30. Άρα $x_1+x_2+...x_{50}=1500$. (**1**) Πρέπει:

$$\frac{(x_1+3)+(x_2+3)+...+(x_{20}+3)+x_{21}+x_{22}+...+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+(x_{37}-\lambda)+...+(x_{50}-\lambda)}{50}$$

=31 ή

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{20}+20\cdot 3+x_{21}+x_{22}+...+x_{35}+x_{36}+x_{37}+...+x_{50}-15\cdot\lambda}{50}=31$$

Με βάση την (**1**) έχουμε: $\dfrac{1500+60-15\cdot\lambda}{50}$=31 και τελικά λ=$\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

π.χ. Οι σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 είναι **ανάλογες** προς τις παρατηρήσεις 1, 2, 3, 4. Να βρείτε:

α) Την μέση τιμή.

β) Τις συχνότητες $\nu_1,\nu_2, \nu_3, \nu_4$. αν $\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+4\nu_4=90$.

Έχουμε: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

α) Επειδή οι σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 είναι **ανάλογες** προς τις παρατηρήσεις 1, 2, 3, 4 θα ισχύει $\dfrac{f_1}{1}=\dfrac{f_2}{2}=\dfrac{f_3}{3}=\dfrac{f_4}{4}$. Εφαρμόζουμε ιδιότητα των αναλογιών και έχουμε:

$\dfrac{f_1}{1}=\dfrac{f_2}{2}=\dfrac{f_3}{3}=\dfrac{f_4}{4}=\dfrac{f_1+f_2+f_3+f_4}{1+2+3+4}=\dfrac{1}{10}$, άρα $f_1=0{,}1$, $f_2=0{,}2$, $f_3=0{,}3$ και $f_4=0{,}4$.

$\overline{x}=\sum_{1}^{4}x_i\cdot f_i$ $=1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4=$**3**.

β) Έχουμε: $\overline{x}=\frac{1}{v}\sum_{1}^{4}x_i\cdot v_i=\frac{1}{v}(1\cdot v_1+2\cdot v_2+3\cdot v_3+4\cdot v_4)$ ή $3=\frac{1}{v}90$, οπότε ν=30 και επομένως

$v_1=vf_1=30\cdot 0{,}1=$**3**
$v_2=vf_2=30\cdot 0{,}2=$**6**
$v_3=vf_3=30\cdot 0{,}3=$**9**
$v_4=vf_4=30\cdot 0{,}4=$**12**.

π.χ. Οι παρατηρήσεις ln2, $\ln\frac{3}{2}$, $\ln\frac{4}{3}$, $\ln\frac{5}{4}$,..., $\ln\frac{v+1}{v}$ έχουν μέση τιμή $\frac{\ln 2016}{v}$. Να βρείτε το πλήθος τους.

Έχουμε: $\overline{x}=\frac{1}{v}\sum_{1}^{4}x_i\cdot v_i=\frac{\ln 2016}{v}$ ή

$\frac{1}{v}(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+...+\ln\frac{v+1}{v})=\frac{\ln 2016}{v}$ ή

$\ln(2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}...\ln\frac{v+1}{v})=\ln 2016$ ή $\ln(v+1)=\ln 2016$, άρα ν=2015.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Είναι ένα μέτρο θέσης.

1) Χωρίζει ένα σύνολο σε δύο ίσα μέρη.
2) Είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. (**ψιτ!** πέφτει στις εξετάσεις).
3) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **περιττό** η διάμεσος είναι μια από τις παρατηρήσεις.

Υπόψη: <u>Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μικρό</u> τις διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά κ.λ.π.

<u>Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μεγάλο</u> κάνουμε πίνακα και από την στήλη των συχνοτήτων αναζητούμε το μέσον κ.λ.π.

Υπόψη: Την διάμεσο την εντοπίζουμε από τις συχνότητες και την υπολογίζουμε από τις τιμές της μεταβλητής.

π.χ. Να βρείτε την διάμεσο των παρατηρήσεων: 3, 4, 0, 6, 5, 8, 1, 1, 6, 1, 2, 8, 9.

Θα διατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 8, 9
Η μεσαία παρατήρηση είναι η 7η, άρα **δ=4**.

Αν οι παρατηρήσεις είναι πολλές τι κάνουμε;

π.χ. Οι θερμοκρασίες μιας πόλης τον Απρίλιο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε την διάμεσο.

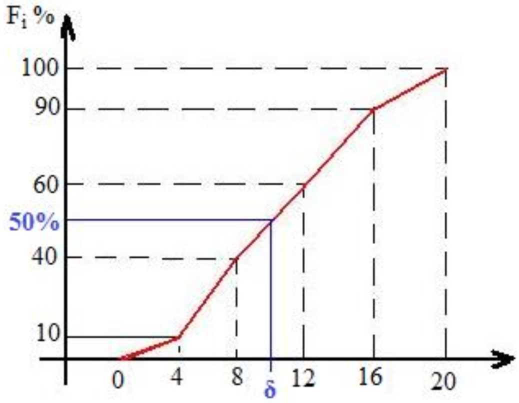
Θερμοκρασίες	ν_i
13	7
14	8
15	5
17	7
20	3

Θα πρέπει να τοποθετήσουμε όλες τις θερμοκρασίες σε αύξουσα σειρά. Δηλαδή: 13, 13, 13,...,20, 20
Μάλλον...μπελάς είναι. Σκεφτόμαστε ως εξής:

Οι μέρες του πίνακα είναι 30. Επομένως υπάρχουν δύο "μεσαίες" παρατηρήσεις, οι x_{15}=14 και x_{16}=15. Άρα η διάμεσος είναι $\delta=\frac{14+15}{2}$=**14,5**.

Σε ομαδοποιημένη κατανομή η διάμεσος βρίσκεται από το ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

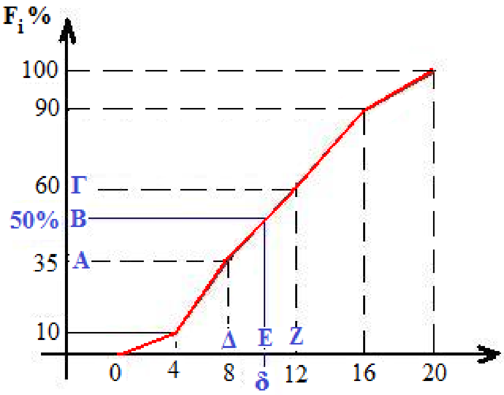
π.χ. Να βρείτε την διάμεσο από το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Στον κατακόρυφο άξονα αναζητούμε το 50%. Βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος 40–60. Η διάμεσος θα είναι το μέσον του διαστήματος 8–12, δηλαδή **δ=10**.

(Δείτε το θεώρημα του Θαλή στη σελίδα **Γεωμετρία Β' Λυκείου**).

π.χ. Να βρείτε την διάμεσο από το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, όπου το 50% δεν βρίσκεται στο μέσον διαστήματος.

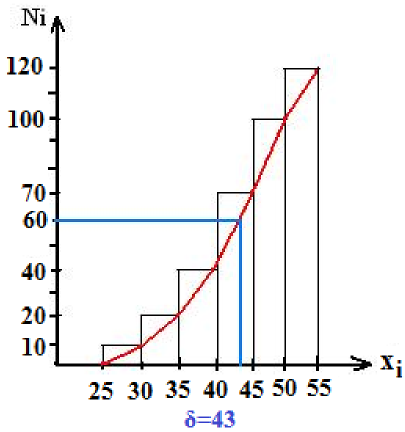


Θα εφαρμόζουμε το θεώρημα του Θαλή.
Έχουμε: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta Z}$. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε: $\frac{15}{25}=\frac{\Delta E}{4}$, άρα ΔΕ=2,4 και επομένως δ=8+2,4=**10,4**.

Σε ομαδοποιημένη κατανομή η διάμεσος βρίσκεται **και** από το ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων N_i (Δεν το γράφει το σχολικό βιβλίο).

π.χ. Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής που βλέπετε στον πίνακα:

Κλάσεις	v_i	N_i
[25,30)	10	10
[30,35)	10	20
[35,40)	20	40
[40,45)	30	70
[45,50)	30	100
[50,55)	20	120
Άθροισμα	120	



Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα της κατανομής Ni.
Βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα το μισό του ν. (Εδώ είναι το 60).
Φέρουμε οριζόντια ευθεία και εκεί που συναντάει το πολύγωνο των N_i φέρουμε κατακόρυφη
που τέμνει τον άξονα x_i στο δ και συνεχίζουμε με το θεώρημα του Θαλή...

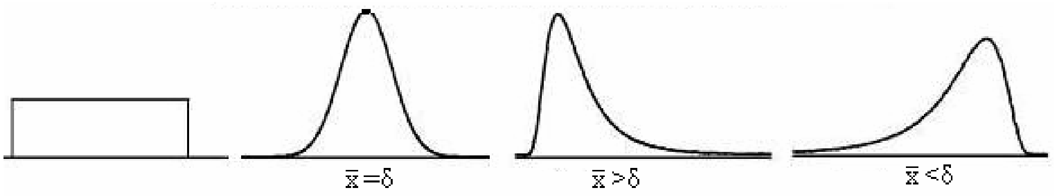
π.χ. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας επιχείρησης σε € είναι : 580, 580, 580, 600, 622, 630, 600,
1100, 700, 1000, 620. Να βρείτε:
α) Την μέση τιμή.
β) Την διάμεσο. Ποιο μέτρο θέσης είναι δικαιότερο;

α) Η μέση τιμή είναι 692 €.
β) Η διάμεσος είναι 620 €. (αφού διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τους μισθούς).
Η μέση τιμή αυξάνεται υπερβολικά από τις αποδοχές των δύο... golden boys που είναι

διπλάσιες σχεδόν.

Στην κανονική κατανομή (δείτε παρακάτω) **η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή**. (Ερώτηση 2, σελ. 131, σχολικού βιβλίου).

Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων



Ομοιόμορφη | Κανονική | Ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία (*) | Ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία

(*) Να θυμάστε ότι η μέση τιμή "**παρασύρεται**" από τις ακραίες τιμές. Δείτε το παράδειγμα που ακολουθεί:

π.χ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 έχουν $\bar{x}=3$ και δ=3. Άρα $\bar{x}=\delta$.

π.χ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 10 έχουν $\bar{x}=4$ και πάλι δ=3. Αλλά $\bar{x}>\delta$.

ΕΥΡΟΣ

Είναι ένα μέτρο διασποράς

1) Το εύρος μιας κατανομής δίνεται από τον τύπο $\mathbf{R=X_{max}-X_{min}}$.
2) Στην κανονική κατανομή είναι **R≈6s**. (δείτε παρακάτω).
3) Δεν είναι αξιόπιστο μέτρο γιατί βασίζεται μόνο στις ακραίες τιμές.

π.χ. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι: 7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14.

Το εύρος θα είναι R=15–3=**12.** Για τους υπόλοιπους βαθμούς δεν γίνεται...κουβέντα! Γι' αυτό δεν είναι αξιόπιστο μέτρο.

π.χ. Τα βάρη μιας ομάδας πέντε μαθητών είναι: 62, 77, 65, 72, 69 κιλά.

α. Να βρείτε το μέσο βάρος, τη διάμεσο, και το εύρος των τιμών των βαρών.

β. Αν στην ομάδα προστεθεί ένας μαθητής και το μέσο βάρος γίνει 72 κιλά, να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή.

α. Το μέσο βάρος είναι $\bar{x}=\frac{62+77+65+72+69}{5}$=**69**. (**1**)

Τοποθετούμε τα βάρη σε αύξουσα σειρά: 62, 65, 69, 72, 77. Η διάμεσος είναι δ=**69**.

Το εύρος είναι $R=x_{max}-x_{min}$=77–62=**15**.

β. Έστω λ το βάρος του νέου μαθητή. Πρέπει $\frac{(62+77+65+72+69)+\lambda}{6}$=72.

Λόγω της (**1**) έχουμε: $\frac{5\cdot 69+\lambda}{6}$=72, άρα λ=**87**.

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Είναι ένα μέτρο διασποράς

Η διακύμανση ή διασπορά δείχνει την απόκλιση των τιμών από την μέση τιμή.
Για την ακρίβεια είναι η μέση τιμή των αποστάσεων όλων των τιμών από την μέση τιμή.

Υπόψη:

Η μέση τιμή των x_1, x_2, x_3,...x_v δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i$ **(1)**

Η μέση τιμή των x_1^2, x_2^2 ,..., x_v^2 δίνεται από τον τύπο: $\overline{x^2} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i^2$ **(2)**

Ο τύπος της διασποράς στις εξετάσεις δίνεται. Άρα δεν χρειάζεται να τον μάθετε απέξω.
Καλό όμως είναι να ξέρετε διάφορες μορφές του, χρήσιμες στις ασκήσεις.

Μετατροπές του τύπου της διακύμανσης ή διασποράς.

1) Αν οι τιμές του δείγματος είναι μοναδικές, δηλαδή όταν v_i=1, τότε χρησιμοποιούμε τον

τύπο: $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})^2$ ή $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}t_i^2-\bar{x}^2$ ή $s^2=\overline{x_i^2}-(\bar{x})^2$.

2) Αν οι τιμές του δείγματος δεν είναι μοναδικές, δηλαδή όταν v_i>1, τότε χρησιμοποιούμε τον

τύπο: $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 v_i$ ή $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}x_i^2 v_i-\bar{x}^2$ και

$s^2=\sum_{i=1}^{v}x_i^2 f_i-(\bar{x})^2$, όταν δίνονται μόνο σχετικές συχνότητες.

π.χ. Δύο μαθητές **Α** και **Β** πήραν τους εξής βαθμούς:

Α: 13 ,13, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17

Β: 11, 13, 13, 13, 14, 16, 17, 17, 17, 19. Να σχολιάσετε την επίδοση των παραπάνω μαθητών.

Αν πινακοποιήσουμε τα δεδομένα, οι πράξεις γίνονται πιο εύκολα.

Μαθητής Α

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$v_i(x_i-\bar{x})^2$
13	2	26	–2	4	8
14	1	14	–1	1	1
15	3	45	0	0	0
16	3	48	1	1	3
17	1	17	2	4	4

Σύνολα		150			16

Μέση τιμή: $\bar{x} = \dfrac{150}{10}$ =**15.** Διακύμανση $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \dfrac{16}{10}$ =**1,6**

Μαθητής Β

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
11	1	11	–4	16	16
13	3	39	–2	4	12
14	1	14	–1	1	1
16	1	16	1	1	1
17	3	51	2	4	12
19	1	19	4	16	16
Σύνολα		150			58

Μέση τιμή: $\bar{x} = \dfrac{150}{10}$ =**15.** Διακύμανση $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \dfrac{58}{10}$ =**5,8**

Παρατηρούμε ότι και οι δύο μαθητές είναι ισάξιοι αφού έχουν μέσο όρο **15**. Επειδή η διακύμανση του μαθητή Α είναι μικρότερη του Β συμπεραίνουμε ότι ο Α είναι πιο συγκροτημένος από τον Β. (Το 19 ο Β ίσως το πήρε στην...Γυμναστική!)

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης δίνει την τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{s}$.

π.χ. Να βρείτε την μέση τιμή την διάμεσο και την τυπική απόκλιση των πολλαπλασίων του 6 που περιέχονται μεταξύ 10 και 45.

α) Τα πολλαπλάσια του 6 έχουν την μορφή 6λ με λ∈Ν. Πρέπει 6λ≥10 και 6λ'≤45, από όπου θα βρούμε λ=2 και λ'=7. Άρα οι αριθμοί που ζητάμε είναι: **12, 18, 24, 30, 36, 42.**

β) $\bar{x} = \dfrac{12+18+...+42}{6}$ =**27**.

γ) Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο δ=$\dfrac{x_3 + x_4}{2} = \dfrac{24+30}{2}$ =**27**.

δ) $s^2 = \dfrac{(12-27)^2 + (18-27)^2 + ... + (42-27)^2}{6} = \dfrac{15^2 + 9^2 + 3^2 + 15^2 + 9^2 + 3^2}{6} = 105$.

άρα s= $\sqrt{105}$ =**10,24** περίπου.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1) Όταν η καμπύλη συχνοτήτων έχει "κωδωνοειδή" μορφή τότε μιλάμε για κανονική κατανομή.

2) Στην **κανονική κατανομή** η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή. (ερώτηση 2, σελ. 131)

3) Στην κανονική κατανομή το εύρος είναι **R≈6s**.

4) Όταν σε άσκηση υπάρχει η έκφραση **"κανονική κατανομή"** αμέσως φτιάχνουμε τον άξονα.

Καλό είναι να γνωρίζουμε τον άξονα της κανονικής κατανομής και με την παρακάτω μορφή, γιατί έτσι κερδίζουμε χρόνο και πράξεις.

	$\bar{x}-3s$	$\bar{x}-2s$	$\bar{x}-s$	$\bar{x}$	$\bar{x}+s$	$\bar{x}+2s$	$\bar{x}+3s$	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

5) Όταν μας ζητούν **"το πολύ x_o"** αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα $(0, x_o]$.

6) Όταν μας ζητούν **"τουλάχιστον x_o"** αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα (x_o, ∞).

7) Όταν μας ζητούν **"μεταξύ x_1 και x_2"** αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα (x_1, x_2).

π.χ. Οι χρόνοι σε sec που χρειάστηκαν να τρέξουν 200 μαθητές σε μια απόσταση ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν 10 μαθητές έκαναν χρόνο **το πολύ** 26 sec και 32 μαθητές **τουλάχιστον** 32 sec, να βρείτε:

α) την μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

β) πόσοι μαθητές έκαναν χρόνο από 28 sec μέχρι 34 sec.

α) 1. Εφόσον οι χρόνοι ακολουθούν την κανονική κατανομή...τσακιζόμαστε να φτιάξουμε τον άξονα.

	$\bar{x}-3s$	$\bar{x}-2s$	$\bar{x}-s$	$\bar{x}$	$\bar{x}+s$	$\bar{x}+2s$	$\bar{x}+3s$	
0,15%	2,35%	13,5%	34%	34%	13,5%	2,35%	0,15%	

2) Οι 5 μαθητές από τους 200 αποτελούν το $\frac{5}{200}=0,025=2,5\%$ και επειδή έκαναν χρόνο το πολύ 26 sec, (δηλαδή 26 και κάτω) έχουμε $\bar{x}-2s$ =26 (**1**)

Οι 32 μαθητές από τους 200 αποτελούν το $\frac{32}{200}=0,16=16\%$ και επειδή έκαναν χρόνο τουλάχιστον 32 sec, (δηλαδή 32 και πάνω) έχουμε $\bar{x}+s$ =32 (**2**)

3) Λύνουμε το σύστημα των (**1**) και (**2**) και βρίσκουμε $\bar{x}$=**30** και s=**2**.

β. Ο άξονάς μας τώρα έγινε ως εξής:

	$\bar{x}-3s$		$\bar{x}-2s$		$\bar{x}-s$		$\bar{x}$		$\bar{x}+s$		$\bar{x}+2s$		$\bar{x}+3s$	
0,15%		2,35%		13,5%		34%		34%		13,5%		2,35%		0,15%
	24		**26**		**28**		**30**		**32**		**34**		**36**	

Στο διάστημα 28 έως 34 βρίσκεται το 34%+34%+13,5%=81,5% του 200. Δηλαδή 81,5%·200=**163 μαθητές**.

π.χ. Αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή, ώστε το 2,5% αυτών έχουν τιμές t_i<20 και το 16% έχουν τιμές t_i>50, τότε

α. Να βρείτε τα $\bar{x}$, s, R.

β. Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων παίρνει τιμές στο (20,40);

γ. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 1000, να βρείτε το $\sum x_i^2 \nu_i$.

α. Αμέσως φτιάχνουμε τον άξονα:

	$\bar{x}-3s$		$\bar{x}-2s$		$\bar{x}-s$		$\bar{x}$		$\bar{x}+s$		$\bar{x}+2s$		$\bar{x}+3s$	
0,15%		2,35%		13,5%		34%		34%		13,5%		2,35%		0,15%
			20						**50**					

Τοποθετούμε το 20 ώστε αριστερά του να είναι το 2,5% και το 50 ώστε δεξιά του να είναι το 16%. (Υπόψη: το 50>20 άρα θα βρίσκεται δεξιά του).

Έχουμε επομένως το σύστημα: $\bar{x}-2s=20$ και $\bar{x}+s=50$, η λύση του οποίου δίνει $\bar{x}$=**40** και s=**10**.

Γνωρίζουμε ότι R≈6s, άρα R≈**60**.

β. Ο άξονας τώρα γίνεται:

	$\bar{x}-3s$		$\bar{x}-2s$		$\bar{x}-s$		$\bar{x}$		$\bar{x}+s$		$\bar{x}+2s$		$\bar{x}+3s$	
0,15%		2,35%		13,5%		34%		34%		13,5%		2,35%		0,15%
	10		**20**		**30**		**40**		**50**		**60**		**70**	

Στο διάστημα (20,40) βρίσκεται το 13,5%+34%=**47,5%.**

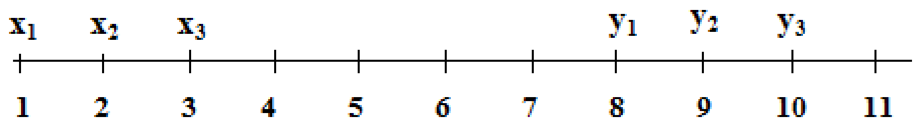
γ. Ο αριθμός $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \nu_i$ υπάρχει στον τύπο $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \nu_i - \bar{x}^2$ και με αντικατάσταση σ' αυτόν

έχουμε: $10^2=\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \nu_i - 40^2$ ή $100000=\sum x_i^2 \nu_i - 1600000$, άρα $\sum x_i^2 \nu_i$ =**1.700.000**

ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (τζιζ!!)

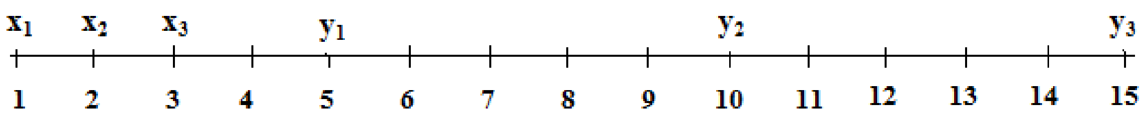
Α. Έστω $x_1, x_2, x_3,..,x_ν$ ένα δείγμα παρατηρήσεων. Αν όλες οι παρατηρήσεις **αυξηθούν κατά τον ίδιο αριθμό** c τότε οι νέες παρατηρήσεις $y_1, y_2, y_3,..,y_ν$ που θα προκύψουν συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση: $y_i=x_i+c$. Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y}=\bar{x}+c$ και η τυπική απόκλιση $s_y=s_x$.

Αν στις παρατηρήσεις x_1, x_2, x_3 ενός δείγματος ν προσθέσουμε π.χ. το 7 οι νέες παρατηρήσεις θα...μετακομίσουν 7 θέσεις προς τα δεξιά, χωρίς να μεταβληθούν οι μεταξύ τους αποστάσεις, όπως στον παρακάτω άξονα.



Β. Έστω $x_1, x_2, x_3,..,x_ν$ ένα δείγμα παρατηρήσεων. Αν όλες οι παρατηρήσεις **πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό** c τότε οι νέες παρατηρήσεις $y_1, y_2, y_3,..,y_ν$ που θα προκύψουν συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση: $y_i=cx_i$. Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y}=c\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση $s_y=|c|s_x$.

Αν τις παρατηρήσεις x_1, x_2, x_3 ενός δείγματος πολλαπλασιάσουμε π.χ. με το 5 οι νέες παρατηρήσεις θα...μετακομίσουν προς τα δεξιά, και θα μεταβληθούν και οι μεταξύ τους αποστάσεις, όπως στον παρακάτω άξονα.



Προσοχή! Αν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, x_3,..,x_ν$ **αυξηθούν** κατά π.χ. 20% στην πραγματικότητα έχουμε **πολλαπλασιασμό** με τον ίδιο αριθμό διότι: $y_i=x_i+20\%x_i=(1+0,2)x_i=1,2x_i$

Δείτε το παράδειγμα

1. Οι παρατηρήσεις x_i ενός δείγματος μεγέθους ν έχουν $\bar{x}=8$ και $s_x=3$. Αν σε όλες τις παρατηρήσεις προσθέσουμε τον αριθμό 7 να βρείτε την νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση.
2. Ομοίως αν τις πολλαπλασιάσουμε επί c=5.

3. Ομοίως αν τις αυξήσουμε κατά 20%.
4. Ομοίως αν τις πολλαπλασιάσουμε επί c= –5.
5. Ομοίως αν $y_i=3x_i-7$.
6. Ομοίως αν $y_i=-3x_i-2$.

Απαντήσεις

1. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=x_i+7$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=\bar{x}+7=8+7=$**15** και τυπική απόκλιση $s_y=s_x=$**3**.

2. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=5x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=5\bar{x}=5\cdot8=$**40** και τυπική απόκλιση $s_y=5\cdot s_x=$**15**.

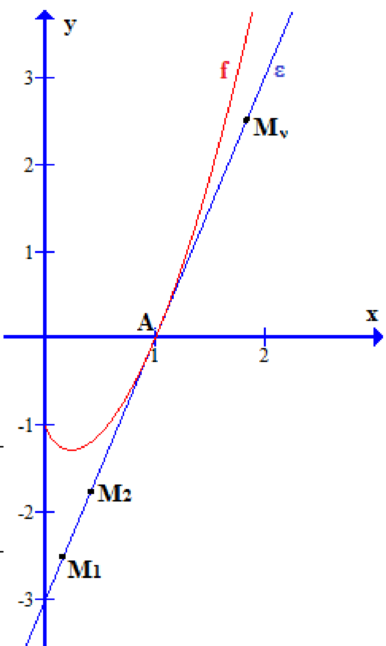
3. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=x_i+20\%\cdot x_i=1,2x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=1,2\bar{x}=$**9,6** και τυπική απόκλιση $s_y=1,2s_x=$**3,6**.

4. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=-5x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=-5\bar{x}=$ **–40** και τυπική απόκλιση $s_y=|-5|s_x=$**15**.

5. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=3x_i-7$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=3\bar{x}-7=$**17** και τυπική απόκλιση $s_y=3s_x=$**9**.

6. Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=-3x_i-2$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=-3\bar{x}-2=$ **–26** και τυπική απόκλιση $s_y=|-3|s_x=$**9**.

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x+x^2-1$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της στο x=1.
β) Αν $M(x_i,y_i)$ είναι ν σημεία της εφαπτομένης με μέση τιμή τετμημένων $\bar{x}=60$ και τυπική απόκλιση $s_x=20$, να βρείτε την μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων.



α) Η εφαπτομένη της f είναι ε:**y=λx+β** ή ε; **y=f '(1)x+β**.
Για x=1 έχουμε: $f(x)=1\ln1+1^2-1=0$. Άρα το σημείο επαφής είναι το Α(1,0), το οποίο ανήκει και στην εφαπτομένη.
$f'(x)=\ln x+x\dfrac{1}{x}+2x=\ln x+1+2x$, οπότε $\lambda=f'(1)0+1+2=3$ και η εφαπτομένη ε: **y=3x+β**.
Αφού το Α ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Άρα
0=3·1+β, άρα β=–3 και τελικά ε:**y=3x–3**.
β) Τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, …$M_\nu(x_\nu,y_\nu)$ ανήκουν στην εφαπτομένη. Άρα οι συντεταγμένες των θα την

επαληθεύουν. Δηλαδή $y_i=3x_i-3$.
Τώρα μπαίνει στο…παιχνίδι η στατιστική.
Έχουμε $\bar{y}=3\bar{x}-3=3\cdot 60-3=$**177**.

$s_y=3s_x=3\cdot 20=$**60**.

Για να έχετε μια εικόνα της άσκησης δείτε δίπλα την γραφική παράσταση.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ (C.V.)

Πολλοί είναι αυτοί που δεν καταλαβαίνουν τον συντελεστή μεταβολής.
Ας δούμε ένα παράδειγμα.
Μετράμε το βάρος των μαθητών ενός Λυκείου και βρίσκουμε μέση τιμή π.χ. 60 Kg και τυπική απόκλιση 2 Kg. Κάνουμε το ίδιο και σε έναν Παιδικό Σταθμό. Βρίσκουμε μέση τιμή π.χ. 20 Kg
και τυπική απόκλιση πάλι 2 Kg. Τα 2 Kg για τα...λεβεντόπαιδα του Λυκείου είναι αμελητέα ποσότητα, για τα νήπια όμως;;

Ακόμα ένα παράδειγμα:
Λέγεται ότι στις Ηνωμένες Πολιτείες οι μισθοί έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια (μικρό CV) από ότι στην Ελλάδα. Πράγματι στις ΗΠΑ οι εργάτες και οι υπάλληλοι έχουν ίδιες απολαβές (πάνω– κάτω), ενώ στην Ελλάδα έχουμε την γενιά των 600 ευρώ αλλά και τα golden boys με τους παχ(ο)υλούς μισθούς. Επιπλέον υπάρχει και η διαφορά του νομίσματος που κάνει δύσκολη τη σύγκριση.

Ο συντελεστής μεταβολής δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}\ \%}$

Παρατηρήσεις

1) Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται με ποσοστό.

2) Οι ποιοτικές κατανομές δεν έχουν συντελεστή μεταβολής.

3) Ο τύπος CV ισχύει και όταν η μέση τιμή είναι αρνητική.

4) Ο CV δεν έχει μονάδα μέτρησης (καθαρός αριθμός).

5) Δεν υπάρχει CV αν η μέση τιμή ισούται με το 0.

ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ

1) Ένα δείγμα είναι ομοιογενές όταν ο CV δεν ξεπερνάει το 10%.
2) Όταν όλες οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά σταθερό ποσό ο CV **ελαττώνεται**, αφού μεγαλώνει ο παρονομαστής και δεν αλλάζει ο αριθμητής **s**.

3) Όταν όλες οι παρατηρήσεις πολλαπλασιαστούν με έναν αριθμό **c** ο CV **δεν μεταβάλλεται**, γιατί πολλαπλασιάζονται με το **c** και οι δύο όροι του κλάσματος.
4) **Για να γίνει ένα δείγμα ομοιογενές** θα **προσθέσουμε** στις παρατηρήσεις τον ίδιο αριθμό, (δεν θα πολλαπλασιάσουμε!).
5) Ένα δείγμα Α παρουσιάζει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από ένα άλλο δείγμα Β, αν έχει **μικρότερο** CV.
6) Για θετικές παρατηρήσεις οποιουδήποτε δείγματος κανονικής κατανομής ισχύει CV< $\frac{1}{3}$, αφού υπάρχουν παρατηρήσεις μικρότερες του $\bar{x}-3s$ με $\bar{x}-3s>0$.

π.χ. Ένα δείγμα Α έχει $\bar{x}=-75$ και s=6, ενώ ένα δείγμα Β έχει $\bar{x}$=50 και s=6. Να βρείτε ποιο έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Έχουμε: $CV_A=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{6}{|-75|}=\frac{6}{75}$=0,08=**8%**.

$CV_B=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{6}{50}$=0,12=**12%**.

Το δείγμα Α παρουσιάζει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από το δείγμα Β, επειδή έχει μικρότερο CV.

π.χ. Αν για τη μέση τιμή και τη διακύμανση μιας μεταβλητής X ισχύει η σχέση $100s^2=4\bar{x}^2$ **(1)** να βρείτε:

i) Τον συντελεστή μεταβολής CV.

ii) Αν κάθε τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά 10% ποια θα είναι η νέα τιμή του συντελεστή μεταβολής;

iii) Αν κάθε τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά μια σταθερά c (c>0), να βρείτε τη σχέση που συνδέει τη μέση τιμή $\bar{x}$ με τη σταθερά c ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

i) Η σχέση (**1**) γράφεται: $\frac{s^2}{\bar{x}}=\frac{4}{100}$ ή $\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{10}=\frac{20}{100}=20\%$, δηλαδή CV=**20%**.

ii) Έστω x_i οι τιμές της μεταβλητής X και y_i οι νέες τιμές. Επειδή οι τιμές αυξάνονται κατά 10%, θα έχουμε: $y_i=x_i+10\%x_i$ = $x_i+0{,}1x_i$=$\mathbf{1{,}1x_i}$ (δηλαδή έχουμε τελικά πολλαπλασιασμό).

Άρα $\bar{y}$**=1,1**$\bar{x}$ και $\mathbf{s_y=1{,}1s_x}$**.**

Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι CV=$\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{\cancel{1{,}1}s_x}{\cancel{1{,}1}\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}$=**20%**. (Προσέξατε ότι δεν άλλαξε ο CV;).

iii) Έστω ότι οι τιμές x_i αυξάνονται κατά c. Τότε θα ισχύουν: $y_i=x_i+c$ και $s_y=s_x$, άρα

$\bar{y}=\bar{x}+c$ και $s_y=s_x$.

Επειδή το δείγμα πρέπει να είναι ομοιογενές θα έχουμε: CV<0,1 ή $\frac{s_y}{\bar{y}}<0,1$ ή

$\frac{s_x}{\bar{x}+c}<0,1$ ή

$s_x<0,1(\bar{x}+c)$ ή

$\frac{2\bar{x}}{10}<0,1(\bar{x}+c)$ και τελικά $\bar{x}<c$.

π.χ. Οι σημερινές ηλικίες ν φίλων έχουν $CV_1=5\%$, ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2=25\%$.

α. Ποια είναι η μέση ηλικία τους σήμερα;

β. Πριν πόσα χρόνια το δείγμα των ηλικιών τους ήταν ομοιογενές;

γ. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών τους σήμερα είναι 1604, να βρείτε το πλήθος ν των φίλων.

α. Έστω $x_1, x_2,\dots,x_\nu$ οι σημερινές ηλικίες και $\bar{x}$, s_x η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα. Πριν 16 χρόνια οι ηλικίες ήταν $y_1, y_2,\dots y_\nu$ και $\bar{y}$, sy η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα. Τότε θα ισχύουν: $\bar{y}=\bar{x}-16$ και $s_y=s_x$.

Σήμερα: $CV_1=\frac{s_x}{\bar{x}}=0,05$ (**1**)

Πριν 16 χρόνια: $CV_2=\frac{s_y}{\bar{y}}=0,25$ (**2**) ή

$\frac{s_x}{\bar{x}-16}=0,25$ ή

$\frac{0,05\bar{x}}{\bar{x}-16}=0,25$ λόγω (**1**), οπότε $\bar{x}=$**20**, και $s_x=$**1**.

β. Ο συντελεστής μεταβολής από 25% έγινε 5%. Άρα κάποια χρονιά το δείγμα έγινε ομοιογενές. Έστω ότι αυτό συνέβη πριν c χρόνια από σήμερα. Παρόμοια με το **α** ερώτημα θα ισχύουν: $\bar{y}=\bar{x}-c$ και $s_y=s_x$ με $\bar{x}=$**20**, και $s_x=$**1**.

Πρέπει $\frac{s_y}{\bar{y}}<0,1$ ή

$\frac{s_x}{\bar{x}-c}<0,1$ ή

$\frac{1}{20-c}<0,1$ και τελικά c=**10**.

γ. Επειδή δίνεται το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\bar{x}^2$ ή $1=\frac{1604}{\nu}-20^2$ ή **ν=4** (φίλοι).

π.χ. Η ευθεία ε: $y=4x+\nu+6$ είναι εφαπτομένη της $f(x)=3x^2-2x+19$ στο σημείο $M(s,\bar{x})$. Αν ν είναι
το πλήθος του δείγματος, να βρείτε τα s, $\bar{x}$ και ν. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Επειδή η ε είναι εφαπτομένη της f πρέπει: $f'(s)=4$ (**1**) και $f(s)=\bar{x}$ (**2**).
$f'(x)=6x-2$, άρα η (**1**) γίνεται: $6s-2=4$, οπότε **s=1**.
Από (**2**) έχουμε: $3s^2-2s+19=\bar{x}$ ή
$3\cdot1^2-2\cdot1+19=\bar{x}$ άρα $\bar{x}=20$.
Επειδή το σημείο Μ ανήκει και στην εφαπτομένη πρέπει $\bar{x}=4s+\nu+6$ ή
$20=4\cdot1+\nu+6$, άρα **ν=10**.

$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{20}=$**5%**, άρα είναι ομοιογενές.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

20. Η βαθμολογία μια ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών.

Βαθμολογία	Φοιτητές %
4	10
5	30
6	35
7	15
8	10

21. Οι χρόνοι που χρειάστηκαν κάποιοι μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το μέσο χρόνο λύσης του προβλήματος.

Χρόνος	Μαθητές
[0 , 4)	12
[4 , 8)	15
[8 , 12)	13

22. Οι χρόνοι που κάνουν οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι από 4 έως 20 λεπτά. Το 20 % κάνει χρόνους κάτω από 8 λεπτά, το 50 % κάνει χρόνους κάτω από 12 λεπτά, ενώ το 15 % κάνει, τουλάχιστον, 16 λεπτά. Να βρείτε το μέσο χρόνο των μαθητών.

23. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η βαθμολογία 20 φοιτητών σε ένα μάθημα. Να βρείτε τα α, β αν η μέση βαθμολογία είναι 5,9 .

Βαθμολογία	Φοιτητές %
4	2
5	α
6	8
8	β

24. Μια βιοτεχνία έχει 10 εργαζόμενους με μέσο μηνιαίο μισθό 1200 € .

Α. Να βρείτε το μέσο μισθό όταν:

α. ένας εργαζόμενος με 1200 € μισθό πάρει σύνταξη.

β. προσληφθούν δύο εργαζόμενοι ακόμη, με μισθό 850 € ο καθένας.

γ. πάρει σύνταξη ένας με μισθό 1190 € και προσληφθούν τρεις με μισθό 850 € ο καθένας.

Β. Αν προσληφθεί ένας εργαζόμενος, ποιος πρέπει να είναι ο μηνιαίος μισθός του, ώστε ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων να είναι 1210 € ;

25. Σε 20 παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ βρήκαμε μέση τιμή $\overline{X}=60$. Διαπιστώθηκε όμως στο τέλος ότι οι 10 παρατηρήσεις είχαν εσφαλμένα υπερεκτιμηθεί κατά 5 μονάδες καθεμία, ενώ οι 9 από τις υπόλοιπες είχαν υποεκτιμηθεί κατά 10 μονάδες καθεμία. Να βρείτε τη σωστή μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών.

26. Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6 καθεμία, τότε να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

27. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και άγνωστο αριθμό κοριτσιών. Σε ένα διαγώνισμα, η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών ήταν 14, ενώ των κοριτσιών ήταν 14,875 . Αν η μέση τιμή των βαθμών όλων των παιδιών ήταν 14,5 , τότε να βρεθεί το πλήθος των κοριτσιών.

28. Σε μια επιχείρηση είναι 50 εργαζόμενοι στα τμήματα Α και Β. Οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α πήραν αύξηση στο μηνιαίο μισθό 100 € ο καθένας, ενώ στο τμήμα Β πήραν αύξηση 50 € καθένας. Αν η μέση τιμή όλων των μηνιαίων μισθών αυξήθηκε κατά 70 € , τότε να βρείτε πόσοι είναι οι εργαζόμενοι του κάθε τμήματος.

29. Σε μια εταιρεία οι 200 υπάλληλοι έχουν μέσο μισθό 2500 € .

α. Το 20 % των υπαλλήλων έχει μέσο μισθό 1800 € . Αν ο μισθός αυτών των υπαλλήλων αυξηθεί, ώστε να γίνει ίσος με τη μέση τιμή, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή του μισθού;

β. Για λόγους μείωσης του κόστους, απολύεται το 15 % των υπαλλήλων της εταιρείας. Οι υπάλληλοι αυτοί έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 2800 €. Να βρεθεί η νέα μέση τιμή του μισθού.

γ. Αν σε όλους τους υπαλλήλους δοθεί αύξηση 3,5 % , ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των μισθών;

30. Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων από αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.

31. Αν 22 παρατηρήσεις x_i έχουν $\overline{X} = 62$ και οι μισές υπερεκτιμήθηκαν κατά 6 , ενώ οι άλλες μισές υποεκτιμήθηκαν κατά 11 , τότε να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή τους.

32. Σε ένα Λύκειο, τα τρία τμήματα της Α΄ τάξης έχουν: το πρώτο 25 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,5 , το δεύτερο 27 μαθητές και μέση βαθμολογία 18,2 , ενώ το τρίτο 23 μαθητές και μέση βαθμολογία 17,1 . Να βρεθεί η μέση βαθμολογία του συνόλου των μαθητών της Α΄ τάξης.

33. Ο μέσος όρος βαθμολογίας 1ου τετραμήνου 20 μαθητών ενός τμήματος στατιστικής είναι 14,4 . Επειδή, συγκριτικά με τους μέσους όρους άλλων μαθημάτων, η βαθμολογία θεωρήθηκε χαμηλή, ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει μια μονάδα σε όλους τους μαθητές, εκτός από δύο μαθητές που είχαν εικοσάρια. Ποια είναι τώρα η νέα μέση τιμή της βαθμολογίας;

34. Οι αριθμοί α, β, 17, γ, οι οποίοι έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, αφορούν στη βαθμολογία ενός μαθητή σε τέσσερα διαγωνίσματα. Δίνεται ότι το εύρος των βαθμών είναι 2 , η διάμεσος και η μέση τιμή 16 .

α. Να βρείτε του βαθμούς του μαθητή.

β. Αν οι συντελεστές βαρύτητας των βαθμών είναι 0,5 , 0,7 , 1 και 0,8 , αντίστοιχα, τότε να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή.

35. **α.** Ένα εργοστάσιο απασχολεί 5 υπαλλήλους στο τμήμα Α με μέσο μηνιαίο μισθό 2490 € , 6 υπαλλήλους στο τμήμα Β με μέσο μηνιαίο μισθό 2800 € και 4 υπαλλήλους στο τμήμα Γ με μέσο μηνιαίο μισθό 3600 € . Να βρεθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός όλων των υπαλλήλων.

β. Αν προσληφθούν 2 ακόμη υπάλληλοι στο τμήμα Α, 4 στο τμήμα Γ και οι μέσες τιμές των μισθών στα δύο αυτά τμήματα δε μεταβληθούν, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

36. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων t_1 , t_2 , ... , t_ν μια μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν είναι $\overline{X}$. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων:

α. $t_1 + \lambda,\ t_2 + \lambda, \ldots, t_\nu + \lambda$

β. $t_1 - \lambda, t_2 - \lambda, \ldots, t_\nu - \lambda$

γ. $\lambda t_1, \lambda t_2, \ldots, \lambda t_\nu$

δ. $\frac{t_1}{\lambda}, \frac{t_2}{\lambda}, \ldots, \frac{t_\nu}{\lambda}\quad (\lambda \neq 0)$

ε. $\lambda t_1 + \kappa, \lambda t_2 + \kappa, \ldots, \lambda t_\nu + \kappa$

37. Μια ομάδα 15 ατόμων έχουν μέσο βάρος 50,4 kg.

α. Αν φύγει ένα άτομο και ο μέσος όρος βάρους παραμείνει ο ίδιος, τότε πόσα kg ήταν το βάρος του ατόμου που έφυγε;

β. Αν έρθει ένα άτομο ακόμη και ανεβάσει το μέσο όρο βάρους στα 51 kg , τότε πόσο ζυγίζει το νέο άτομο;

38. Σε ένα Λύκειο, φοιτούν 300 μαθητές και η μέση τιμή βαθμολογίας τους στα Μαθηματικά, στο Α΄ τετράμηνο ήταν 15 . Στο Β΄ τετράμηνο, ένας ορισμένος αριθμός μαθητών αύξησε τη βαθμολογία του κατά 4 μονάδες ο καθένας, ενώ οι υπόλοιποι μείωσαν τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες, κάθε μαθητής. Να βρείτε πόσοι μαθητές βελτίωσαν τη βαθμολογία τους και πόσοι τη χειροτέρευσαν, αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία όλων στο Β΄ τετράμηνο έγινε 17 .

39. Αν είναι $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ και $\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2 = 23$, τότε να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $\sum_{i=1}^{5}(x_i + 10)$ **β.** $\sum_{i=1}^{5}(2x_i + 3)^2$

40. Να υπολογίσετε το πλήθος ν των παρατηρήσεων $x_1 = \ln 2$, $x_2 = \ln\frac{3}{2}$, $x_3 = \ln\frac{4}{3}$, ... , $x_\nu = \ln\frac{\nu+1}{\nu}$, αν η μέση τιμή τους είναι $\overline{X} = \frac{\ln 2004}{\nu}$.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

41. Να βρείτε τη διάμεσο στα δείγματα:

α. –2, 0, 2, 4, 3, 10, 12 **β.** 3, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 18

42. Να βρείτε τη διάμεσο των χρόνων (σε min) που χρειάστηκαν, για να λύσουν ένα πρόβλημα, οι φοιτητές τεσσάρων τμημάτων μιας σχολής, όπως αυτοί φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

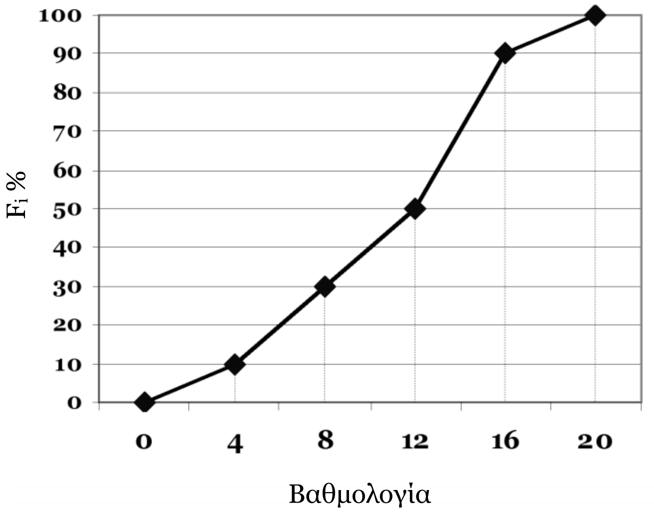
Πίνακας 1	
Χρόνος	Φοιτητές
8	5
9	7
10	8
11	7

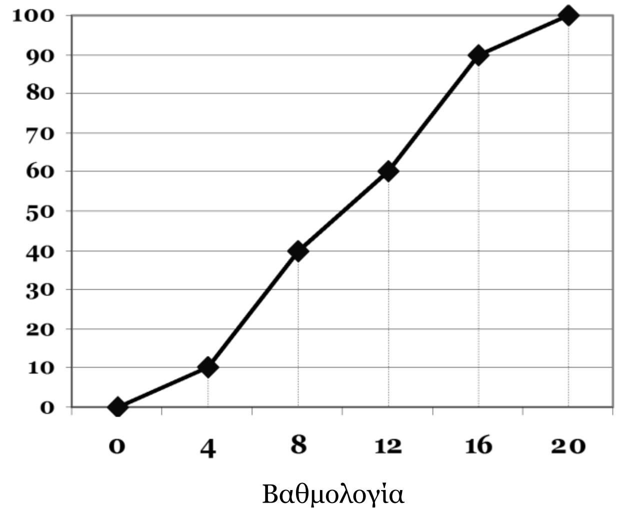
Πίνακας 2	
Χρόνος	Φοιτητές
8	7
9	6
10	10
11	3

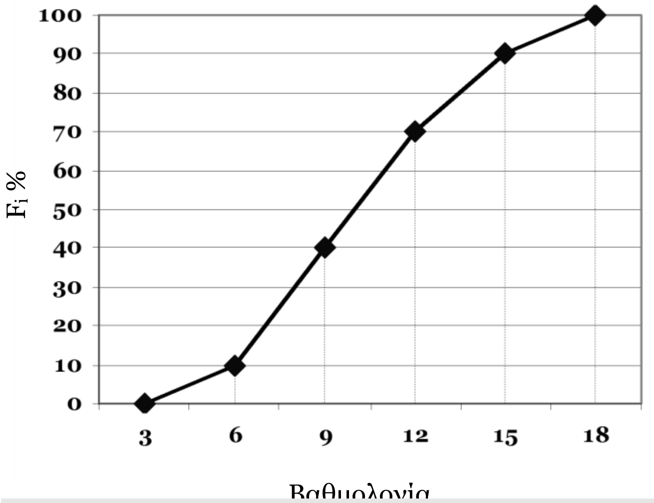
Πίνακας 3	
Χρόνος	Φοιτητές
8	30
9	25
10	35
11	10

Πίνακας 4	
Χρόνος	Φοιτητές
8	30
9	20
10	40
11	10

43. Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμολογιών, σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα, όπου δίνονται τα πολύγωνα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.







44. Αν η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ , με $0 < \delta < 5$ και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι: 0, 1, 5, 21 , τότε να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.

45. Στον παρακάτω πίνακα, φαίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με τις αντίστοιχες αθροιστικές σχετικές συχνότητές τους. Να βρείτε τους α, β, γ, αν η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή 5,5 .

x_i	F_i %
2	10
3	30
5	α

7	β
9	γ

46. Η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6 . Αν ο ένας από τους αριθμούς αλλάξει, τότε η διάμεσος γίνεται 7 . Ποιος είναι ο αριθμός που άλλαξε;

47. Ο διάμεσος βαθμός σε τρία τεστ είναι 90 , ο μέσος βαθμός 92 και το εύρος 6 . Να βρεθούν οι τρεις βαθμοί.

48. Σε ένα τεστ πήραν μέρος 100 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0 , αναλόγως αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	ν_i
[60 , 80)	5
[80 , 100)	20
[100 , 120)	26
[120 , 140)	30
[140 , 160)	15
[160 , 180)	4

α. Να κάνετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων.

β. Να εκτιμήσετε γραφικά τη διάμεσο.

γ. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών, που έγραψαν από 80 έως 110 .

49. Αν οι παρατηρήσεις του δείγματος: 4, 8, 3, α, $\overline{X}$, $24 - 2\overline{X}$, 5 έχουν $\delta = 8$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{X}$, καθώς και το α.

50. Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Υποθέτουμε ότι κανένας μαθητής δεν έχει ανάστημα μικρότερο των 160 cm. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του δείγματος δεν υπερβαίνει τα 180 cm.

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

51. Οι ελάχιστες θερμοκρασίες σε μια πόλη για πέντε συνεχείς ημέρες ήταν: $-5, -3, 0, -3, 1$. Να βρείτε το εύρος, τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

52. Η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε το εύρος, τη διασπορά και την τυπική απόκλιση.

Βαθμολογία	Φοιτητές
5	4
6	5
7	10
8	1

53. Οι χρόνοι αναμονής 20 μαθητών, σε μια στάση λεωφορείων, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

Χρόνος	Μαθητές
$[1,3)$	6
$[3,5)$	8
$[5,7)$	4
$[7,9)$	2

54. Ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 35$ έχει μέση τιμή $\overline{X}$ και τυπική απόκλιση s. Παίρνουμε τη μέση τιμή ως μία νέα τιμή της μεταβλητής και δημιουργούμε ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 36$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του νέου δείγματος.

55. Έστω t_1 , t_2 , ... , t_{100} οι τιμές μια μεταβλητής. Οι πρώτες 20 παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\overline{x}_1 = 10$, με τυπική απόκλιση $s_1 = 2$, ενώ οι υπόλοιποες έχουν μέση τιμή $\overline{x}_2 = 20$ και τυπική απόκλιση $s_2 = 5$. Να βρείτε:

α. τη μέση τιμή του συνόλου.

β. την τυπική απόκλιση s του συνόλου.

56. Ρωτήθηκαν 40 μαθητές ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία έχουν διαβάσει. Οι απαντήσεις κυμαίνονταν από 0 έως και 20 . Οκτώ μαθητές απάντησαν κάτω από 4 , είκοσι μαθητές κάτω από 8 , τέσσερις μαθητές πάνω από 16 και δέκα μαθητές πάνω από 12 .

α. Να παραστήσετε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

β. Να υπολογίσετε μέση τιμή, διάμεσο και τυπική απόκλιση.

γ. Αν για τους 2 που διαβάζουν ποιο πολύ, τους δοθεί μια λογοτεχνική σειρά δωρεάν, τότε πόσα τουλάχιστον βιβλία πρέπει να έχει διαβάσει κάποιος, ώστε να κερδίσει;

57. Η μέση τιμή και η διακύμανση των 20 τιμών ενός δείγματος είναι $\overline{X}=6$ και $s^2 = 4$, αντίστοιχα. Αν για τις δεκαεννέα τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{19}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=79$, τότε να βρεθεί η εικοστή τιμή.

58. Αν για ένα σύνολο παρατηρήσεων ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{v}{x_i}^2=88$, $s=\sqrt{7}$, $\overline{X}=2$, τότε να βρεθεί το ν.

59. Η μέση τιμή και η διασπορά των 7 τιμών ενός δείγματος είναι $\overline{x}=15$ και $s^2 = 16$. Αν ισχύει:

$$\left(t_1-\overline{x}\right)^2+\left(t_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(t_6-\overline{x}\right)^2=12$$

να βρεθεί η τιμή t_7 .

60. Η τυπική απόκλιση μιας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν. Αν t_1 , t_2 , ... , t_v είναι οι τιμές της x_i και $\overline{x}$ η μέση της τιμή, τότε να δείξετε ότι:

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_v = \overline{x}$$

61. Θεωρούμε α_1 το πλήθος αριθμών, που έχουν διακύμανση ${s_1}^2$ και μέση τιμή $\overline{x}$. Όμοια, θεωρούμε α_2 το πλήθος αριθμών που έχουν διακύμανση ${s_2}^2$ και την ίδια μέση τιμή $\overline{x}$. Να αποδείξετε ότι:

α. η μέση τιμή των $\alpha_1 + \alpha_2$ αριθμών είναι $\bar{x}$.

β. η διακύμανση s^2 των $\alpha_1 + \alpha_2$ είναι $s^2 = \dfrac{\alpha_1 s_1{}^2 + \alpha_2 s_2{}^2}{\alpha^1 + \alpha_2}$.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

62. Σε ένα δείγμα ισχύει ότι $\bar{x} + 4s = 0$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.

63. Ένα σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$. Αν $\sum\limits_{i=1}^{10}(\ell_i - 2)^2 = 90$, τότε να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{10}$.

64. Οι βαθμοί των μαθητών ενός τμήματος έχουν μέση τιμή 12 και CV = 0,25 . Αν $\sum\limits_{i=1}^{\nu} x_i{}^2 = 3060$ πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

65. Στον παρακάτω πίνακα, δίνεται η κατανομή της ηλικίας ενός δείγματος ατόμων μιας πόλης.

Ηλικία	Συχνότητα
0 - 20	18
20 - 40	24
40 - 60	30
60 - 80	36
80 - 100	12

Να βρείτε:

α. τη διάμεσο και τη μέση τιμή.

β. το πλήθος των ατόμων, που έχει ηλικία κάτω από 36 έτη.

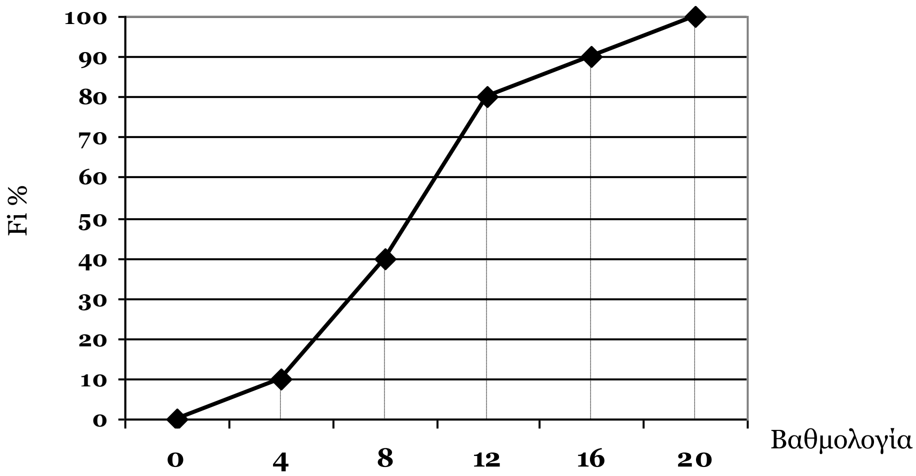
γ. την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

66. Στο παρακάτω διάγραμμα, δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας μιας ομάδας μαθητών σε ένα μάθημα. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 0 έως 20 . Δίνεται ότι 20 μαθητές έχουν βαθμό μικρότερο του 6 .

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 80 .

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

γ. Να εξέτασετε αν το δείγμα των 80 μαθητών είναι ομοιογενές ως προς τη βαθμολογία.



67. Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων:

x_i	v_i
0	6
1	κ
2	6
3	6
4	8

α. Αν η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 2$, τότε να δείξετε ότι $\kappa = 10$.

β. Να βρείτε την τυπική αποκλίση της κατανομής.

γ. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας.

δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή c , κατά την οποία πρέπει να αυθηθούν οι παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

68. Σε μια εταιρεία, ο μηνιαίος μισθός των εργατών είναι 750 ευρώ, ενώ των στελεχών είναι 1100 ευρώ.

Α. Αν οι εργάτες είναι τετραπλάσιοι σε αριθμό από τα στελέχη, τότε να βρείτε το μέσο μισθό των υπαλλήλων (εργατών και στελεχών) της εταιρείας.

Β. Θεωρούμε ότι η εταιρεία έχει ν υπαλλήλους, με μισθούς x_i , όπου i = 1, 2, … , ν .

α. Αν η τυπική απόκλιση των μισθών είναι 140 ευρώ και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 34.600.000 ευρώ, τότε να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που απασχολεί η εταιρεία.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους μισθούς των υπαλλήλων.

γ. Η εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει κατά α ευρώ τους μισθούς των εργατών έτσι, ώστε ο νέος μισθός των υπαλλήλων να μην υπερβαίνει τα 900 ευρώ. Να βρείτε τη μέγιστη αύξηση, που μπορεί να κάνει η εταιρεία.

69. Η Γ΄ τάξη ενός Λυκείου έχει δύο τμήματα Α και Β. Το τμήμα Α έχει 18 μαθητές και το τμήμα Β έχει 22 μαθητές. Σε ένα κοινό διαγώνισμα, η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών του τμήματος Α είναι $s_\alpha = 2{,}5$ και του τμήματος Β είναι $s_\beta = 1{,}5$, ενώ η μέση βαθμολογία των δύο τμημάτων είναι ίδια.

α. Από τις βαθμολογίες των δύο τμημάτων, ποια έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια;

β. Να βρείτε την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας όλων των μαθητών της τάξης αυτής.

70. Θεωρούμε το δείγμα α, β, γ, δ, με $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$. Ονομάζουμε μ τον αριθμητικό μέσο του δείγματος, Μ το σταθμικό μέσο με αντίστοιχους συντελεστές στάθμισης 0,1α , 0,1β , 0,1γ , 0,1δ και s την τυπική απόκλιση του δείγματος. Αν $\mu \cdot M = 21$ και $21 - s^2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, τότε να βρείτε τα μ, s, CV .

$Y = cX + c'$

71. Έστω ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων x_i έχει μέση τιμή $\bar{x} = 3$, διάμεσο δ = 4 και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	$y_i = x_i + 1$	$y_i = -2x_i$	$y_i = -2x_i + 1$
$\bar{y}$			
δ_y			
s_y			
CV_y			

73. Η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων x_1 , x_2 , … , x_ν είναι αντίστοιχα 8 και 10 . Να βρείτε τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων $-6x_1 + 4$, $-6x_2 + 4$, … , $-6x_\nu + 4$.

74. Οι παρατηρήσεις x_1 , x_2 , … , x_ν ενός δείγματος μεγέθους ν έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 3$ και διασπορά $s^2 = 4$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των παρατηρήσεων y_1 , y_2 , … , y_ν που προκύπτουν από τις x_1 , x_2 , … , x_ν αν:

α. προσθέσουμε σε καθεμία το 1 και πολλαπλασιάσουμε καθεμία με το –2 .

β. αυξήσουμε καθεμία κατά 10 % .

γ. ελαττώσουμε καθεμία κατά 20 % και μετά προσθέσουμε το 1,6 .

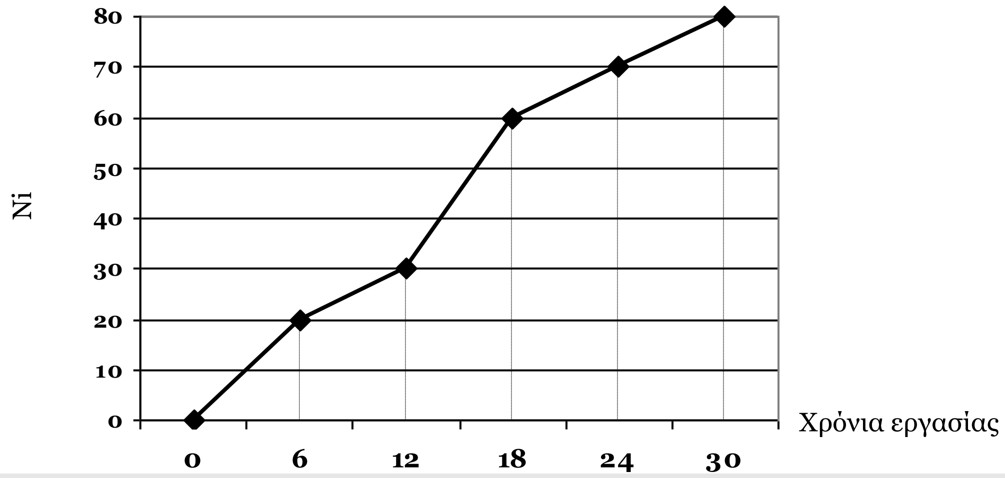
75. Έστω ευθεία (ε) : $y = -3x + 2$ και τα σημεία της A_1 , A_2 , … , A_9 με τετμημένες x_1 , x_2 , … , x_9 , οι οποίες έχουν μέση τιμή –8 και τυπική απόκλιση 2 . Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων A_1 , A_2 , … , A_9 .

76. Έστω x_1 , x_2 , … , x_ν οι παρατηρήσεις ενός δείγματος, που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4 . Να βρείτε πόσες μονάδες, τουλάχιστον, πρέπει να αυξήσουμε την καθεμία από τις παρατηρήσεις αυτές, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

77. Μια τάξη έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών, ύστερα από 3 χρονια.

78. Σε ένα εργοστάσιο, ένα δείγμα εργαζόμενων στο τμήμα Α έχει μέσο (μηνιαίο) μισθό 950 € και τυπική απόκλιση 100 € ενώ, ένα άλλο δείγμα, στο τμήμα Β έχει μέσο (μηνιαίο) μισθό 1080 € και τυπική απόκλιση 120 € . Έστω ότι οι εργαζόμενοι στο τμήμα Α θα πάρουν αύξηση 50 € , ενώ στο τμήμα Β θα πάρουν αύξηση 5 % . Στους νέους μισθούς, να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα τιμών έχει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια, όπως επίση αν αυτό το ίδιο είναι ομοιογενές.

79. Τα χρόνια εργασίας, ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο, σχηματίζουν το παρακάτω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε τη διάμεσο, τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας, ύστερα από 5 χρόνια.



80. Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών, ενός δείγματος, είναι $\bar{x} = 80$ και CV = 25 % . Αν για τις εννέα τιμές ισχύει $\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \bar{x}\right)_2 = 3975$, τότε να βρείτε:

α. τη δέκατη τιμή.

β. πόσες μονάδες, τουλάχιστον, πρέπει να αυξηθούν οι τιμές τους δείγματος, ώστε να γίνει ομοιογενές.

81. Μια βιομηχανία συσκευάζει γάλα σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά 10 %, 20 %, 30 % και 40 % με αντίστοιχα κόστη 8, 6, 4 και 2 ευρώ ανά κουτί.

α. Να βρεθεί το μέσο κόστος, ανά κουτί, και η τυπική απόκλιση.

β. Αν αυξηθεί το κόστος κατά 10 % , τότε να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση.

82. Οι σημερινές ηλικίες, κάποιων ατόμων, έχουν $CV_1 = 0{,}05$, ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2 = 25\ \%$.

α. Να βρεθεί η σημερινή μέση τους ηλικία.

β. Πριν πόσα χρόνια, από σήμερα, το δείγμα των ηλικιών τους ήταν για πρώτη φορά ομογενές;

γ. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών τους είναι 1604 , τότε να βρεθεί το πλήθος των ατόμων.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

83. Η βαθμολογία 200 μαθητών, σε ένα διαγώνισμα, είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό, το πολύ, 12 και 5 μαθητές, τουλάχιστον, 16 . Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 και να εξετάσετε αν το δείγμα των βαθμών τους είναι ομοιογενές.

84. Τα νούμερα των παπουτσιών, ενός δείγματος 400 ατόμων, ακολουθούν περίπουν την κανονική κατανομή. Δέκα άτομα φοράνε παπούτσια με νούμερο, τουλάχιστον, 43 και 64 άτομα, το πολύ, 37 . Να βρείτε πόσα άτομα φοράνε παπούτσια από νούμερο 37 έως 43 .

85. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 16 % των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10 και το 50 % μεγαλύτερες του 12 , τότε να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος των παρατηρήσεων.

86. Οι παρατηρήσεις, μιας μεταβλητής Χ μεγέθους 800, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Είκοσι παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 18 και 128 μεγαλύτερες του 36 .

α. Να βρείτε, κατά προσέγγιση, το εύρος του δείγματος.

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

87. Έστω μεταβλητή Χ, η οποία παίρνει θετικές τιμές και η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με εύρος περίπου $R = 36$ και $CV = 20\ \%$.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

β. Να υπολογίσετε το ποσοστό των ατόμων, που η τιμή τους είναι μεταξύ 24 και 42 .

γ. Να αποδείξετε ότι αν οι τιμές της X αυξηθούν κατά $\omega > 0$, τότε ο CV θα μειωθεί.

δ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ω, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

88. Ένα δείγμα έχει μέγεθος $\nu = 10$ και η μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν $\sum_{i=1}^{10} x_i = 2{,}4$ και $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4{,}86$ τότε να βρείτε το συντελεστή CV.

89. Η διάρκεια ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός δείγματος 8000 ηλεκτρικών συσκευών, που παράγει μια μηχανή όταν λειτουργεί κανονικά, ακολουθεί την κανονική ή περίπου κατανομή κατανομή. Η διάμεσος του δείγματος είναι 20 , ενώ 200 ηλεκτρικές συσκευές έχουν διάρκεια ζωής, τουλάχιστον, 22 .

α. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

β. Να υπολογίσετε το πλήθος των ηλεκτρικών συσκευών του δείγματος, που έχουν διάρκεια ζωής από 19 έως 23 .

γ. Θεωρούμε μια συσκευή ελαττωματική όταν έχει διάρκεια ζωής κάτω από 17 . Αν στο δείγμα βρέθηκαν 15 ηλεκτρικές συσκευές, που έχουν διάρκεια ζωής κάτω από 17 , τότε να εξετάσετε αν έχει βλάβη η μηχανή που τις παράγει.

90. Ένα μηχάνημα κατασκευάζει βίδες. Όταν το μηχάνημα λειτουργεί σωστά, η κατανομή συχνοτήτων των βιδών, ως προς το μήκος τους, είναι κανονική με μέση τιμή $\bar{x}$ (σε cm) και τυπική απόκλιση s (σε cm). Γνωρίζουμε, επίσης, ότι 95 % περίπου των βιδών, που κατασκευάζει το παραπάνω μηχάνημα, έχουν μήκος μεταξύ 5,6 και 6,4 cm.

α. Να υπολογίσετε το μέσο μήκος των βιδών, την τυπική απόκλιση μήκους, καθώς και το εύρος της κατανομής.

β. Να βρείτε το ποσοστό των βιδών, που έχει μήκος μεταξύ 5,8 και 6 cm.

γ. Αν μια βίδα έχει μήκος μικρότερο ή ίσο των 5,4 cm ή μεγαλύτερο ή ίσο των 6,6 cm, τότε θεωρείται ελαττωματική. Να βρείτε το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών.

δ. Σε ποιοτικό έλεγχο 10.000 βιδών, που κατασκευάζει το μηχάνημα, 45 βίδες βρίσκονται ελαττωματικές. Η πρόταση: "Το μηχάνημα παρουσιάζει πρόβλημα λειτουργίας" είναι Σωστή ή Λανθασμένη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.