ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3.1

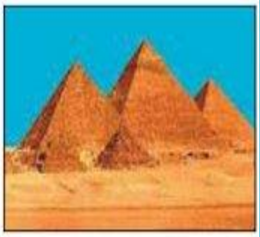
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

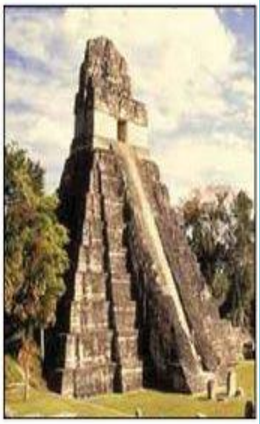
Το

19Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

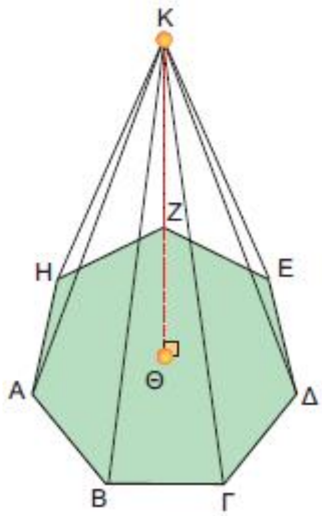




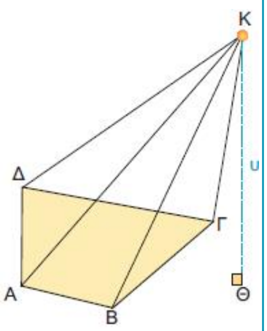
Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι έκτιζαν μνημεία με τη μορφή πυραμίδας.
Οι τάφοι των βασιλέων της αρχαίας Αιγύπτου είχαν τη γνωστή σ' εμάς μορφή της πυραμίδας.
Οι Αζτέκοι και οι Ίνκας είχαν χτίσει, επίσης, ναούς στο σχήμα πυραμίδας, αρκετοί από τους οποίους σώζονται μέχρι σήμερα.
Στην είσοδο του μουσείου του Λούβρου, στο Παρίσι, υπάρχει μια σύγχρονη πυραμίδα που σχεδιάστηκε το 1989 από τον αρχιτέκτονα Γιέο Μιγκ Πέι.

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

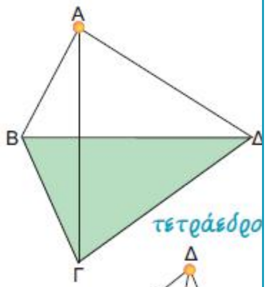
Για παράδειγμα, μια πυραμίδα με μια έδρα το επτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

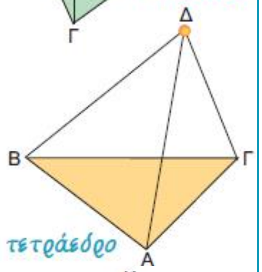


Τα στοιχεία της πυραμίδας



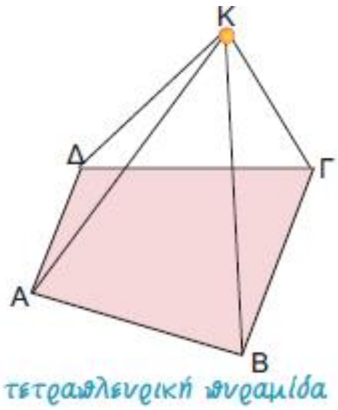
- Το πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ λέγεται **βάση** της πυραμίδας.
- Τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το σημείο Κ: ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΗ και ΚΗΑ λέγονται **παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας.
- Το κοινό σημείο Κ των παράπλευρων εδρών λέγεται **κορυφή** της πυραμίδας.
- Αν από την κορυφή Κ φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΚΘ προς τη βάση, τότε το ΚΘ λέγεται **ύψος** της πυραμίδας. Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας.
- Μια πυραμίδα που έχει ως βάση ένα τρίγωνο, λέγεται **τριγωνική πυραμίδα**. Επειδή όμως η τριγωνική πυραμίδα έχει τέσσερις

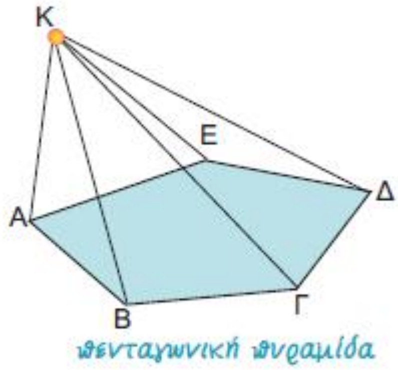


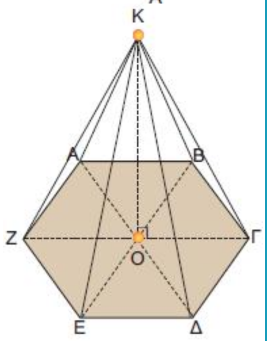


τριγωνικές έδρες και οποιαδήποτε έδρα της μπορεί να θεωρηθεί ως βάση, τη λέμε και **τετράεδρο**.

- Μια πυραμίδα που έχει βάση τετράπλευρο λέγεται **τετραπλευρική**.
- Μια πυραμίδα που έχει βάση πεντάγωνο λέγεται **πενταγωνική** κ.ο.κ.

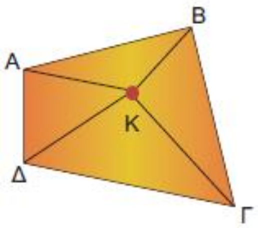






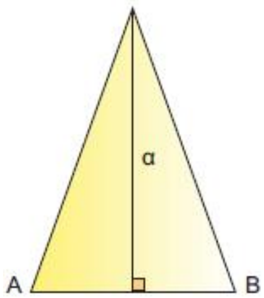
Κανονική πυραμίδα

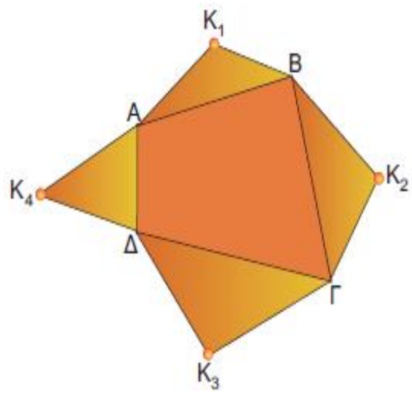
- Μια πυραμίδα λέγεται κανονική, αν η βάση της είναι **κανονικό** πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το κέντρο του κανονικού πολυγώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα (ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ, ΚΕΖ, ΚΖΑ).
Αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες μίας πυραμίδας είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

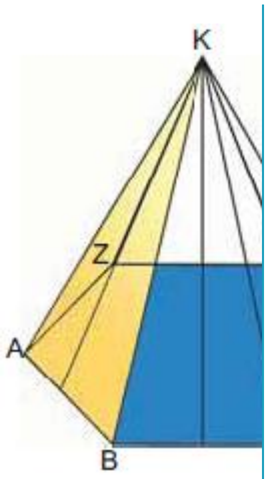


Εμβαδόν επιφάνειας πυραμίδας

Η ολική επιφάνεια της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την επιφάνεια της βάσης της. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας E_{Π} μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδόν κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά.







Επομένως, στο διπλανό σχήμα έχουμε:
$E_Π = (K_1AB) + (K_2BΓ) + (K_3ΓΔ) + (K_4ΔA)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{ολ}$ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδόν της βάσης $E_β$.

$$E_{ολ} = E_Π + E_β$$

Στο προηγούμενο σχήμα έχουμε ότι:
$E_{ολ} = E_π + E_β = (K_1AB) + (K_2BΓ) + (K_3ΓΔ) + (K_4ΔA) + (ABΓΔ)$.

Εμβαδόν επιφάνειας κανονικής πυραμίδας

Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται **απόστημα** της κανονικής πυραμίδας.

Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας:
$E_Π=(KAB) + (KBΓ) + (KΓΔ) + (KΔE) + (KEZ) + (KZA) = 6(KAB)$
Άρα: $E_Π = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot α = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot AB) \cdot α$.

Όμως, η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου ισούται με 6 • AB.
Τελικά, καταλήγουμε ότι:
$E_Π = \frac{1}{2}$ (περίμετρος εξαγώνου) · απόστημα.

Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τελικά για κάθε κανονική πυραμίδα:

$$E_Π = \frac{1}{2}\,(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot \text{απόστημα}$$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας, αρκεί να προσθέσουμε στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας $E_Π$ και το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου, που αποτελεί τη βάση της κανονικής πυραμίδας.

Όγκος πυραμίδας

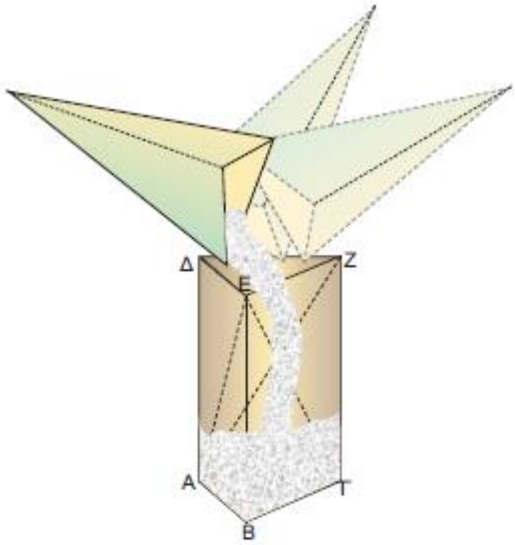
Κατασκευάζουμε με χαρτόνι ένα πρίσμα και μια πυραμίδα, έτσι ώστε να έχουν βάσεις ίσα τρίγωνα και ίσα ύψη. Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με αλεύρι την πυραμίδα και αδειάσουμε το αλεύρι μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως. Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικότερα.

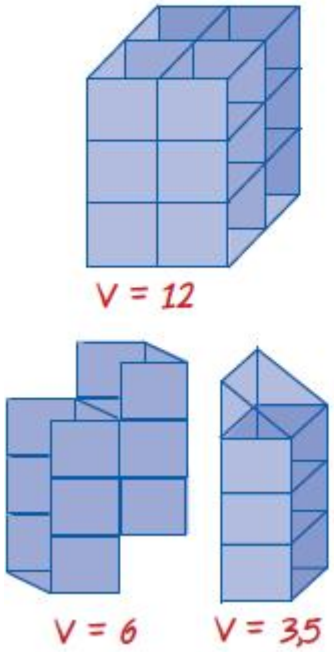
Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος.

Ο όγκος V της πυραμίδας ισούται με:

$$V = \frac{1}{3}\ (\text{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει για τον όγκο μιας πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο.





Η έννοια του όγκου

Ας θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα Σ και έναν κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα. Ο θετικός αριθμός που δηλώνει με πόσες επαναλήψεις του κύβου ή μέρους του κύβου σχηματίζεται το στερεό σώμα Σ, λέγεται **όγκος** του σώματος.

Μονάδες μέτρησης όγκου

Ως μονάδα μέτρησης όγκου θεωρούμε έναν κύβο με ακμή μήκους 1 μέτρο (m).
Ο όγκος του ισούται με 1 κυβικό μέτρο (m^3).

Οι κυριότερες υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) Το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) που είναι όγκος κύβου με ακ
Αφού 1m =10 dm, θα ισχύει ότι:
$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 1000\ dm^3$.
Αντίστροφα ισχύει ότι:
$1\ dm^3 = \frac{1}{1000} m^3 = 0{,}001\ m^3$.

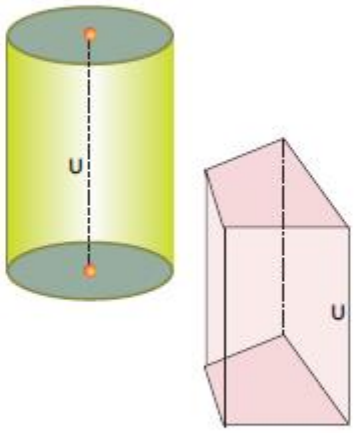
β) Το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) που είναι όγκος κύβου με
Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm, οπότε
$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3$.
Αντίστροφα ισχύει ότι:
$1\ cm^3 = \frac{1}{1000} dm^3 = \frac{1}{1000000} m^3$.

γ) Το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3) που είναι όγκος κύβου με
Ισχύει ότι 1 m = 10 dm = 100 cm= 1000 mm,
οπότε $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 100^3\ cm^3 = 1000^3\ mm^3$.
Αντίστροφα ισχύει ότι:
$1\ mm^3 = \frac{1}{1000} cm^3 = \frac{1}{1000000} dm^3 = \frac{1}{1000000000} m^3$

Στον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να ονομάζουμε το dm^3 ως λίτρο (ℓ). Τότε, το cm^3 λέγεται χιλιοστόλιτρο (mℓ).

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

Ας θεωρήσουμε μια σύριγγα γεμάτη χρωματισμένο νερό. Ασκώντας πίεση, το έμβολο διαγράφει το μήκος της σύριγγας



έως ότου αδειάσει όλο το νερό.
Είναι φανερό ότι το νερό έχει όγκο ίσο με τον όγκο της κυλινδρικής σύριγγας.
Ο όγκος της σύριγγας διαγράφεται από την κίνηση του εμβαδού του εμβόλου σε όλο το μήκος της.

Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού δηλαδή:

Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) • (ύψος)

Είναι φανερό ότι το ίδιο θα ισχύει, αν στη θέση της κυλινδρικής σύριγγας έχουμε ένα οποιοδήποτε πρίσμα.

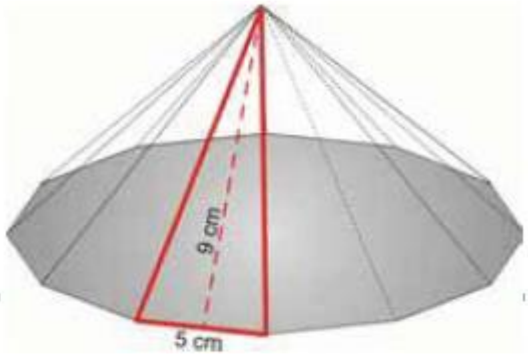
Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού δηλαδή:

Όγκος = (Εμβαδόν βάσης) • (ύψος)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1

Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση κανονικό δωδεκάγωνο με πλευρά 5 cm. Αν το ύψος μιας παράπλευρης έδρας της είναι 9 cm, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.



Λύση: Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι:

$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot$ (περίμετρος βάσης) $\cdot$ (απόστημα).

Η περίμετρος της βάσης είναι: $12 \cdot 5 = 60$ (cm) και το απόστημα 9 cm.

Άρα: $E_\pi = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 9 = 270$ (cm^2).

2

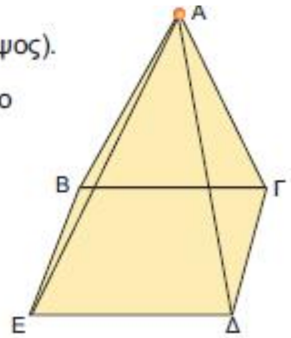
Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8 cm και ύψος 12 cm.
Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Λύση: Ο όγκος της πυραμίδας είναι: $V = \frac{1}{3} \cdot$ (εμβαδόν βάσης) $\cdot$ (ύψος).

Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι:

$E_\beta = 8^2 = 64$ (cm^2).

Επομένως, $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot u = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256$ (cm^3).



3

Από έναν κύβο που έχει ακμή α = 10 cm, αφαιρούμε μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

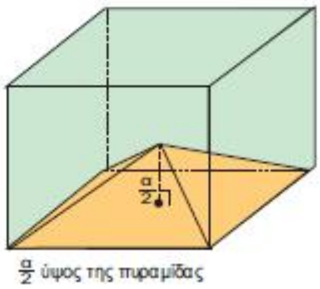
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει.

Λύση: Ο όγκος V του στερεού που απομένει, θα βρεθεί, αν από τον όγκο V_K του κύβου αφαιρέσουμε τον όγκο V_Π της πυραμίδας. Έχουμε ότι:

$V_K = α^3 = 10^3 = 1000$ (cm³)

$V_\Pi = \frac{1}{3}E_β \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot α^2 \cdot \frac{α}{2} = \frac{1}{6} \cdot α^3 = \frac{1000}{6} = 166{,}67$ (cm³).

Άρα: $V = V_K - V_\Pi = 1000 - 166{,}67 = 833{,}33$ (cm³).



4

Το έτος 3.000 π.Χ. περίπου οι αρχαίοι Αιγύπτιοι έκτισαν την πυραμίδα του Χέοπα, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς 233 m και παράπλευρη ακμή 220 m (περίπου).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας αυτής της πυραμίδας.
β) Αν γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 146 m, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση: α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας δίνεται από τον τύπο: $E_\Pi = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα).

Για να υπολογίσουμε το απόστημα ΟΜ της πυραμίδας, εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΜΔ:

$ΟΜ^2 = ΟΔ^2 - ΔΜ^2$, δηλαδή

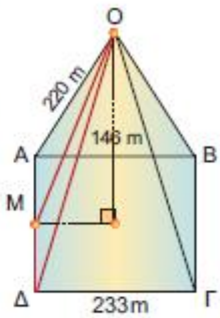
$ΟΜ^2 = 220^2 - 116{,}5^2 = 34827{,}75$.

Οπότε: ΟΜ = 186,62 m.

Άρα: $E_\pi = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα)

$= \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 233) \cdot 186{,}62 =$

$= \frac{1}{2} 932 \cdot 186{,}62 = 86964{,}92$ (m²).



β) Ο όγκος είναι: $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης) · (ύψος), με εμβαδόν βάσης:

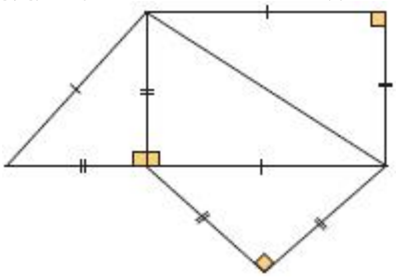
$E_β = 233^2 = 54289$ (m²).

Επομένως: $V = \frac{1}{3} \cdot 54289 \cdot 146 = 2642064{,}6$ (m³).

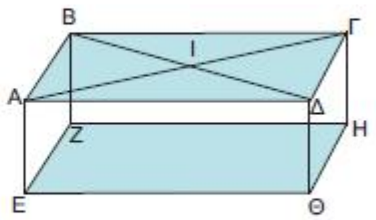
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ
ΚΑΙ
ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΣΩΣΤΟ **ΛΑΘΟΣ**

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών.
2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο.
3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ανάπτυγμα πυραμίδας.

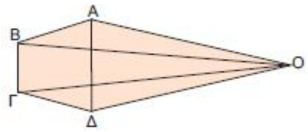


4. Ο αριθμός των εδρών μιας πυραμίδας είναι πάντα άρτιος αριθμός.
5. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια.
6. Στο παρακάτω σχήμα, οι πυραμίδες ΙΕΖΗΘ και ΗΑΒΖΕ έχουν τον ίδιο όγκο.



7. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι:
   Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$.
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
8. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα:
   Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά
   Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

9. Η πυραμίδα του διπλανού σχήματος έχει βάση:
Α: ΟΓΔ   Β: ΟΒΓ   Γ: ΑΒΓΔ   Δ: ΟΑΒ
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αφορά στα στοιχε
τετραγωνικής πυραμίδας.

ύψος (cm)	8		6
πλευρά βάσης (cm)	12	8	
απόστημα (cm)	10		8
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας (cm^2)			192
όγκος (cm^3)		256	

2. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 12 cm
Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3. Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 9 cm κ
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

4. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm και
έδρας της είναι 8 cm.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν:
α) της παράπλευρης επιφάνειας,
β) της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας

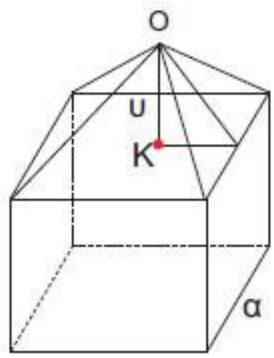
5. Μια τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 700 cm^3 και ύψος 17 cm.
Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης της.

6. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα 10 cm και πλευρά βάσης 16 cm.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και τον όγκο της.

7. Ένα τετράεδρο έχει όλες τις ακμές του ίσες με 6 cm.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

8. Ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι ενναπλάσιος από τον όγκο μίας άλλης κανονικής πυραμίδας με την οποία έχει το ίδιο ύψος. Να βρείτε το λόγο των πλευρών των βάσεών τους.

9. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας κύβος πλευράς α = 10 cm και μια πυραμίδα με βάση μία έδρα του κύβου και ύψος υ = 6 cm.
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



10. Μια κανονική πυραμίδα με βάση εξάγωνο έχει ύψος 8 cm και παράπλευρη ακμή 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας,
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας,
γ) τον όγκο της πυραμίδας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να υπολογίσετε το ύψος και το απόστημα κανονικής (i) εξαγωνικής, (ii) τετραγωνικής και (iii) τριγωνικής πυραμίδας (κανονικό τετράεδρο), αν έχει πλευρά βάσης μήκους μ και ακμή μήκους λ.*

2. *Να αποδείξετε ότι οι παράπλευρες έδρες κανονικής ν-γωνικής πυραμίδας σχηματίζουν ίσες γωνίες με το επίπεδο της βάσης.*

3. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, με πλευρά βάσης 4 και ακμή 7.*

4. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας που έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 200 και απόστημα 10.*

5. *Η μεγάλη πυραμίδα της Αιγύπτου έχει βάση τετράγωνο* πλευράς 234m και ύψος 146m. Να υπολογίσετε την παράπλευρη επιφάνεια και τον όγκο της πυραμίδας.

6. *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ως συνάρτηση της πλευράς της βάσης, αν έχει ακμή ίση με τη διαγώνιο της βάσης.*

7. *Να βρείτε το λόγο των όγκων κύβου και κανονικού τετραέδρου που έχει ακμή ίση με τη: (i) διαγώνιο του κύβου και (ii) διαγώνιο της έδρας του κύβου.*

8. *Να βρείτε το λόγο των όγκων κανονικού τετραέδρου ακμής α και κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας πλευράς α και ύψους α.*

9. *Επίπεδο παράλληλο στη βάση κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας, με πλευρά α και ύψος υ, διχοτομεί το ύψος της.*

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας που προκύπτει.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται το παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΑ-Α'Β'ΓΆ'. Να αποδείξετε ότι το τετράεδρο ΑΓΒ'Δ' έχει το ένα τρίτο του όγκου του παραλληλεπιπέδου.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τετράεδρο, το γινόμενο του εμβαδού κάθε έδρας επί το αντίστοιχο ύψος είναι σταθερό.*

3. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος τετραέδρου δε μεταβάλλεται αν μία ακμή μετακινηθεί στο φορέα της χωρίς να αλλάξει μήκος.* 4. *Αν δύο τετράεδρα έχουν κοινή μία ακμή και τη δίεδρη που αντιστοιχεί σε αυτήν, τότε ο λόγος των εμβαδών ισούται με το λόγο του γινομένου των εμβαδών των δύο εδρών που πρόσκεινται στη δίεδρη.*

5. *Αν δύο τετράεδρα έχουν κοινή μία τρίεδρη γωνία, τότε ο λόγος των όγκων τους ισούται με το λόγο του γινομένου των ακμών της τρίεδρης.*

6. Αν Α', Β', Γ' είναι τα μέσα των ακμών ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τετραέδρου ΟΑΒΓ, τότε (ΟΑ'Β'Γ') = 18 *(ΟΑΒΓ).*

7. Κανονική τριγωνική πυραμίδα Ο.ΑΒΓ έχει πλευρά βάσης α και οι παράπλευρες ακμές της σχηματίζουν γωνία 60° με τη βάση. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Σύνθετα Θέματα

1. *Να αποδείξετε ότι ο όγκος τετραέδρου ισούται με το γινόμενο της προβολής του σε επίπεδο κάθετο σε μία ακμή επί το ένα τρίτο της ακμής αυτής.*

2. *Αν η κάθετη τομή τριγωνικού πρίσματος έχει ίσες πλευρές, τότε το άθροισμα των αποστάσεων κάθε εσωτερικού σημείου από τις βάσεις και από τις παράπλευρες έδρες είναι σταθερό.*

3. *Να αποδείξετε ότι το στερεό που έχει κορυφές τα μέσα των ακμών ενός κύβου έχει ίσες ακμές και να υπολογίσετε τον όγκο του.*