ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ
1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Β.1.5

Ομοιότητα

Α. Όμοια πολύγωνα

Β. Όμοια τρίγωνα

Το

$5^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Θα λέμε ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

- Δυο **κανονικά** πολύγωνα, με τον ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια.

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Θα λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι **όμοια** όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία.

- Όταν δυο τρίγωνα είναι όμοια, τότε θα έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Συνήθως ...

- Αποδεικνύουμε, πρώτα, ότι τα τρίγωνα έχουν 2 γωνίες ίσες, άρα είναι όμοια.
- Στη συνέχεια, γράφουμε τους λόγους (κλάσματα) των αντίστοιχων πλευρών κι επιλέγουμε το ζευγάρι που μας βολεύει.

ΣΑΤΑΝΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

- Απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ανάλογες πλευρές.

- Για να είναι όμοια δυο τρίγωνα (γενικά) αρκεί να έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία.
- Για να είναι όμοια δυο **ορθογώνια** τρίγωνα αρκεί να έχουν μία οξεία γωνία ίση.

Όμοια πολύγωνα

1. **Πότε δύο πολύγωνα καλούνται όμοια πολύγωνα ;**
2. **Τι ισχύει για τα όμοια πολύγωνα ;**
3. **Ποιες πλευρές καλούνται ομόλογες ;**
4. **Τι καλείται λόγος ομοιότητας ;**
5. **Ποιες σχέσεις συνδέουν τις ομόλογες πλευρές και τις αντίστοιχες γωνίες των ομοίων πολυγώνων και με τι ισούται ο λόγος των περιμέτρων δυο ομοίων πολυγώνων ;**

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

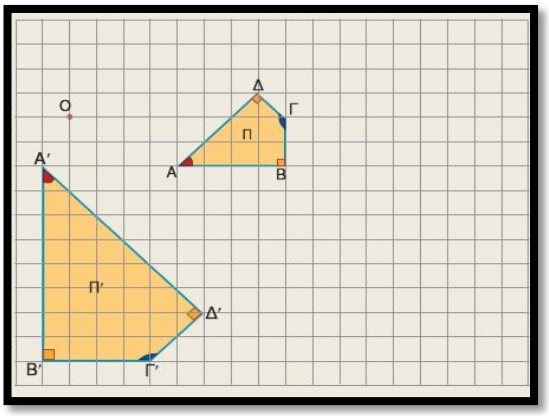
Π.χ. Τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τα σχεδιάσαμε, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'A'}{\Delta A}=2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \hat{A}'=\hat{A},\ \hat{B}'=\hat{B},\ \hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma},\ \hat{\Delta}'=\hat{\Delta} \quad (2)$$

και διαπιστώσαμε ότι είναι όμοια.

Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο (π.χ. $\frac{A'B'}{AB}=2$), γι΄ αυτό λέγονται **ομόλογες** και

ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας.**



Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Από τη σχέση (1) και γνωστή ιδιότητα των αναλογιών έχουμε:

$$\lambda=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'A'}{\Delta A}=\frac{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'A'}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A}=\frac{\text{περίμετρος } \Pi'}{\text{περίμετρος } \Pi}. \text{Άρα}$$

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους

Λόγος ομοιότητας - Κλίμακα

2. Ποια η σχέση του λόγου ομοιότητας και της κλίμακας ;

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μια γεωγραφική περιοχή σε **σμίκρυνση**, δηλαδή παρουσιάζουν ένα σχήμα όμοιο με το πραγματικό. Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη που αναγράφεται πάνω σ΄ αυτόν.

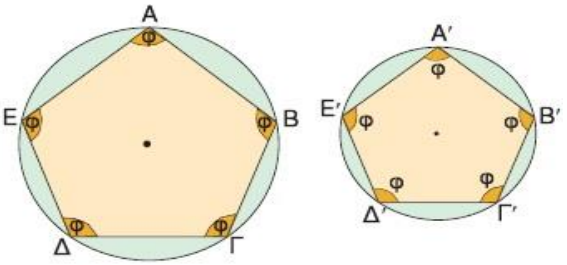
Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.

Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 2000000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι λ = $\frac{1}{2000000}$ οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 20 km στην πραγματικότητα.

ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι δύο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.

Απόδειξη



Οι πλευρές ενός κανονικού πολυ- γώνου είναι ίσες. Άρα τα κανονικά πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta' E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

αφού και οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι μεταξύ τους ίσοι. Τα κανονικά πεντάγωνα έχουν και τις γωνίες τους ίσες εφόσον καθεμιά από αυτές είναι

$$\varphi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Άρα τα κανονικά πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε είναι όμοια.

Γενικά : **Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.**

Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια και τι ισχύει για τα όμοια τρίγωνα ;

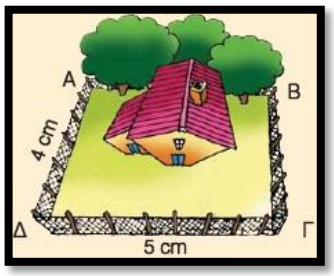
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Είδαμε λοιπόν, ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια, οπότε θα έχουν και την τρίτη γωνία τους ίση και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ΑΝΑΠΤΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η αεροφωτογραφία ενός αγροκτήματος που έχει σχήμα ορθογωνίου και έχει περιφραχτεί με συρματόπλεγμα μηκους 270 m. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος. Με ποια κλίμακα έχει φωτογραφηθεί το αγρόκτημα;

Επίλυση



Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ της αεροφωτογραφίας είναι σμίκρυνση του πραγματικού αγροκτήματος Α΄Β΄Γ΄Δ΄, οπότε είναι όμοιο προς αυτό.Άρα

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = \lambda \quad (1).$$

Ο λόγος ομοιότητας λ είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους. Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 2·4 + 2·5 = = 18 cm, ενώ του Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ίση με το μήκος του συρματοπλέγματος, δηλαδή 270 m ή 27000 cm.Άρα

$$\lambda = \frac{18}{27000} = \frac{1}{1500} \quad \text{οπότε} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = \frac{1}{1500}.$$

Επομένως έχουμε: Α΄Δ΄ = 1500·ΑΔ = 1500·4 = = 6000 cm ή Α΄Δ΄ = 60 m.
Δ΄Γ΄ = 1500·ΔΓ = 1500·5 = = 7500 cm ή Δ΄Γ΄ = 75 m
Δηλαδή, οι πραγματικές διαστάσεις του αγροκτήματος είναι 60 m και 75 m. Η κλίμακα φωτογράφισης είναι ίση με το λόγο ομοιότητας λ = $\frac{1}{1500}$ δηλαδή 1 : 1500.

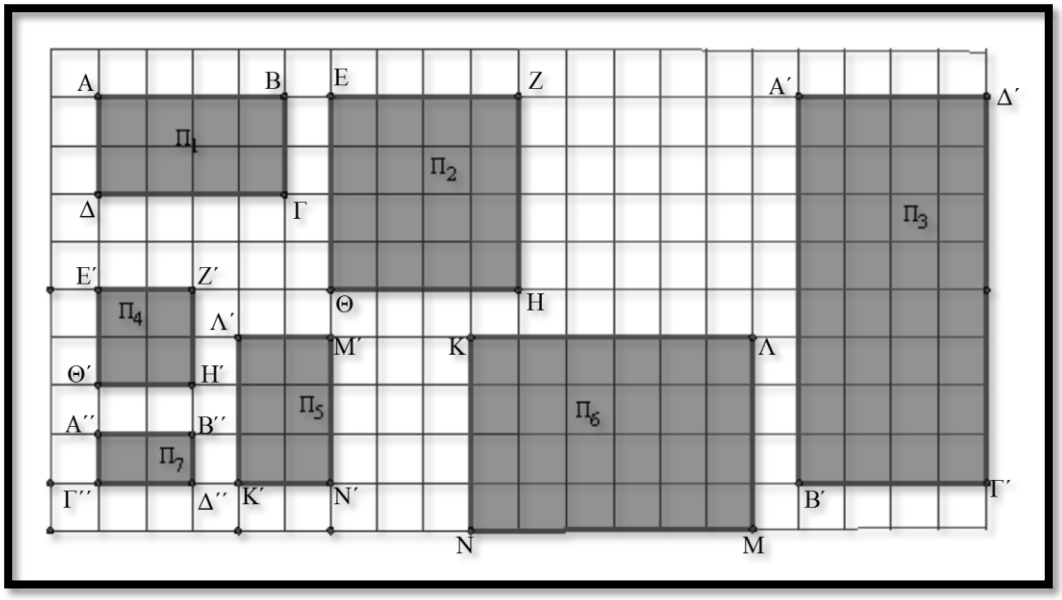
2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες
α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια
β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια
δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια
στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια

Επίλυση

α) Ναι διότι έχουν πλευρές ανάλογες και ίσες τις γωνίες τους πρόταση (Σ)
β) Όχι διότι δεν έχουν ανάλογες τις πλευρές τους πρόταση (Λ)
γ) Όχι διότι δεν ξέρουμε τι γίνεται με τις γωνίες τους πρόταση (Λ)
δ) Όχι γιατί δεν έχουν ίσες γωνίες πρόταση (Λ)
ε) Ναι διότι έχουν πλευρές ανάλογες και ίσες τις γωνίες τους πρόταση (Σ)
στ) Όχι θα πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών πρόταση (Λ)

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

3. Ποια από τα πολύγωνα του παρακάτω σχήματος είναι όμοια ;



Επίλυση

Είναι $\Pi_1 \approx \Pi_3$ διότι έχουν ίσες γωνίες και $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta' A'} = \frac{1}{2}$

$\Pi_1 \approx \Pi_7$ διότι έχουν ίσες γωνίες και $\frac{AB}{A''B''} = \frac{B\Gamma}{B''\Gamma''} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma''\Delta''} = \frac{\Delta A}{\Delta'' A''} = 2$

Άρα και $\Pi_3 \approx \Pi_7$ δηλαδή $\Pi_1 \approx \Pi_3 \approx \Pi_7$ Ομοίως $\Pi_2 \approx \Pi_4$ και $\Pi_5 \approx \Pi_6$

4. Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια να συμπληρώσετε τις προτάσεις

α) ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι .....

β) ο λόγος ομοιότητας του Α΄Β΄Γ΄Δ΄ προς το ΑΒΓΔ είναι .....

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 110ο, τότε και η γωνία .... είναι 110ο

δ) Ο λόγος λ =≈ είναι ίσος με .....

ε) Η πλευρά ΒΓ είναι ίση με ..... cm

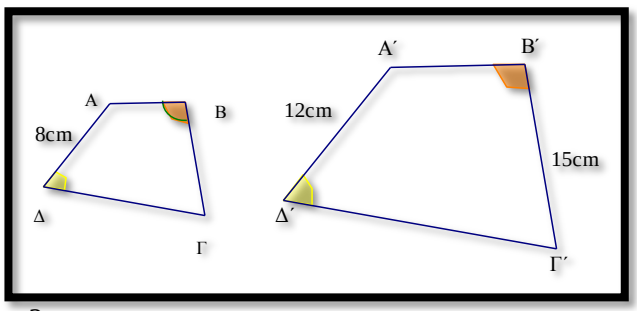
Επίλυση

α) Είναι $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

β) Είναι $\frac{A'\Delta'}{A\Delta} = \frac{3}{2}$

γ) $B' = 110^o$

δ) $\lambda = \frac{A'\Delta'}{A\Delta} = \frac{3}{2}$

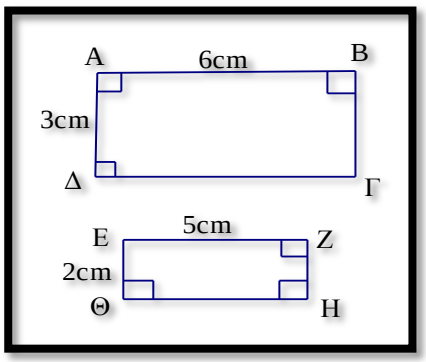


ε) $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{2}{3}$ άρα $B\Gamma = \frac{2}{3} B'\Gamma' = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ cm

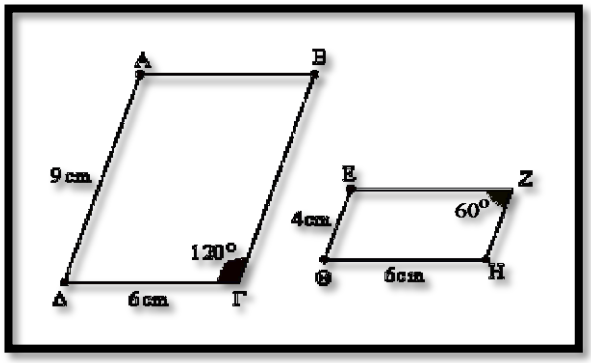
Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

5. Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

α)



β)



Επίλυση

(α) τα ορθογώνια δεν είναι όμοια, διότι δεν έχουν ομόλογες πλευρές ανάλογες,

αφού $\frac{AB}{EZ} = \frac{6}{5} \neq \frac{3}{2} = \frac{A\Delta}{E\Theta}$

(β) ισχύει $\frac{A\Delta}{\Theta H} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ και $\frac{\Delta\Gamma}{E\Theta} = \frac{AB}{ZH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Άρα $\frac{A\Delta}{\Theta H} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{E\Theta} = \frac{AB}{ZH}$

Επί πλέον είναι $\Gamma = A = 120^o$, άρα και $B = \Delta = 60^o$

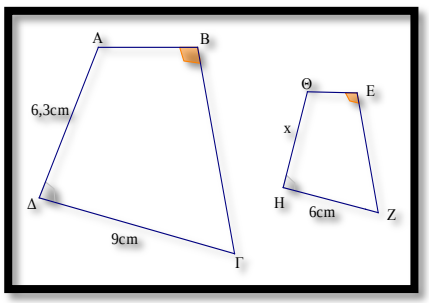
$Z = \Theta = 60^o$, άρα και $E = H = 120^o$

Οπότε οι γωνίες που περιέχονται μεταξύ ομολόγων πλευρών είναι ίσες.

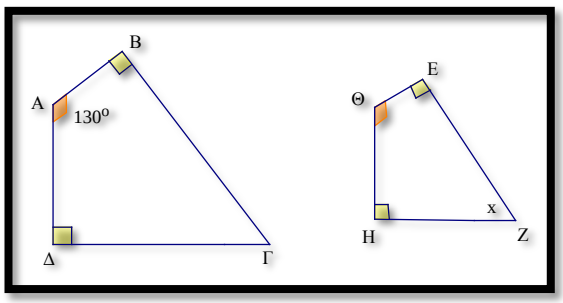
Άρα $AB\Gamma\Delta \approx EZH\Theta$

6. Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια να βρείτε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις.

α)



β)



Επίλυση

(α) έχουμε ότι $\frac{x}{6,3} = \frac{6}{9}$ άρα $x = 4,2$ cm

(β) έχουμε ότι $90^o + \Gamma + 90^o + 130^o = 180^o$ άρα $\Gamma = 50^o$

Επίσης $\Theta = A = 130^o$ άρα $x = 50^o$

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

7. Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 24cm και 18 cm. Ένας μαθητής θέλοντας να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο όμοιο μ' αυτό, αλλά που να έχει τη μεγαλύτερη πλευρά 20cm σκέφτηκε να μειώσει και την άλλη πλευρά κατά 4 cm. Ήταν σωστή η σκέψη του ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

Επίλυση

Αν x είναι το μήκος της άλλης πλευράς πρέπει $\frac{24}{20} = \frac{18}{x}$ άρα x = 15

Άρα η σκέψη δεν ήταν σωστή, διότι μειώνοντας την αρχική πλευρά κατά 4 αυτή θα γινότανε 14 και όχι 15.

8. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που προκύπτει αν ενώσουμε τα μέσα των ΚΑ , ΚΒ ,ΚΓ και ΚΔ είναι παραλληλόγραμμο όμοιο με το ΑΒΓΔ.

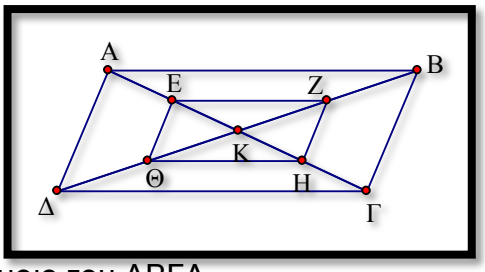
Επίλυση

Έστω Ε , Ζ , Η , Θ τα μέσα των ΚΑ , ΚΒ , ΚΓ και ΚΔ αντίστοιχα

Επειδή $ΚΕ = \frac{1}{2}ΚΑ$, $ΚΖ = \frac{1}{2}ΚΒ$

$ΚΗ = \frac{1}{2}ΚΓ$, $ΚΘ = \frac{1}{2}ΚΔ$

το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ στην ομοιοθεσία με κέντρο Κ και λόγο $λ = \frac{1}{2}$, άρα θα είναι όμοιο του ΑΒΓΔ



9. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΑΚ = \frac{1}{4}ΑΓ$, ΕΖ // ΑΔ και ΗΘ // ΑΒ Να αποδείξετε ότι : α) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ β) Το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι όμοιο με το ΚΘΓΖ

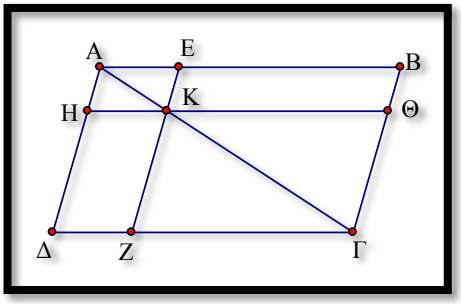
Επίλυση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ΕΚ // ΒΓ, άρα από το θ. Θαλή έχουμε

$\frac{ΑΚ}{ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$

Όμως από την υπόθεση είναι $\frac{ΑΚ}{ΑΓ} = \frac{1}{4}$

άρα θα είναι και $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{1}{4}$



οπότε $ΑΕ = \frac{1}{4}ΑΒ$

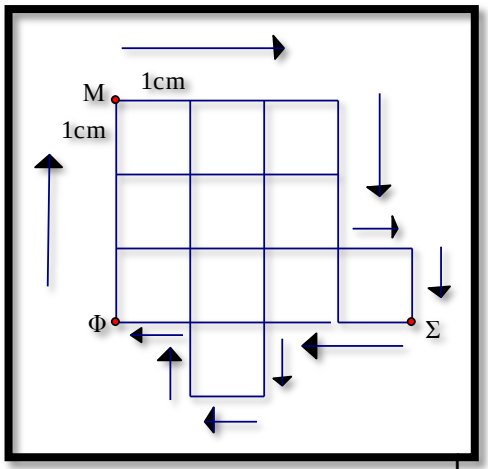
Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ αποδεικνύεται ότι $ΑΗ = \frac{1}{4}ΑΔ$

Αφού $ΑΚ = \frac{1}{4}ΑΓ$, $ΑΕ = \frac{1}{4}ΑΒ$, $ΑΗ = \frac{1}{4}ΑΔ$, το παραλληλόγραμμο ΑΕΚΗ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ στην ομοιοθεσία με κέντρο Α και λόγο $λ = \frac{1}{4}$, οπότε είναι όμοιο του ΑΒΓΔ

β) Εύκολα αποδεικνύουμε ότι το παραλληλόγραμμο ΚΘΓΖ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Γ και λόγο $λ = \frac{3}{4}$ (είναι $ΓΘ = \frac{3}{4}ΓΒ$ κ λ π)
Επομένως το ΚΘΓΖ είναι όμοιο του ΑΒΓΔ, άρα λόγω του (α) και του ΑΕΚΗ.

10. Ένας μαθητής ξεκίνησε το πρωί από το σπίτι του Μ και αφού ακολούθησε τη διαδρομή που φαίνεται στο σχέδιο, έφτασε το σχολείο του Σ . Το μεσημέρι επέστρεψε στο σπίτι του από άλλο δρόμο, προκειμένου να περάσει και από το σπίτι ενός φίλου του που βρισκόταν στο σημείο Φ. Αν η συνολική διαδρομή που έκανε ο μαθητής ήταν 640 m , να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια των δύο φίλων. Ποια είναι η κλίμακα του σχεδίου.

Επίλυση



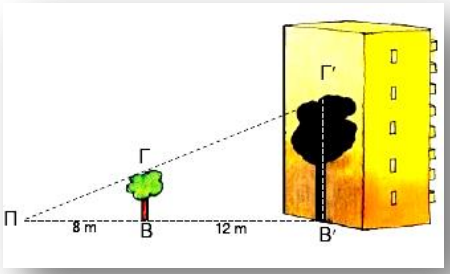
Η περίμετρος του σχήματος στην οποία κινήθηκε ο μαθητής είναι ίση με 16 φορές την πλευρά ενός μικρού τετραγώνου.
Επειδή η διαδρομή του μαθητή ήταν 640m αυτό σημαίνει ότι η πλευρά του μικρού τετραγώνου στην πραγματικότητα είναι
640 : 16 = 40 m
Τα σπίτια των δύο φίλων απέχουν απόσταση ΦΜ = 120 m
Τα 40 m = 40·100 = 4000 cm
Στο σχέδιο η πλευρά του μικρού τετραγώνου είναι 1 cm άρα η κλίμακα είναι $\frac{1}{4000}$

.//

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Ένας προβολέας Π βρίσκεται στο έδαφος και φωτίζει ένα δέντρο ΒΓ. Η σκιά του δέντρου στο απέναντι κτίριο φτάνει μέχρι την οροφή του 4ου ορόφου. Αν το ισόγειο και κάθε όροφος έχουν ύψος 3 m και η απόσταση του δέντρου από τον προβολέα είναι 8 m, ενώ από το κτίριο είναι 12 m, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

Επίλυση



Τα τρίγωνα ΠΒΓ και ΠΒ΄Γ΄ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{B} = \hat{B}' = 90^o$ και έχουν τη γωνία $\hat{\Pi}$ κοινή. Επομένως, έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΠΒ}{ΠΒ'} \quad (1).$$

Η σκιά καλύπτει το ισόγειο και 4 ορόφους, οπότε θα έχει ύψος Β΄Γ΄ = 5·3 = 15 m. Άρα η ισότητα (1) γίνεται

$$\frac{ΒΓ}{15} = \frac{8}{8+12}$$

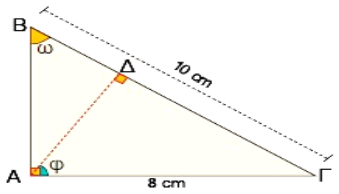
20·ΒΓ = 120, οπότε το ύψος του δέντρου είναι ΒΓ = 6 m.

12. Σ΄ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm και ΑΓ = 8 cm να χαραχθεί το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια και να γραφούν οι ίσοι λόγοι. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ και ΔΒ.

Επίλυση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και έχουν τη γωνία Γ κοινή. Δηλαδή, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια και θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους.

Ίσες γωνίες	$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$	$\hat{\Gamma}$ κοινή	$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ



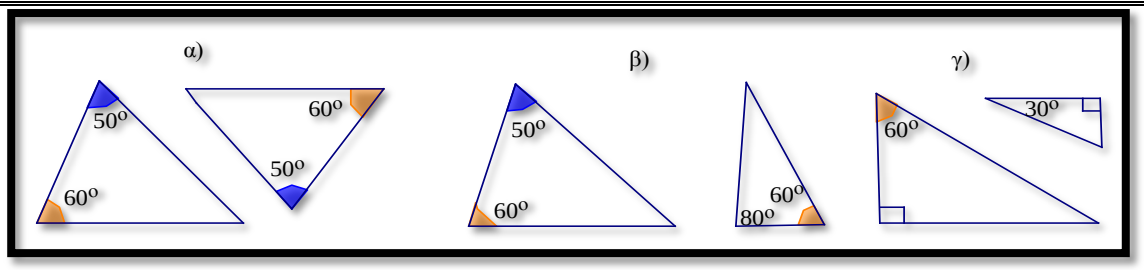
Άρα έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ (1).

Από τις ισότητες (1) έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ}$ ή $\frac{10}{8} = \frac{8}{ΔΓ}$.

Άρα 10·ΔΓ = 64, οπότε ΔΓ = 6,4 cm. Επειδή ΒΓ = 10 cm και ΔΓ = 6,4 cm έχουμε ΒΔ = 10 - 6,4 δηλαδή ΒΔ = 3,6 cm.

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

13. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;



Επίλυση

(α) Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου.

(β) Τα τρίγωνα δεν είναι όμοια διότι η τρίτη γωνία στο πρώτο τρίγωνο είναι 70° ενώ στο δεύτερο 40°.

(γ) Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι είναι ορθογώνια και η οξεία γωνία του πρώτου τριγώνου που λείπει είναι 30° δηλαδή ίση με μία οξεία γωνία του δεύτερου τριγώνου.

14. Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια

Επίλυση

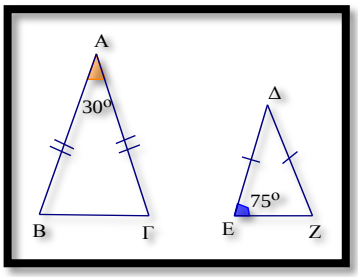
Τα τρίγωνα είναι ισοσκελή επομένως

$B = \Gamma$ και $E = Z$ Ακόμα ισχύει $A + B + \Gamma = 180^o$

άρα $30^o + 2B = 180^o$ οπότε $B = 75^o = \Gamma$

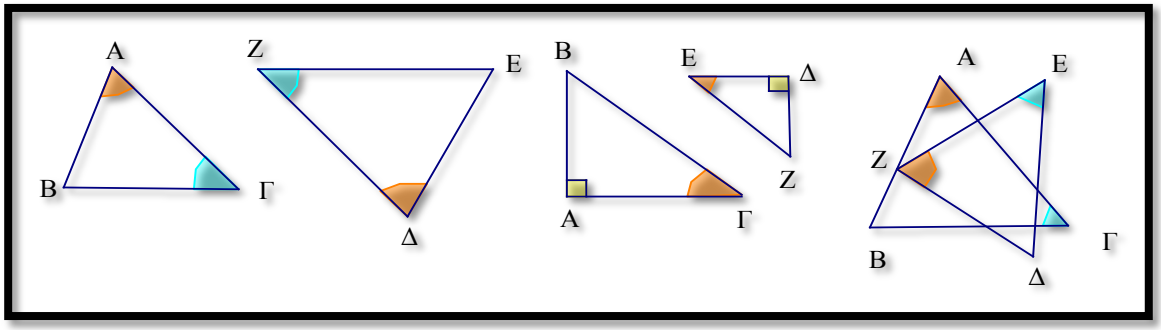
Τελικά είναι $B = \Gamma = E = Z = 75^o$ άρα

τα τρίγωνα είναι όμοια



15. Να γράψετε τους ίσους λόγους στα παρακάτω ζεύγη των ομοίων τριγώνων

α) β) γ)



Επίλυση

Για να συμπληρώσουμε σωστά τους λόγους στηριζόμαστε στη πρόταση : οι ομόλογες πλευρές ομοίων τριγώνων βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες

(α) ισχύει $\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$

(β) ισχύει $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$

(γ) ισχύει $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{E\Delta}$

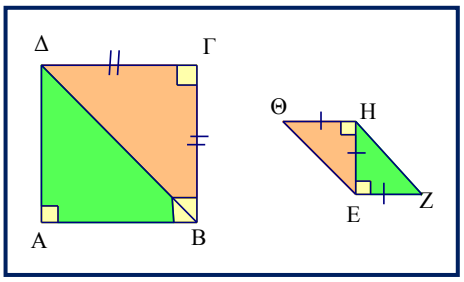
16. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.
α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια
β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια
γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες
δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια
ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40ο, είναι όμοια
στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητας

Επίλυση

α) Ναι διότι είναι ισογώνια (Σ)
β) Ναι διότι έχουν και τις ορθές γωνίες τους ίσες (Σ)
γ) Ναι από τον ορισμό της ομοιότητας (Σ)
δ) Ναι διότι έχουν τις οξείες γωνίες τους ίσες με 45° την κάθε μία (Σ)
ε) Όχι διότι στο ένα τρίγωνο μπορεί να είναι προσκείμενη στην βάση ενώ στο άλλο περιεχόμενη από τις ίσες πλευρές (Λ)
στ) Ναι είναι βασική ιδιότητα (Σ)

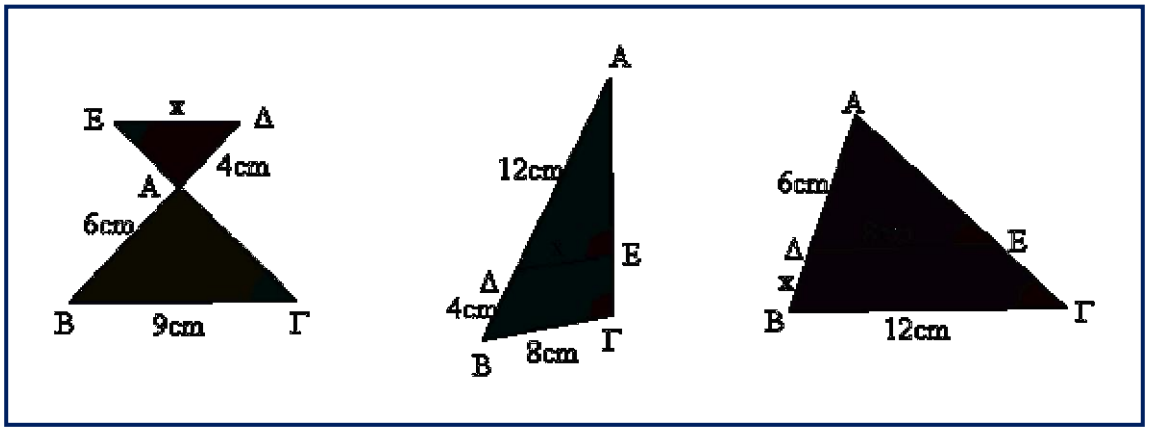
17. α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΖΗ είναι όμοια.
β) Αν δύο πολύγωνα αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ομοίων τριγώνων, είναι πάντα όμοια ;

Επίλυση



α) Είναι όμοια διότι είναι ορθογώνια και ισοσκελή συνεπώς οι οξείες γωνίες τους είναι 45° η κάθε μία.
β) Όχι διότι στο πρόβλημά μας έχουμε δύο πολύγωνα που αποτελούνται από όμοια τρίγωνα, εντούτοις τα πολύγωνα δεν είναι όμοια διότι οι γωνίες τους δεν είναι ίσες.

18. Να υπολογίσετε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις



Επίλυση

Στο πρώτο σχήμα τα τρίγωνα είναι όμοια διότι $\Epsilon = \Gamma$

και $\Epsilon A \Delta = B A \Gamma$ ως κατακορυφήν

Άρα $\frac{E\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$, $\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$, $x = 6$ cm

Στο δεύτερο σχήμα τα τρίγωνα είναι όμοια διότι $\Epsilon = \Gamma$ και A κοινή

Άρα $\frac{E\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$, $\frac{x}{8} = \frac{12}{16}$, $x = 6$ cm

Στο τρίτο σχήμα τα τρίγωνα είναι όμοια διότι $\Epsilon = \Gamma$ και A κοινή

Άρα $\frac{E\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$, $\frac{8}{12} = \frac{6}{x+6}$, $8(x + 6) = 72$

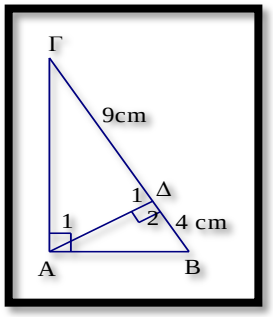
$8x + 48 = 72$

$8x = 24$

$x = 3$ cm

19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια. Αν ΔΒ = 4cm και ΔΓ = 9cm, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ .

Επίλυση



Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με $\Delta_1 = \Delta_2 = 90^o$

Επίσης $A_1 + \Gamma = 90^o$ και $B + \Gamma = 90^o$

οπότε $A_1 + \Gamma = B + \Gamma$ άρα $A_1 = B$

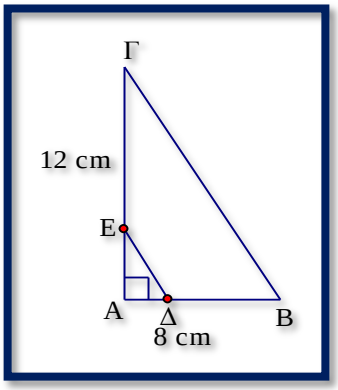
Άρα είναι όμοια.

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουμε

$\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ άρα $\frac{9}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{4}$, $A\Delta^2 = 36$, $A\Delta = 6$ cm

20. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 8cm και ΑΓ = 12cm ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε ώστε ΑΔ = 2cm και ΑΕ = 3cm. Να αποδείξετε ότι α) ΔΕ // ΒΓ β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια

Επίλυση



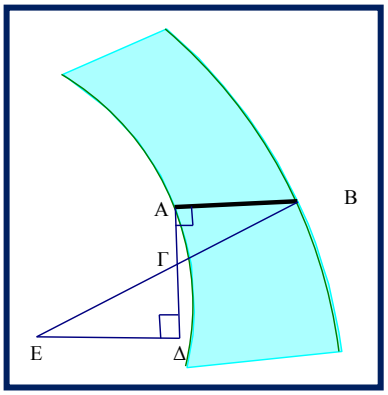
α) Είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

οπότε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, συνεπώς ΔΕ // ΒΓ

β) Τα τρίγωνα έχουν την $Α$ κοινή και αφού ΕΔ // ΒΓ είναι $Γ = Ε$ ως εντός εναλλάξ.
Άρα είναι όμοια.

21. Να βρείτε το πλάτος ΑΒ του ποταμού αν Α Γ = 12 m,ΓΔ = 28,8m , ΕΔ = 60m και $Α = Δ$ = 90ο

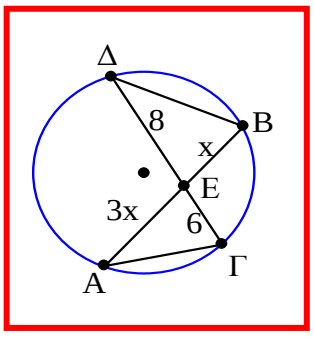
Επίλυση



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ έχουν
$ΑΓΒ = ΕΓΔ$ ως κατακορυφήν
και $Α = Δ = 90^o$
Άρα είναι όμοια,
οπότε $\frac{ΑΒ}{ΕΔ}=\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$, $\frac{ΑΒ}{60}=\frac{12}{28,8}$,
ΑΒ = 25 m

22. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.

Επίλυση

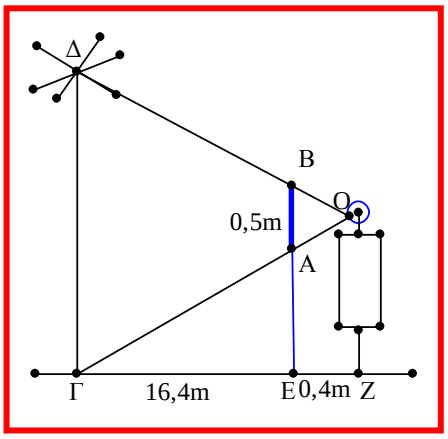


Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι έχουν
$Α = Δ$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο
και για τον ίδιο λόγο $Β = Γ$
Οπότε $\frac{ΑΕ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ}$, $\frac{3x}{8}=\frac{6}{x}$,
$x^2 = 16$ άρα x = 4

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

23. Μπροστά στο μάτι μας και σε απόσταση 0,4m κρατάμε κατακόρυφα ένα ραβδί ΑΒ = 0,5 m. Αν μετακινηθούμε και σταθούμε σε ένα σημείο Ζ τέτοιο ώστε οι ευθείες ΟΑ , ΟΒ να καταλήγουν στη βάση και στην κορυφή της κεραίας ενός ραδιοφωνικού σταθμού, διαπιστώνουμε ότι η απόσταση μας από την κεραία ΓΖ = 16,8m . Μπορείτε να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας ;

Επίλυση



Στα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ,
επειδή ΑΒ // ΓΔ
ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΓΖ,
είναι $\Delta = B$ (εντός εναλλάξ)
και O κοινή, άρα αυτά είναι όμοια.

Οπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$, $\frac{0,5}{\Gamma\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$ **(1)**

Επίσης τα τρίγωνα ΓΟΖ και ΑΓΕ
είναι όμοια, διότι είναι ορθογώνια
και έχουν την γωνία Γ κοινή.

Άρα $\frac{\Gamma A}{O\Gamma} = \frac{\Gamma E}{\Gamma Z}$, $\frac{O\Gamma - OA}{O\Gamma} = \frac{16,4}{16,8}$

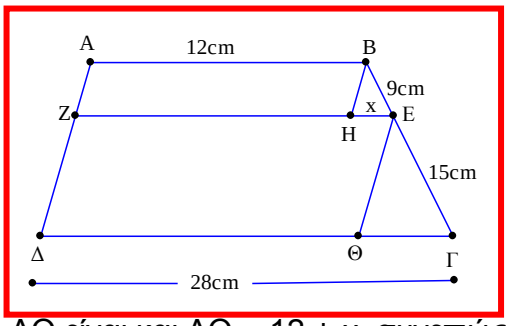
$$\frac{O\Gamma}{O\Gamma} - \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{164}{168} \text{ ή}$$

$$1 - \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{41}{42} \quad \text{άρα} \quad \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{1}{42}$$

Η (1) γίνεται $\frac{0,5}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{42}$ οπότε ΓΔ = 21 m

24. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΕΖ // ΔΓ , ΒΗ // ΑΔ και ΕΘ // ΑΔ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΗΕ , ΕΘΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x

Επίλυση



Επειδή ΕΖ // ΔΓ είναι $Z\,E\,B = \Delta\,\Gamma\,E$
ως εντός εκτός και επί τα αυτά
επίσης ΒΗ // ΕΘ ως παράλληλες στην ίδια
ευθεία άρα $H\,B\,E = \Theta\,E\,\Gamma$ επομένως
αφού τα τρίγωνα ΒΗΕ και ΕΘΓ έχουν
δύο γωνίες ίσες είναι όμοια
Τώρα από τα παραλληλόγραμμα
ΑΒΗΖ και ΖΕΘΔ έχουμε
ΑΒ = ΖΗ οπότε ΖΕ = 12 + x και επειδή ΖΕ = ΔΘ είναι και ΔΘ = 12 + x συνεπώς
ΘΓ= ΔΓ – ΔΘ = 28 – 12– x = 16 – x
Από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΗΕ και ΕΘΓ έχουμε

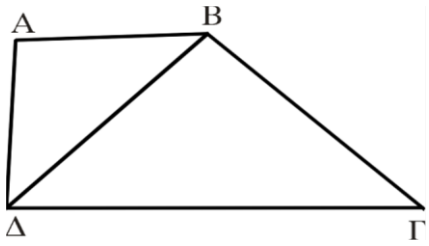
$\frac{HE}{\Theta\Gamma} = \frac{BE}{E\Gamma}$ ή $\frac{x}{16-x} = \frac{9}{15}$ ή

15x = 144 – 9x ή 24x = 144 άρα x = 6 cm

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1. Στις παρακάτω προτάσεις πρέπει να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

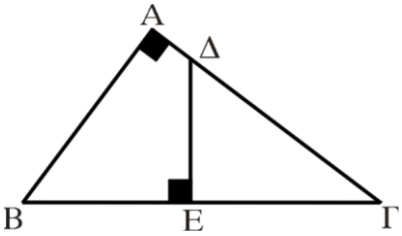


- Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι όμοια.

  Αν ΔΑ = 4, ΓΔ = 9, τότε η ΒΔ είναι:

  α) 5 β) 6 γ) $5\sqrt{3}$

  δ) 8 ε) $8 + \sqrt{3}$



- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

  (Α = 90°), ΔΕ ⊥ ΒΓ.

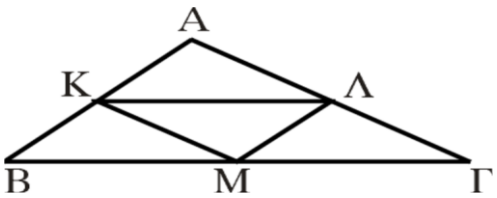
  Αν ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και ΔΕ = 4, τότε το ΕΓ ισούται με:

  α) $\frac{16}{3}$ β) $\frac{20}{3}$ γ) 5

  δ) 6 ε) $\frac{19}{4}$

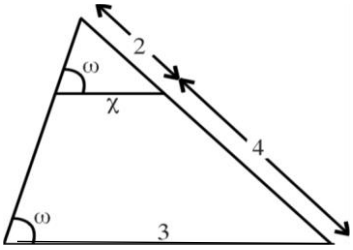
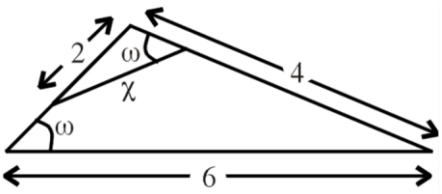
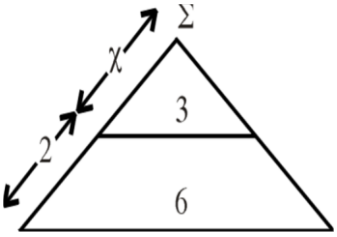
- Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκη 12 cm, 8 cm και 6 cm. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ έχει περίμετρο ίση με:

  α) 20 cm β) 18 cm γ) 14 cm δ) 13 cm ε) 10 cm

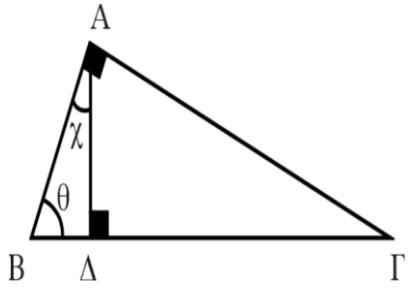


2. Δίνονται οι προτάσεις:
α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.
β) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
γ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
δ) Δύο παραλληλόγραμμα με μια γωνία ίση είναι όμοια.
Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς;
Α. όλες
Β. η (α) και η (β)
Γ. η (δ)
Δ. η (α) και η (γ)
Ε. η (β)

3.Η τιμή του x που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α), για κάθε σχήμα, δίνεται με αριθμό στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα σχήματα με τους αντίστοιχους αριθμούς.

στήλη (Α) σχήμα	**στήλη (Β)** αριθμός
	1
	1,5
	2
	3
	4
	4,5

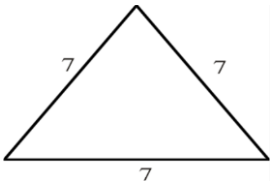
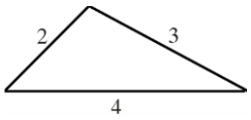
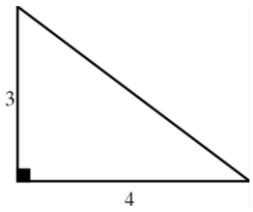
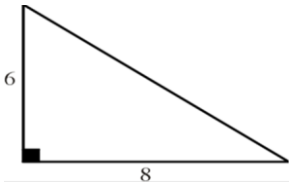
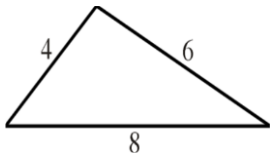
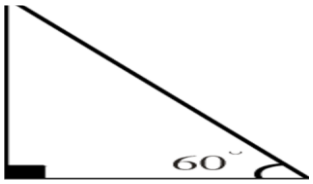
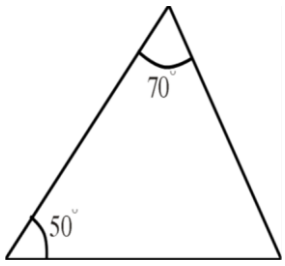
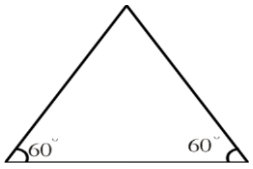
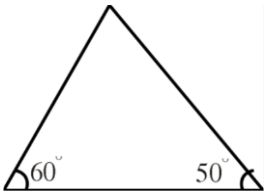
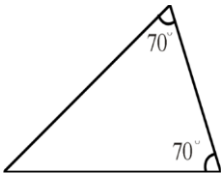
4. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΔ ύψος του.



Α. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη θ
Β. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη x
Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:
α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Α....
β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ....Β....
γ) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο με το ....Γ....
Δ. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες απαντήσεις, συμπληρώστε τις αναλογίες:

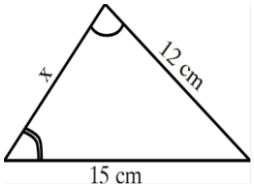
$\frac{ΑΒ}{\quad}=\frac{\quad}{ΓΔ}=\frac{ΒΔ}{\quad}$, $\frac{\quad}{ΒΔ}=\frac{ΑΓ}{\quad}=\frac{\quad}{ΒΑ}$, $\frac{ΑΔ}{\quad}=\frac{\quad}{ΒΓ}=\frac{\quad}{ΑΓ}$,

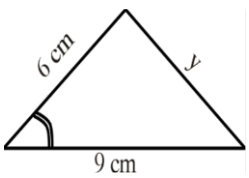
5.Κάθε τρίγωνο της πρώτης στήλης είναι όμοιο με ένα τρίγωνο της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μία γραμμή τα όμοια τρίγωνα:

στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
	
	
	
	
	
	

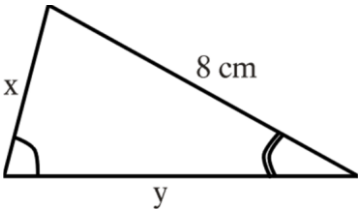
6. Για καθεμιά απ’ τις τρεις περιπτώσεις, ομοίων τριγώνων, να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

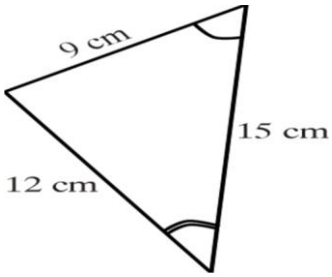
	x	y
(Α)		
(Β)		
Γ)		

(Α) 

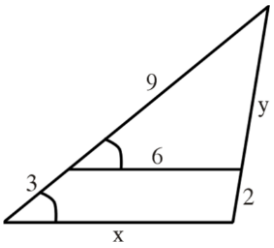


(Β)





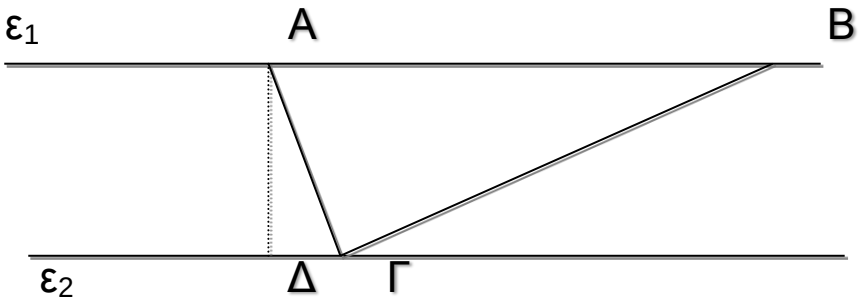
(Γ)



7. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος του ΒΔ. Έστω Μ ,Κ τα μέσα των ΒΓ και ΒΑ αντίστοιχα.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΔΜ είναι όμοια και βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

β) Γράψτε τις ισότητες των γωνιών των δύο τριγώνων που προκύπτουν από την ομοιότητά τους.



8. Το παραπάνω σχήμα παριστάνει τμήμα ενός δρόμου που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$).
Θέλουμε να χρωματίσουμε το τριγωνικό τμήμα του δρόμου ΑΒΓ στο οποίο οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι κάθετες και η ΑΓ είναι 3-πλάσια του ΔΓ.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια

β) Βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

γ) Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος που θα χρωματίσουμε γνωρίζοντας ότι το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι 10 m^2.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ και ΑΔ το ύψος του προς την υποτείνουσά του.
α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΔΒ είναι όμοια .
β) Αν ΒΔ = 4 cm , ΔΓ = 9 cm τότε το ύψος του τριγώνου ΑΔ θα είναι:
1.) 36cm **2.)** 6cm **3.)** 18cm **4.)** 8cm
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.
γ) Αν ΒΔ = 2cm και ΑΔ = 4cm υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

10. α) Απαντήστε γράφοντας Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

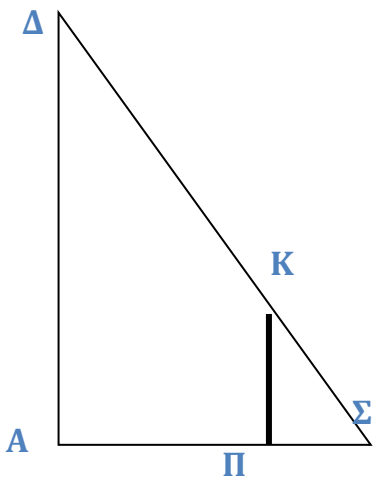
- Δύο ίσα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια. …….
- Δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα. …….
- Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των περιμέτρων τους. …….
- Το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο όμοια τρίγωνα. …….

β) Ποια από τα παρακάτω επίπεδα σχήματα είναι πάντοτε όμοια; Γράψτε , εφ' όσον είναι όμοια , το λόγο ομοιότητάς τους.

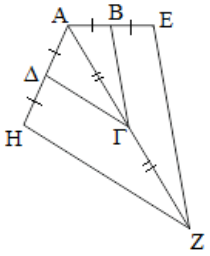
- Ορθογώνια
- Κύκλοι
- Ισόπλευρα τρίγωνα
- Παραλληλόγραμμα
- Κανονικά πολύγωνα

γ) Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ Κ , Λ , Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδό του ΚΛΜ αν το εμβαδό του ΑΒΓ είναι 20 cm^2

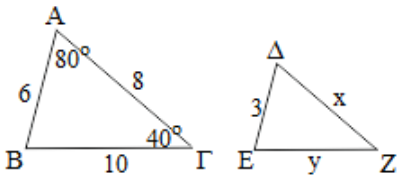
11. Για να μετρήσουμε το ύψος ενός δένδρου ΑΔ ακολουθούμε την εξής διαδικασία.
Μια ηλιόλουστη ημέρα ,όχι μεσημέρι, μετράμε τη σκιά του δένδρου ΑΣ .Κατόπιν τοποθετούμε έναν πάσαλο ύψους ενός μέτρου κάθετα ώστε η σκιά του να είναι ακριβώς η ΠΣ την οποία πρέπει να μετρήσουμε.
Να υπολογίσετε το ύψος ενός δένδρου αν γνωρίζουμε ότι η σκιά του είναι 6 m και η σκιά του πασάλου 2 m.



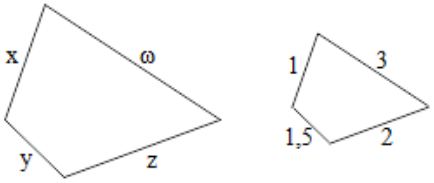
12) Αν τα σημεία Β, Γ, Δ είναι τα μέσα των ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το ΑΕΖΗ.



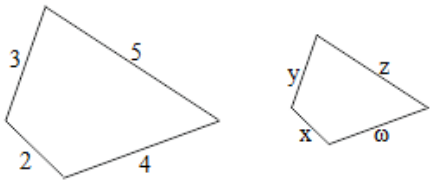
13) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια να βρείτε τα x, y και τις γωνίες Δ, Ε, Ζ.



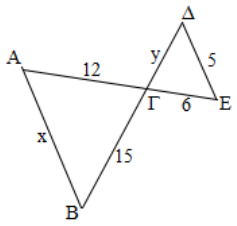
14) Αν τα τετράπλευρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ=4, να βρείτε τα x, y, z, ω.



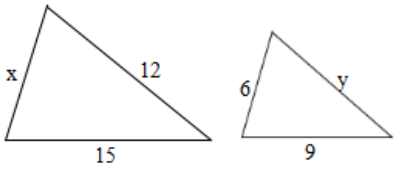
15) Αν τα τετράπλευρα είναι όμοια και η περίμετρος του "μικρού" είναι Π=28,, να βρείτε τα x, y, z, ω.



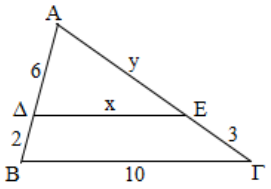
16) Αν ΑΒ//ΔΕ να βρείτε τα x, y.



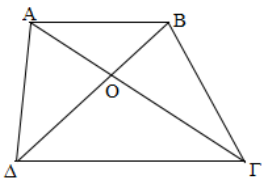
17) Αν τα τρίγωνα είναι όμοια, να βρείτε τα x, y.



18) Αν ΒΓ//ΔΕ να βρείτε τα x, y.



19) Αν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο να δείξετε ότι ΑΟΒ≈ΓΟΔ.

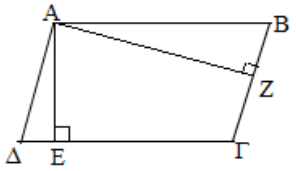


Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών.
E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

20) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΑΔ.

α) Να δείξετε ότι ΑΔΕ≈ΑΒΖ.

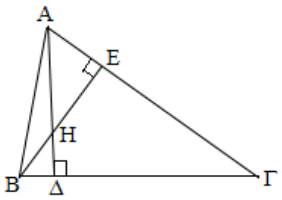
β) Να γράψετε την αναλογία των πλευρών.



21) Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΕ και ΑΔ.

α) Να δείξετε ότι ΑΗΕ≈ΒΗΔ.

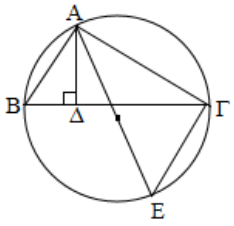
β) Να γράψετε την αναλογία των πλευρών.



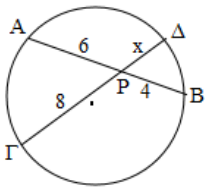
22) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και ΑΔ είναι το ύψος του. Αν η ΑΕ είναι διάμετρος,:

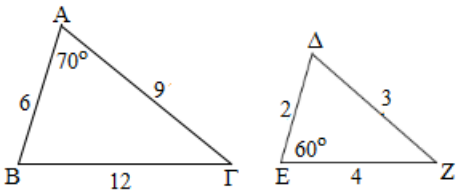
α) Να δείξετε ότι ΑΒΔ≈ΑΓΕ.

β) Να γράψετε την αναλογία των πλευρών.



23) Να βρείτε το x.





24) α) Να δείξετε ότι ΑΒΓ≈ΔΕΖ.

β) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες.

Copyright: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**