

ΜΑΘΗΜΑ 7^ο

Τριγωνομετρικοί

Αριθμοί

Γωνίας

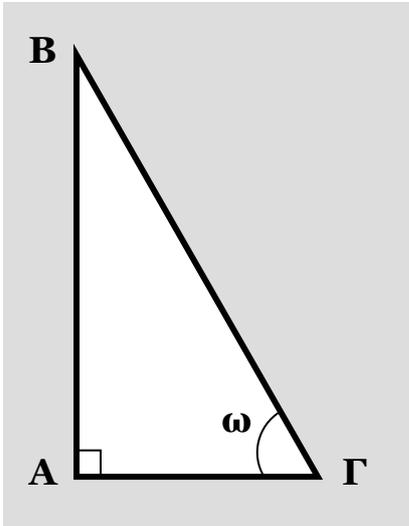
Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



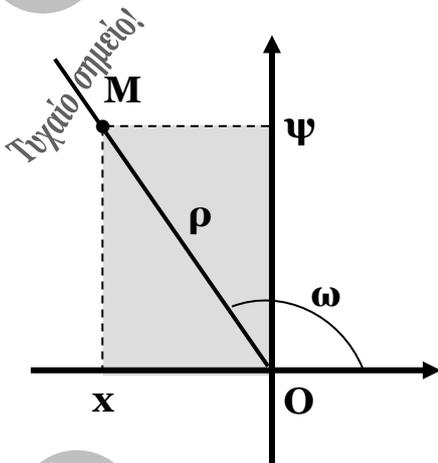
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$

2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας



$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\text{τεταγμένου M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

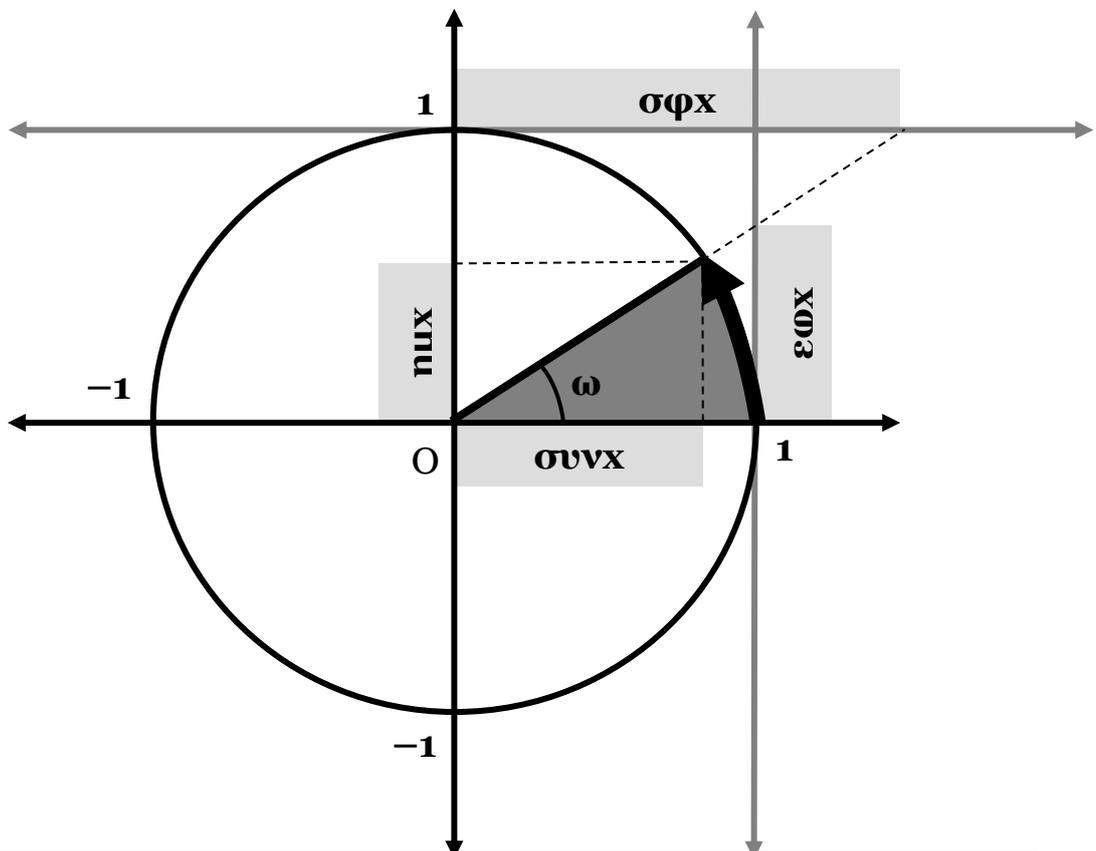
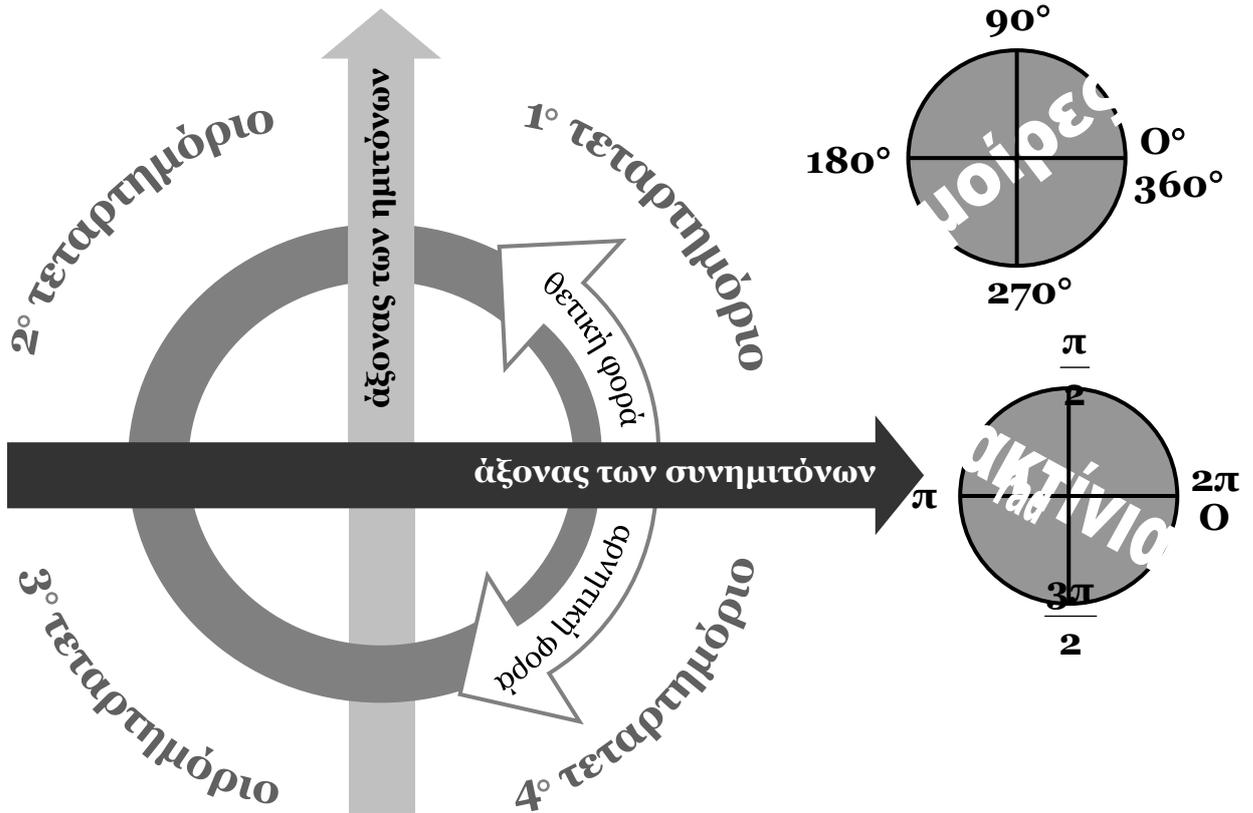
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{\text{τετμημένου M}}{\text{απόσταση του M από το O}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{\text{τεταγμένου M}}{\text{τετμημένου M}}$$

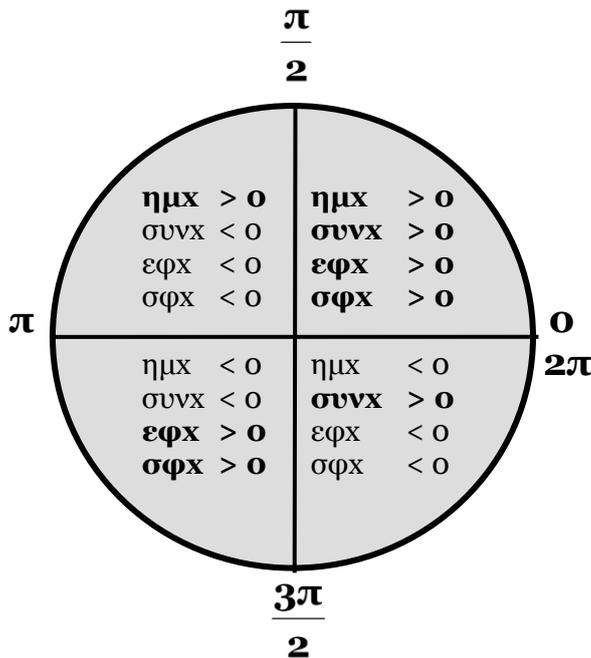
$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{\psi} = \frac{\text{τετμημένου M}}{\text{τεταγμένου M}}$$



3. Ο τριγωνομετρικός κύκλος $\rho = 1$



4. Πρόσημο τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Μνημονικός κανόνας

Ο Η Ε Σ

Ο = Όλα θετικά

Η = Ημίτονο θετικό

Ε = Εφαπτομένη θετική
(και συνεφαπτομένη)

Σ = Συνημίτονο θετικό

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	30°	45°	60°	0°	90°	180°	270°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	-	0	-
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-	0	-	0

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad 180^\circ = \pi \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

M_1 : Για να υπολογίσουμε τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν δίνονται οι πλευρές τους, χρησιμοποιούμε έναν από τους τύπους:

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\text{απέναντικάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\text{προσκείμενηκάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\beta}{\gamma} = \left(\frac{\text{απέναντικάθετη}}{\text{προσκείμενηκάθετη}} \right) \text{ και}$$

$$\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}.$$

M_2 : Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας $\varphi > 360^\circ$

α) Διαιρούμε την φ με το 360 και γράφουμε $\varphi = \kappa 360^\circ + \omega$

β) Εφαρμόζουμε τους τύπους:

$$\eta\mu(\kappa 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\phi(\kappa 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\phi(\kappa 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

γ) Χρησιμοποιούμε τον πίνακα τιμών των τριγωνομετρικών αριθμών.

M_3 : Για να μετατρέψουμε μια γωνία φ από μοίρες σε rad:

α) Παίρνουμε τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

β) Αντικαθιστούμε όπου μ το ίσο του.

γ) Επιλύουμε ως προς α .

M_4 : Για να μετατρέψουμε μια γωνία φ από $\frac{\pi}{\kappa}$ rad σε μοίρες:

α) Παίρνουμε τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

β) Αντικαθιστούμε όπου α το ίσο του $\frac{\pi}{\kappa}$.

γ) Επιλύουμε ως προς μ .

M_5 : Για να μετατρέψουμε x rad ($x \in \mathfrak{R}$) σε μοίρες:

α) Παίρνουμε τον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

β) Αντικαθιστούμε όπου α το x και π το 3,14.

γ) Επιλύουμε ως προς μ .

M_6 : Για να αποδείξουμε μια ανισότητα που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς χρησιμοποιούμε τον πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

	Τεταρτη- μόριο	1ο	2ο	3ο	4ο
Τριγωνο- μετρικός αριθμός					
ημω		+	+	-	-
συνω		+	-	-	+
εφω		+	-	+	-
σφω		+	-	+	-

M_7 : Για να αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση δεν ισχύει εργαζόμαστε με την απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ισχύει και κάνουμε χρήση των σχέσεων:

$-1 \leq \sigma\eta\chi \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

M_8 : Για να επιλύσουμε προβλήματα:

α) Χρησιμοποιούμε τους ορισμούς του ημιτόνου ή του συνημιτόνου ή της εφαπτομένης.

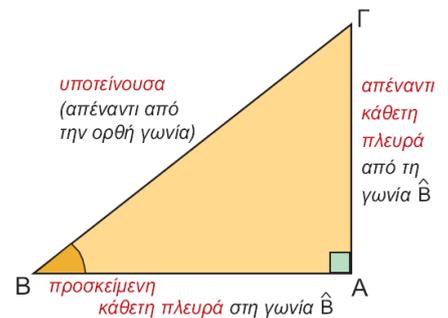
β) Έχουμε υπόψη ότι: κλίση = εφω.



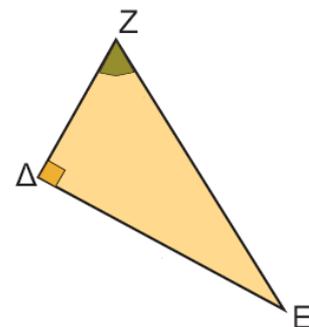
Εφαπτομένη Οξείας Γωνίας

Απέναντι και προσκείμενη πλευρά σε γωνία ορθογωνίου τριγώνου

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η πλευρά ΒΓ που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται, η πλευρά ΑΓ ονομάζεται κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{B} και η πλευρά ΑΒ ονομάζεται κάθετη πλευρά στη γωνία \hat{B}

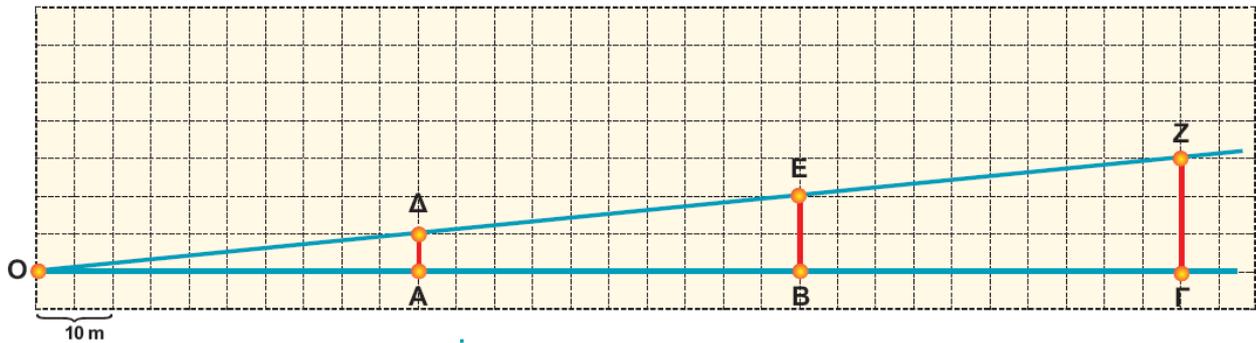


2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ του διπλανού σχήματος, ορθή γωνία είναι η γωνία και υποτείνουσα είναι η πλευρά Απέναντι από τη γωνία \hat{Z} βρίσκεται η πλευρά και προσκείμενη στη γωνία \hat{Z} είναι η (κάθετη) πλευρά Απέναντι από τη γωνία \hat{E} βρίσκεται η πλευρά και προσκείμενη στη γωνία \hat{E} είναι η (κάθετη) πλευρά



Εφαπτομένη Οξείας Γωνίας

3. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε έναν ανηφορικό δρόμο OZ και μια πινακίδα της τροχαίας, η οποία βρίσκεται στην αρχή της ανηφόρας. Μήπως γνωρίζετε τι σημαίνει η πινακίδα; Συζητήστε με την ομάδα σας.



4. Όταν ένα αυτοκίνητο ξεκινήσει από το O και φτάσει στο σημείο Z, τότε λέμε ότι έχει διανύσει οριζόντια απόσταση OΓ και ότι έχει ανέβει ύψος ίσο με ΓZ. Κάτω από το σημείο O το μήκος 10 m (μέτρα) που δίνεται δηλώνει την κλίμακα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του σχήματος. Κατά συνέπεια κάθε τετραγωνάκι στο σχήμα έχει πλευρά ίση με μέτρα.

5. Αν το αυτοκίνητο μετακινηθεί από το O στο Δ, τότε έχει διανύσει οριζόντια απόσταση OA= μέτρα και έχει ανέβει κατά AΔ=..... μέτρα. Τότε ο λόγος $\frac{A\Delta}{OA}$ είναι ίσος με

6. Με βάση τα παραπάνω, να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας. Στη δεξιά στήλη του πίνακα να μετατραπούν τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

OA = μέτρα	AΔ = μέτρα	$\frac{A\Delta}{OA} = \text{---} = \text{.....}$
OB = μέτρα	BE = μέτρα	$\frac{BE}{OB} = \text{---} = \text{.....}$
OΓ = μέτρα	ΓZ = μέτρα	$\frac{\Gamma Z}{O\Gamma} = \text{---} = \text{.....}$

7. Από τον προηγούμενο πίνακα παρατηρούμε ότι οι **λόγοι** $\frac{A\Delta}{OA}$, $\frac{BE}{OB}$ και $\frac{\Gamma Z}{O\Gamma}$ είναι με τον αριθμό

8. Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ΟΖ ο λόγος

$\frac{\text{υψος}}{\text{οριζοντια αποσταση}}$ με τι πιστεύετε ότι θα ισούται;
.....

9. Αν ονομάσουμε ω τη γωνία που σχηματίζει ο ανηφορικός δρόμος ΟΖ με το οριζόντιο επίπεδο ΟΓ, να σχεδιάσετε τη γωνία ω στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας.

10. Ο σταθερός αυτός λόγος $\frac{\text{υψος}}{\text{οριζοντια αποσταση}}$ ονομάζεται **εφαπτομένη της γωνίας**

ω και γράφουμε **$\epsilon\phi\omega=0,1$** .

11. Να μετατρέψετε το ποσοστό 10% σε δεκαδικό αριθμό: $10\% = \frac{10}{100} = \dots\dots$

12. Τι σχέση έχει ο αριθμός που βρήκατε με τους λόγους $\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$, $\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ και $\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$;
.....

13. Μήπως τώρα μπορείτε να απαντήσετε τι δηλώνει η πινακίδα που βρίσκεται στην αρχή της ανηφόρας;

14. Ειδικά, όταν αναφερόμαστε σε δρόμο, όπως παραπάνω, η εφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται **κλίση** του δρόμου.

$\epsilon\phi\omega = \text{κλίση}$

15. Σε οποιοδήποτε ορθογώνιο τρίγωνο, όπως το παρακάτω ΑΒΓ, με οξεία γωνία $\hat{B} = \omega$, ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας το λόγο:

$\epsilon\phi\mathbf{B} = \epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}$
--

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

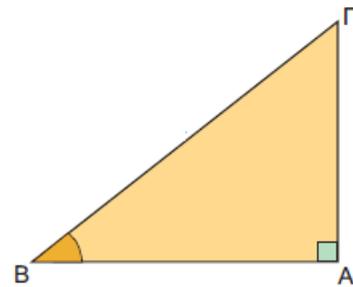
1: Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $AB = 5$ εκ., $AG = 4$ εκ. και $BG = 5,8$ εκ. α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της

γωνίας \hat{B} .

$\text{εφ } \hat{B} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$

β) Να βρεθεί η εφαπτομένη της γωνίας Γ .

$\text{εφ } \hat{\Gamma} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \dots\dots\dots$



2. Στο διπλανό σχήμα να σχεδιάσετε μια ανηφόρα που να έχει κλίση 20% καθώς και μια ανηφόρα με κλίση 100%.



3. Ποια γωνία σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο η ανηφόρα που έχει κλίση 100%;

4. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\text{συν}\Gamma = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ Σ Λ
5. Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $0 < \eta\mu\omega < 1$ Σ Λ
6. Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $\text{συν}\omega > 1$ Σ Λ
7. Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $0 < \epsilon\phi\omega < 1$ Σ Λ
8. Αν ω είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε ισχύει $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = -1$ Σ Λ
9. Αν ω είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega}$
Σ Λ
10. Ισχύει $\epsilon\phi 45^\circ = 1$ Σ Λ
11. Ισχύει $\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Σ Λ
12. Ισχύει $\epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$ Σ Λ
13. Ισχύει $\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}$ Σ Λ
14. Ισχύει $\text{συν} 60^\circ = \frac{1}{2}$ Σ Λ
15. Ισχύει $\eta\mu 60^\circ = \text{συν} 30^\circ$ Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Να βάλετε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Αν για τις οξείες γωνίες α και β ισχύει $\alpha < \beta$, τότε:
Α. $\epsilon\phi\alpha < \epsilon\phi\beta$ Β. $\epsilon\phi\alpha = \epsilon\phi\beta$ Γ. $\epsilon\phi\beta < \epsilon\phi\alpha$
2. Αν για τις οξείες γωνίες α και β ισχύει $\alpha < \beta$, τότε:
Α. $\eta\mu\alpha < \eta\mu\beta$ Β. $\eta\mu\alpha = \eta\mu\beta$ Γ. $\eta\mu\alpha > \eta\mu\beta$
3. Αν για τις οξείες γωνίες α και β ισχύει $\alpha < \beta$, τότε::
Α. $\text{συν}\alpha < \text{συν}\beta$ Β. $\text{συν}\alpha = \text{συν}\beta$ Γ. $\text{συν}\alpha > \text{συν}\beta$

4. Για κάθε οξεία γωνία ω ισχύει:
 Α. $\eta\mu\omega > 1$ Β. $\eta\mu\omega < -1$ Γ. $\eta\mu\omega > 2$ Δ. $0 < \eta\mu\omega < 1$
5. Για κάθε οξεία γωνία ω ισχύει:
 Α. $\sigma\upsilon\nu\omega > 1$ Β. $\sigma\upsilon\nu\omega < -1$ Γ. $\sigma\upsilon\nu\omega > 2$ Δ. $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$
6. Για τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:
 Α. $\epsilon\phi\text{B} = \epsilon\phi\text{Γ}$ Β. $\epsilon\phi\text{B} \cdot \epsilon\phi\text{Γ} = \frac{1}{2}$ Γ. $\epsilon\phi\text{B} : \epsilon\phi\text{Γ} = 1$ Δ. $\epsilon\phi\text{Γ} = \frac{1}{\epsilon\phi\text{B}}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Να συνδέσετε κάθε παράσταση της στήλης Α, με τον αριθμό της στήλης Β, με τον οποίο είναι ίση.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\epsilon\phi 30^\circ$	I. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\eta\mu 30^\circ$	II. 2
3. $\sigma\upsilon\nu 30^\circ$	III. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\eta\mu 45^\circ$	IV. 3
5. $\epsilon\phi 45^\circ$	V. $\frac{1}{2}$
6. $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi 45^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ$	VI. 1
7. $\sqrt{3} \cdot \epsilon\phi 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$	VII. 1,5
	VIII. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ερωτήσεις διάταξης

Να διατάξετε από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τις παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ.

$A = \eta\mu 60^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ - \epsilon\phi 60^\circ$	$B = \eta\mu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ$
$\Gamma = \eta\mu^2 30^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ$	$\Delta = \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ - \epsilon\phi 45^\circ$
$E = \epsilon\phi^2 60^\circ - \epsilon\phi^2 30^\circ$	$Z = (\epsilon\phi^2 60^\circ + \epsilon\phi^2 30^\circ)^{-1}$

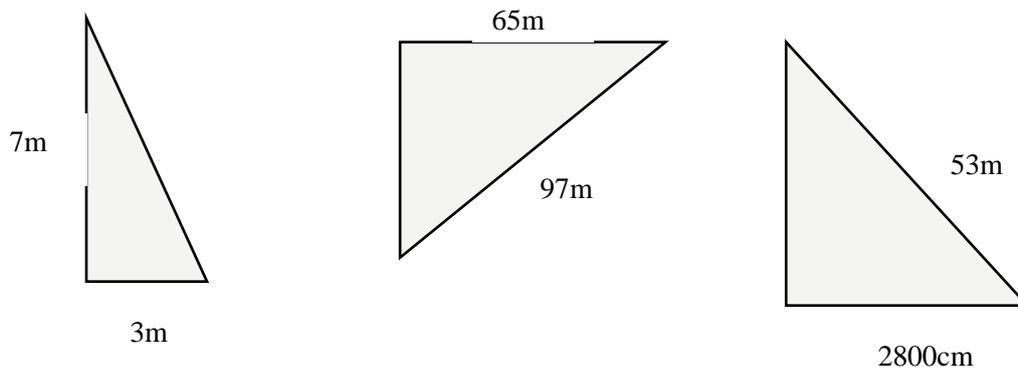
Ασκήσεις

Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

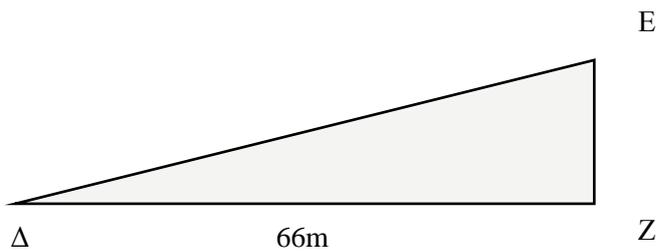
1. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ=9m και ΑΔ=40m. Να υπολογίσετε τους λόγους:
 $\frac{AB}{AD}$, $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AB+BG+ΓΔ+ΔΑ}{AD}$, $\frac{BG-AB}{AB}$ και $\frac{AB}{AG}$.
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=130m και ύψος ΑΔ=126m. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{BG}{AB}$.
3. Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος α προς ένα ευθύγραμμο τμήμα β είναι ο αριθμός 1,75. Να υπολογίσετε:
 α) το λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$ και β) ποιο μέρος του α είναι το ευθύγραμμο τμήμα β.
4. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\lambda}{\mu}$ δυο ευθυγράμμων τμημάτων λ και μ χρησιμοποιώντας τα παρακάτω δεδομένα:
 α) $\lambda=0,4\mu$ β) $\mu=5\lambda$ γ) $\lambda = \frac{2}{7}\mu$
5. Ο λόγος του ύψους α του Γιώργου προς το ύψος β του γιου του είναι 3. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και β) $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{4}$
6. Αν α, β, γ και δ είναι ευθύγραμμα τμήματα τέτοια ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = 2$, $\frac{\beta}{\gamma} = 3$, $\frac{\gamma}{\delta} = 4$ να υπολογίσετε τους λόγους: $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\alpha}$.
7. Αν γνωρίζετε ότι ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος α προς ένα ευθύγραμμο τμήμα β είναι $\frac{2}{9}$, να υπολογίσετε τους λόγους: α) $\frac{2\beta}{9\alpha}$ β) $\frac{2\beta}{27\alpha}$.
8. Αν για τα ευθύγραμμα τμήματα α, β ισχύει $\frac{\beta}{\alpha} > 2$, τότε να εξετάσετε αν ισχύει $\alpha < \beta$.

Εφαπτομένη οξείας γωνίας – Κλίση ευθείας

1. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη καθεμιάς οξείας γωνίας του καθενός από τα παρακάτω τρίγωνα:



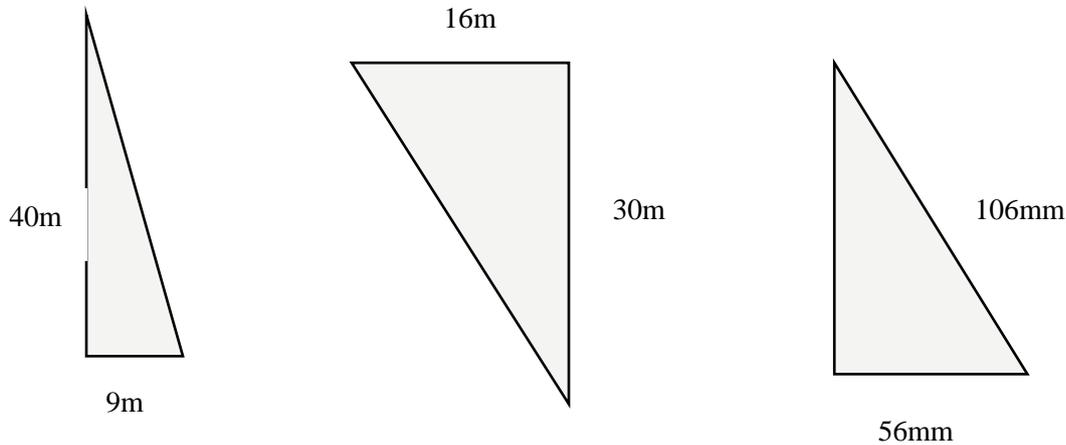
2. Αν η κλίση του δρόμου ΔΕ είναι 28%, να υπολογίσετε πόσα μέτρα είναι ψηλότερα το σημείο Ε από το σημείο Ζ.



3. Να κατασκευάσετε μια γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\epsilon\phi\omega=0,8$.
4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB=6m$ και $\epsilon\phi\Gamma=0,64$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ.
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB=0,25ΑΓ$. Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi B$ και την $\epsilon\phi\Gamma$.

Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

1. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο καθεμιάς οξείας γωνίας του καθενός από τα παρακάτω τρίγωνα:



2. Να κατασκευάσετε μια γωνία ϕ , ώστε να ισχύει

α) $\eta\mu\phi = \frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{10}{16}$.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, και πλευρές AB=γ, ΒΓ=α και ΑΓ=β. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2\text{B} + \sigma\upsilon\nu^2\text{Γ} = 1$

β) $\sigma\upsilon\nu\text{B} = \eta\mu\text{Γ}$

γ) $\epsilon\phi\text{B} = \frac{\eta\mu\text{B}}{\sigma\upsilon\nu\text{B}}$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\sigma\upsilon\nu\text{Γ} = \frac{7}{25}$ και ΑΓ=14m. Να υπολογίσετε:

α) Το $\eta\mu\text{Γ}$ και

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°

1. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαγώνιο ΑΓ=4,5m και γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.
2. Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει η παράσταση:
 $\eta\mu 60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ - 5\eta\mu^2 30^\circ$.
3. Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει η παράσταση:
 $\epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ \cdot (\eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$.
4. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ΑΒ=10m, περίμετρο 28m και γωνία $\hat{\Delta} = 45^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
5. Τραπεζίο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ έχει μήκη πλευρών ΑΒ= 2m, ΑΔ=3m και γωνίες $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{\Delta} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ

Τριγωνομετρία

1. Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, αν $ΑΓ = 9 \text{ cm}$ και $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου στο οποίο χορδή μήκους 10 cm είναι η απέναντι πλευρά τριγώνου από γωνία 120° με κορυφή το κέντρο του κύκλου.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$Α = \frac{\epsilon\phi 60^\circ - \epsilon\phi 30^\circ}{\epsilon\phi 45^\circ + \epsilon\phi 30^\circ + \epsilon\phi 60^\circ}$$

$$Β = \frac{\eta\mu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ + 2 \cdot \eta\mu 60^\circ}{1 - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ}$$

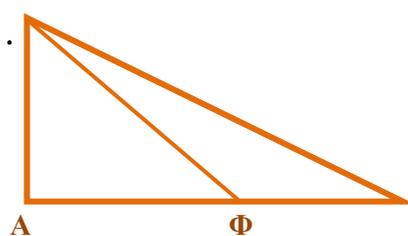
$$\Gamma = \eta\mu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ - \eta\mu 70^\circ$$

$$\Delta = \eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \dots + \eta\mu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 46^\circ - \sigma\upsilon\nu 47^\circ - \dots - \sigma\upsilon\nu 89^\circ$$

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) να φέρετε τη διάμεσο ΓΔ και να συγκρίνετε τις $\epsilon\phi Β$ και $\epsilon\phi Δ$.

5. Ένας παρατηρητής απέχει 12 m από ένα δέντρο και βλέπει την κορυφή του δέντρου υπό γωνία 24° . Να βρείτε το ύψος του δέντρου αν ξέρετε ότι τα μάτια του παρατηρητή απέχουν από το έδαφος 1,5 m.

6. Να υπολογίσετε την απόσταση ΦΠ όταν δίνεται $ΒΑ = 100 \text{ m}$, $\hat{ΑΒΦ} = 60^\circ$, $\hat{ΦΒΠ} = 10^\circ$.

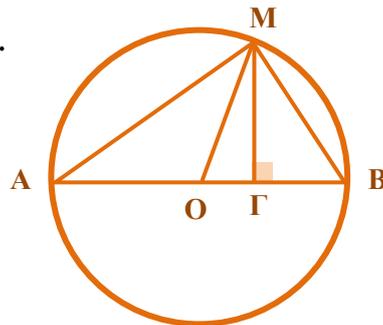


Π

7. Στο κάτω σχήμα $ΟΑ = 1 \text{ cm}$, ενώ η $ΜΓ \perp ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

$$1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

$$(\alpha = \hat{ΟΑΜ}, \beta = \hat{ΓΟΜ}).$$



8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \sin^2 0^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$B = \frac{2 \cdot \sin 18^\circ - 3 \cdot \sin 27^\circ + \sin 54^\circ}{2 - 3 \cdot \sin 18^\circ}$$

9. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 210° , 135° , 330°

10. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο M, εάν $\widehat{xOM} = \omega$ και:

α. $\eta\omega \cdot \sigma\omega > 0$

β. $\sigma\omega \cdot \epsilon\phi\omega < 0$

11. Από όλα τα τρίγωνα ABΓ με $\beta = 6$ cm και $\gamma = 7$ cm, ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό;

12. Να υπολογίσετε τη γωνία x, αν $0^\circ < x < 180^\circ$ και:

α. $\epsilon\phi x = -2,05$

β. $\sigma\omega x = -0,97$