ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Β.2.3

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Το

10$^{\text{Ο}}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \qquad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

Επίσης, πολύ χρήσιμες είναι οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

M_1: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, εφω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός ημω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ υπολογίζουμε το συνω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ υπολογίζουμε την εφω.

γ) Από τον τύπο $σφω=\frac{συνω}{ημω}$ ή $σφω=\frac{1}{εφω}$ υπολογίζουμε την σφω.

M_2: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, εφω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός συνω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ υπολογίζουμε το συνω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ υπολογίζουμε την εφω.

γ) Από τον τύπο $σφω=\frac{συνω}{ημω}$ ή $σφω=\frac{1}{εφω}$ υπολογίζουμε την σφω.

M_3: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, ημω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός εφω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $εφω \cdot σφω = 1$ βρίσκουμε τη σφω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ επιλύουμε ως προς ημω και προκύπτει η σχέση $ημω=εφω \cdot συνω$ (1).

γ) Αντικαθιστούμε την (1) στον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και υπολογίζουμε το συνω.

δ) Αντικαθιστούμε το συνω στην (1) και βρίσκουμε το ημω.

M_4: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, ημω και εφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός σφω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $εφω \cdot σφω = 1$ βρίσκουμε την εφω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ επιλύουμε ως προς ημω και προκύπτει η σχέση $ημω=εφω \cdot συνω$ (1).

γ) Αντικαθιστούμε την (1) στον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και υπολογίζουμε το συνω.

δ) Αντικαθιστούμε το συνω στην (1) και βρίσκουμε το ημω.

M_5: Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο M(x,y) είναι σημείο κύκλου:
α) Βρίσκουμε τα x^2, y^2.
β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις.
γ) Κάνουμε πράξεις έχοντας υπόψη ότι $ημ^2ω+συν^2ω=1$.
δ) Καταλήγουμε στη μορφή $x^2+y^2=ρ$ που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου Κ(0,0) και ακτίνας ρ.

M_6: Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα, εργαζόμαστε γενικά όπως στις ταυτότητες έχοντας υπόψη και τους τύπους:

- $ημ^2ω+συν^2ω=1$
- $εφω=\dfrac{ημω}{συνω}$
- $σφω=\dfrac{συνω}{ημω}$
- $εφω \cdot σφω = 1$
- $συν^2ω=\dfrac{1}{1+εφ^2ω}$
- $ημ^2ω=\dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$

M_7: Για να αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής ή είναι σταθερή αρκεί να υπολογίσουμε ότι η τιμή της είναι πραγματικός αριθμός.

M_8: Για να αποδείξουμε μια ισότητα που περιέχει ρίζες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:
α) $\sqrt{x^2} = |x|$.
β) Τον πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών.
γ) Τους τριγωνομετρικούς τύπους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

1. Να εξηγήσετε γιατι δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε:

- ημx = 0 και συνx = 0
- ημx = 1 και συνx = 1

2. Να υπολογίσετε την γωνία ω εάν 90° < ω < 180° και:

- 4ημx = – 3συνx
- $ημ^2x = 4\cdot συν^2x$

3. Να βρείτε τη γωνία x και τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς αν δίνεται ότι 0° < x < 180° και:

- $5\cdot ημ^2x - 2 = συν^2x$
- $1 + εφ^2x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4συν^2x}$

4. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- ημ90° = συν0° = εφ45°
- $ημ90° = \frac{1}{2}ημ180°$
- Αν 270° < x < 360° τότε $ημx = \sqrt{1 - συν^2x}$
- Αν 180° < x < 270° τότε $συνx = -\sqrt{1 - ημ^2x}$
- 2·ημ45° = ημ90°
- ημ60° = συν150°
- συν60° = ημ150°
- συν30° + συν45° + συν60° = ημ120° + ημ135° + ημ150°
- Αν συν2x = 1 , τότε $συνx = \frac{1}{2}$
- Αν 90° < x < 180°, τότε $συνx = -\frac{1}{\sqrt{1 + εφ^2x}}$

Απάντηση → Σωστές : 1 , 4 , 7 , 8 , 10

5. Να δείξετε ότι για κάθε γωνία x ισχύει:

$$-2 < ημx + συνx < 2$$

6. Αν $εφθ = \sqrt{2}$, 0° < θ < 90° να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

Α = εφθ + ημ(180° – θ) – συν(90° – θ)

Β = ημθ + ημ(90° – θ) – 2·συν(180° – θ)

7. Να αποδείξετε ότι:

- $ημ^4x - συν^4x = ημ^2x - συν^2x = 1 - 2συν^2x = 2ημ^2x - 1$
- $ημ^2x = \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$
- $(1 - ημ^2x)(1 + εφ^2x) = 1$
- $1 - \frac{συν^2x}{1+ημx} = ημx$
- $(2x\cdot συνθ\cdot ημθ)^2 + x^2\cdot(συν^2θ - ημ^2θ)^2 = x^2$
- $(x\cdot ημω\cdot συνφ)^2 + (x\cdot ημω\cdot ημφ)^2 + (x\cdot συνω)^2 = x^2$
- $ημ^3ω + συν^3ω = (ημω + συνω)\cdot(1 - ημω\cdot συνω)$
- $\frac{συν^2ω - ημ^2ω}{ημω\cdot συνω} = \frac{1-εφ^2ω}{εφω}$
- $ημ^3θ\cdot συνθ - ημ^5θ\cdot συνθ = ημ^3θ\cdot συν^3θ$
- $εφ^2x - ημ^2x = εφ^2x\cdot ημ^2x$
- $\frac{συνx}{συνx - ημx} = \frac{1}{1-εφx}$
- $\frac{ημx}{1+συνx} = \frac{1-συνx}{ημx}$
- $\frac{1+ημx}{συνx} = \frac{συνx}{1-ημx}$
- $\frac{συνx}{1+ημx} + εφx = \frac{1}{συνx}$
- $\frac{ημx}{1-συνx} + \frac{συνx}{ημx} = \frac{1}{ημx}$
- $συνθ = \frac{ημθ}{εφθ}$
- $\frac{ημ^3ω + ημω\cdot συν^2ω}{συνω} = εφω$
- $\frac{1}{1-ημω} + \frac{1}{1+ημω} = \frac{2}{συν^2ω}$
- $εφω = \frac{1}{ημω\cdot συνω} - \frac{1}{εφω}$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = (ημx + συνx)^2 + (ημx - συνx)^2$

$$B = \frac{εφθ \cdot συν(90^\circ + θ) \cdot ημ(180^\circ - θ)}{ημθ \cdot συν(90^\circ - θ) \cdot εφ(180^\circ - θ)}$$

$Γ = ημ^4α - συν^4α + 2 \cdot συν^2α$