ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3Ο

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1Ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. *Γραφική λύση γραμμικών συστημάτων 2x2*

Όπως γνωρίζουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει μορφή $\begin{cases} A_1x + By_1 = \Gamma_1 \\ A_2x + B_2y = \Gamma_2 \end{cases}$

με A_1, B_1, Γ_1, A_2, B_2, Γ_2 πραγματικούς αριθμούς.

Για να έχει πρακτική σημασία η γραφική λύση τέτοιων συστημάτων θα πρέπει και οι δύο εξισώσεις του συστήματος να παρουσιάζονται με ευθείες στο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς.

Όπως γνωρίσαμε στην αρχή της παραγράφου, οι ευθείες που παρουσιάζονται με εξίσωση ή τύπο συνάρτησης μπορεί να είναι:

- Κάθετες στον άξονα x'x ή επιπλέον να συμπίπτουν με τον y'y.
- Παράλληλες με τον άξονα x'x ή να ταυτίζονται μ' αυτόν.
- Να τέμνουν τους δύο άξονες σε δύο σημεία ή να περνούν απ' την αρχή των αξόνων.

Έτσι οι μορφές του συστήματος 2x2 που μας ενδιαφέρει η γραφική του λύση είναι οι εξής:

i) Δύο ευθείες κάθετες στον άξονα x'x

Τέτοιας μορφής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$(\Sigma_1)\begin{cases} 3x = 6 \\ -2x = 4 \end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases} 2x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ $(\Sigma_3)\begin{cases} x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$

ii) Μια ευθεία κάθετη και μια παράλληλη προς τον x'x

Τέτοιας μορφής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x = 5 \\ -y = 3 \end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases} 4x = 8 \\ 2y = 0 \end{cases}$ $(\Sigma_3)\begin{cases} -2x = 0 \\ 4y = 6 \end{cases}$ $(\Sigma_4)\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

iii) Μια ευθεία κάθετη στον άξονα x'x και μια που τέμνει τους άξονες

Τέτοιας μορφής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x = -2 \\ 2y = x \end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases} x = -1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ $(\Sigma_3)\begin{cases} 4x = 0 \\ 3y = 6x \end{cases}$ $(\Sigma_4)\begin{cases} -5x = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$

iv) Δύο ευθείες παράλληλες με τον άξονα x'x

Τέτοιας μοργής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}2y=1\\4y=8\end{cases}\quad(\Sigma_2)\begin{cases}y=0\\3y=6\end{cases}\quad(\Sigma_3)\begin{cases}-2y=0\\4y=0\end{cases}\quad(\Sigma_4)\begin{cases}2y=4\\y=2\end{cases}$$

v) Μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα x'x και μια που τέμνει τους άξονες

Τέτοιας μορφής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}2y=1\\3y=x\end{cases}\quad(\Sigma_2)\begin{cases}y=-2\\y=2x-1\end{cases}\quad(\Sigma_3)\begin{cases}3y=0\\2y=4x\end{cases}\quad(\Sigma_4)\begin{cases}y=0\\y=3x-1\end{cases}$$

vi) Δύο ευθείες που τέμνουν κάθε μία τους άξονες

Τέτοιας μορφής είναι για παράδειγμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}2x+y=0\\x+y=4\end{cases}\quad(\Sigma_2)\begin{cases}y=-3x\\2y+6x=0\end{cases}\quad(\Sigma_3)\begin{cases}y=2x-1\\4y-2x=2\end{cases}\quad(\Sigma_4)\begin{cases}y=2x-4\\y=x-3\end{cases}$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρείτε σε ποιες από τις παραπάνω έξι περιπτώσεις οι δύο ευθείες μπορεί να συμπίπτουν.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases}3x-2y=0\\3x+2y=12\end{cases}$$

2. Να λυθεί γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases}2x+y=-2\\6x+3y=12\end{cases}$$

3. Να λυθεί γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases}-x+y=2\\x-y=-2\end{cases}$$

4. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 4x = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 4y - x = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ 7y = 0 \end{cases}$ v) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

5. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x = y \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 4y + 3x = 8 \\ y = -\frac{3}{4}x + 3 \end{cases}$

6. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{|x-3| + |x+3|}{3}$ και πεδίο ορισμού Α=[-3, 3] είναι σταθερή. Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x + |x|}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2.Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Εκτός από τις εξισώσεις με έναν άγνωστο, υπάρχουν και εξισώσεις με δύο ή και με περισσότερους αγνώστους.

Η $x+y=10$ είναι μια εξίσωση που έχει δύο αγνώστους, το x και το y.

Αυτή η εξίσωση επαληθεύεται με τις τιμές $x=1$και $y=9$.

Γι' αυτό το διατεταγμένο[1] ζεύγος $(x,y)=(1,9)$ λέμε ότι είναι λύση της.

Αυτή δεν είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης, γιατί, αν βάλουμε στο x την τιμή 2 και λύσουμε ως προς y, θα βρούμε $y=8$, δηλαδή και το διατεταγμένο ζεύγος $(x,y)=(2,8)$ είναι λύση της εξίσωσης.

Έτσι μπορούμε να βρούμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης. Αυτό δε σημαίνει ότι η $x+y=10$ είναι μια ταυτότητα, γιατί η ισότητα αυτή δεν επαληθεύεται για **οποιεσδήποτε** τιμές των μεταβλητών της.

Π.χ. το ζεύγος $(x,y)=(1,5)$ δεν την επαληθεύει.

Γενικά: **Η εξίσωση που μπορεί να γραφεί με τη μορφή $\alpha x+\beta y=\gamma$, όπου x και y άγνωστοι και α,β,γ σταθεροί αριθμοί (που δεν εξαρτώνται από τα x,y), λέγεται εξίσωση α΄ βαθμού με δύο αγνώστους**[2].

Δύο εξισώσεις της παραπάνω μορφής, για τις οποίες θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις π.χ. $x+2y=1$ και $3x-5y=14$, λέμε ότι αποτελούν ένα **σύστημα α΄ βαθμού δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** (ή αλλιώς, ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους**).

Αν δεν υπάρχουν κοινές λύσεις αυτών των εξισώσεων, λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**, ενώ αν όλες οι λύσεις της μιας είναι και λύσεις της άλλης, λέμε ότι είναι **αόριστο**.

Συστήματα που έχουν τις ίδιες λύσεις λέγονται **ισοδύναμα.**

Στο Γυμνάσιο μάθαμε να λύνουμε τέτοια συστήματα και είδαμε ότι αυτά ή θα έχουν μία μόνο λύση ή θα είναι αδύνατα ή θα είναι αόριστα.

Παρακάτω υπενθυμίζουμε τις δυο βασικότερες μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την αλγεβρική επίλυση του πρωτοβάθμιου συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Με τις μεθόδους αυτές μετατρέπουμε το σύστημα σε άλλο ισοδύναμο και απλούστερο, από το οποίο

προκύπτουν εύκολα οι λύσεις.

Μέθοδος της αντικατάστασης	**Λύνουμε τη μια εξίσωση** (την απλούστερη) **ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.**

$x+3y=14$ (1) $5x+10y=47$ (2)	Λύνουμε την (1) ως προς x. Έχουμε $x=14–3y$
$\left\lvert \begin{array}{l} x=14-3y \\ 5x+10y=47 \end{array}\right.$	Αντικαθιστούμε το x με το ίσο του $14–3y$ στην άλλη εξίσωση
$\left\lvert \begin{array}{l} x=14-3y \\ 5(14-3y)+10y=47 \end{array}\right.$	Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που είναι α΄βαθμού με άγνωστο το y. Έχουμε: $70–15y+10y=47$ ή $–5y=47–70$ ή $–5y=–23$ ή $y=\frac{-23}{-5}=4{,}6$
$\left\lvert \begin{array}{l} x=14-3y \\ y=4{,}6 \end{array}\right.$	Αντικαθιστούμε την τιμή του y που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση.

$\left\lvert \begin{array}{l} x=14-3\cdot 4{,}6 = 14-13{,}8 = 0{,}2 \\ y=4{,}6 \end{array}\right.$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $(x,y) = (0{,}2,\ 4{,}6)$

(Σημείωση: Η μέθοδος της αντικατάστασης μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα που δεν είναι γραμμικά**)**

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών	**Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές ενός αγνώστου, και προσθέτουμε κατά μέλη. Προκύπτει έτσι μια εξίσωση με έναν άγνωστο.**

$\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\left\lvert \begin{array}{l} x+2y=1 \quad (1) \\ 3x-5y=14 \quad (2) \end{array}\right.$	Πολλ/ζουμε τα μέλη της (1) με το 5 και της (2) με το 2, για να γίνουν αντίθετοι οι συντελεστές του y
$\left\lvert \begin{array}{l} 5(x+2y)=15 \\ 2(3x-5y)=2\cdot 14 \end{array}\right.$	Κάνουμε τις πράξεις (Επιμεριστική ιδιότητα)
$\left\lvert \begin{array}{l} 5x+10y=5 \\ 6x-10y=28 \end{array}\right.$	Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (Ιδιότητα στις ισότητες). Βρίσκουμε: $11x+0y=33$ ή $11x=33$ Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις π.χ. την πρώτη με την $11x=33$
$\left\lvert \begin{array}{l} 11x=33 \\ 6x-10y=28 \end{array}\right.$ ή $\left\lvert \begin{array}{l} x=3 \\ 6x-10y=28 \end{array}\right.$	Θέτουμε στη δεύτερη όπου x το 3

$\left| \begin{array}{l} x = 3 \\ 6 \cdot 3 - 10y = 28 \end{array} \right.$ Λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση, που έχει μοναδικό άγνωστο το y. $18-10y=28$ ή $-10y=28-18$ ή $-10y=10$ ή $y=-1$

$\left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array} \right.$ Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(3,-1)$

(Για να δούμε αν σωστά λύθηκε το σύστημα κάνουμε την επαλήθευση: Η πρώτη εξίσωση δίνει: $3+2(-1)=3-2=1$ και η δεύτερη $3\cdot 3-5(-1)=9+5=14$. Βλέπουμε ότι επαληθεύονται και οι δύο, άρα, η λύση που βρήκαμε είναι σωστή)

3.Συστήματα α΄ βαθμού με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους

Η εξίσωση $2x+y+\omega = 2$ είναι μια εξίσωση α΄ βαθμού με τρεις αγνώστους. Για $x=1$ και $y=3$, αυτή γίνεται $2+3+\omega=2$, από την οποία βρίσκουμε $\omega= -3$. Η διατεταγμένη τριάδα $(x,y,\omega)=(1,3,-3)$ είναι μια λύση της.

Όταν θέλουμε να βρούμε τις κοινές λύσεις τριών τέτοιων εξισώσεων, λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

Από τις διάφορες μεθόδους επίλυσης τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιείται κυρίως η λεγόμενη **μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών**, τα βήματα της οποίας θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

$\begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} x+3y-4\omega=-1 \\ 1 \\ 2x+y+\omega=2 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} 2x+6y-8\omega=-22 \\ -2x-y-\omega=-2 \end{array} \right.$ Προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε $\mathbf{5y - 9\omega = -24}$ (2΄)

Παραδειγμα: Να λυθεί το σύστημα (Σ_1) $\begin{array}{ll} x+3y-4\omega=-11 & (1) \\ 2x+y+\omega=2 & (2) \\ 3x-y-6\omega=3 & (3) \end{array}$

Το σύστημα (Σ_2) $\left| \begin{array}{r} x+3y-4\omega=-11 \\ 5y-9\omega=-24 \\ 10y-6\omega=-36 \end{array} \right.$ είναι ισοδύναμο του (Σ_1)

ΛΥΣΗ

- Παίρνουμε τις εξισώσεις (1) και (2) και απαλείφουμε (με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών) έναν άγνωστο π.χ. τον x.

Το σύστημα (Σ_3) $\left| \begin{array}{r} x+3y-4\omega=-11 \\ 5y-9\omega=-24 \\ \omega=1 \end{array} \right.$ είναι ισοδύναμο του (Σ_2), άρα και του (Σ_1)

$\begin{array}{r} 3 \\ -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} x+3y-4\omega=-1 \\ 1 \\ 3x-y-6\omega=3 \end{array} \right.$ ή $\left| \begin{array}{l} 3x+9y-12\omega=-33 \\ -3x+y+6\omega=-3 \end{array} \right.$ Προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε $\mathbf{10y - 6\omega = -36}$ (3΄)

•Παίρνουμε τις εξισώσεις (1) και (3) και απαλοίφουμε τον **ίδιο** άγνωστο.

• Παίρνουμε τις εξισώσεις (2΄) και (3΄) και απαλοίφουμε τον άγνωστο y

2	$5y-9\omega=-24$	ή	$10y-18\omega=-48$	Προσθέτουμε κατά μέλη
-1	$10y-6\omega=-36$		$-10y+6\omega=36$	και βρίσκουμε $\mathbf{-12\omega=-12}$
				οπότε $\mathbf{\omega=1}$

•Το (Σ_3) όμως λύνεται εύκολα, αφού ένας άγνωστος, ο ω, έχει βρεθεί. Έτσι στο (Σ_3) αντικαθιστούμε το $\omega=1$ στη δεύτερη εξίσωση και βρίσκουμε τον άγνωστο y.

$5y-9\cdot1=-24$ ή $5y=-24+9$ ή $5y=-15$ ή $\mathbf{y=-3}$.

Αντικαθιστούμε τώρα το $\omega=1$ και το $y=-3$ στην πρώτη εξίσωση του (Σ_3) και βρίσκουμε και τον άγνωστο x.

$x+3(-3)-4\cdot1=-11$ ή $x-9-4=-11$ ή $x=-11+9+4$ ή $\mathbf{x=2}$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{(x,y,\omega)=(2,-3,1)}$.

Το σύστημα (Σ_3), του οποίου οι εξισώσεις έχουν ένα, δύο, τρεις αγνώστους αντιστοίχως, λέγεται **κλιμακωτό σύστημα.**

(**Σημείωση:** Αν κατά τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου διαπιστώσουμε ότι κάποια από τις εξισώσεις είναι αδύνατη (π.χ. πάρει τη μορφή $0y+0\omega=\gamma$ με $\gamma\neq0$), τότε και το αρχικό σύστημα θα είναι αδύνατο).

4. Προβλήματα που λύνονται με γραμμικά συστήματα.

Πρόβλημα 1

Αν ο Νίκος δώσει 100 δρχ στο Γιώργο, τότε ο Γιώργος θα έχει 3-πλάσια χρήματα από το Νίκο. Αν ο Γιώργος δώσει 200 δρχ στο Νίκο, τότε ο Νίκος θα έχει 2-πλάσια χρήματα από το Γιώργο. Πόσα χρήματα έχει καθένας τους;

ΛΥΣΗ

Ας ονομάσουμε x δρχ τα χρήματα του Νίκου και y δρχ τα χρήματα του Γιώργου. Αν ο Νίκος δώσει τις 100 δρχ , θα του μείνουν $x-100$ και ο Γιώργος θα έχει $y+100$. Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, θα έχουμε την εξίσωση**:** $\mathbf{3(x-100)=y+100}$

Αν ο Γιώργος δώσει τις 200 δρχ , θα του μείνουν $y-200$ και ο Νίκος θα έχει $x+200$. Σύμφωνα με την εκφώνηση, θα έχουμε την εξίσωση :$\mathbf{x+200=2(y-200)}$

Οι εξισώσεις που βρήκαμε σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα x και y, που παριστάνουν θετικούς αριθμούς.

$\begin{cases} 3x-300 = y+100 \\ x+200 = 2y-400 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-y = 300+100 \\ x = 2y-400-200 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-y = 400 \\ x = 2y-600 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3(2y-600)-y=400 \\ x = 2y-600 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(x-100) = y+100 \\ x+200 = 2(y-200) \end{cases}$ Κάνουμε τις πράξεις, για να γράψουμε πιο απλά τις εξισώσεις, και λύνουμε τη δεύτερη ως προς x

$\begin{cases} 5y = 220 \\ x = 2y-600 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 440 \\ x = 2y-600 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 440 \\ x = 2{\cdot}440-600=280 \end{cases}$

Η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(280,440)$ και είναι δεκτή.

Άρα, ο Νίκος είχε 280 δρχ και ο Γιώργος 440.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ποσότητες των υγρών που περιέχονται σε δυο δοχεία α΄ και β΄, αν γνωρίζουμε ότι: i) Αν αυξηθεί κατά 1 λίτρο το 3-πλάσιο της ποσότητας του α΄, θα βρούμε το 4-πλάσιο της ποσότητας του β΄. ii) Αν μειώσουμε κατά 1 λίτρο το 2-πλάσιο της ποσότητας του β΄, θα βρούμε την ποσότητα του α΄.

ΛΥΣΗ

Έστω x λίτρα η ποσότητα του α΄ και y λίτρα η ποσότητα του β΄. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε τις εξισώσεις: $\mathbf{3x+1 = 4y}$ και $\mathbf{2y-1 = x}$ όπου x,y είναι θετικοί αριθμοί. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων με τη μέθοδο της αντικατάστασης, αφού η δεύτερη είναι ήδη λυμένη ως προς x.

$\begin{cases} 3x+1=4y \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3(2y-1)+1=4y \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 6y-3+1=4y \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 6y-4y=3-1 \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2y=2 \\ 2y-1=x \end{cases}$

$\begin{cases} 2y = 2 \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 1 \\ 2y-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 1 \\ 2{\cdot}1-1=x \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Λύση $(x,y)=(1,1)$ δεκτή. Άρα, τα δοχεία έχουν από 1 λίτρο το καθένα.

Πρόβλημα 3

Δύο κράματα αργύρου α΄ και β΄ έχουν περιεκτικότητα σε άργυρο 30% και 50% αντιστοίχως. Πόσα gr από κάθε κράμα πρέπει να πάρουμε, ώστε να έχουμε ένα νέο κράμα 80 gr με περιεκτικότητα 42% σε άργυρο;

ΛΥΣΗ

Ας ονομάσουμε x και y την ποσότητα (σε gr) που θα πάρουμε από τα κράματα α΄ και β΄ αντιστοίχως. Επειδή το νέο κράμα είναι 80 gr, έχουμε την εξίσωση: **x+y= 80**

Τα x gr του α΄ κράματος περιέχουν $\frac{30}{100}x$ άργυρο και τα y gr του β΄κράματος περιέχουν $\frac{50}{100}y$ άργυρο.

Τα 80 gr του νέου κράματος περιέχουν $\frac{42}{100}\cdot 80$ άργυρο. Η ποσότητα όμως του αργύρου στο νέο κράμα είναι το άθροισμα των ποσοτήτων του αργύρου που πήραμε από τα κράματα α΄ και β΄. Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$\mathbf{\frac{30}{100}x+\frac{50}{100}y=\frac{42}{100}\cdot 80}$$

Οι άγνωστοι των εξισώσεων που σχηματίσαμε είναι θετικοί αριθμοί, μικρότεροι του 80.

$$\left|\begin{array}{l} x+y=80 \\ \frac{30}{100}x+\frac{50}{100}y=\frac{42}{100}\cdot 80 \end{array}\right.$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών στη δεύτερη εξίσωση πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της με το 100.

$$\left|\begin{array}{l} x+y=80 \\ 30x+50y=42\cdot 80 \end{array}\right.$$

Απλοποιούμε τη δεύτερη εξίσωση διαιρώντας τα μέλη της με το 10.

$$\left|\begin{array}{l} x+y=80 \\ 3x+5y=336 \end{array}\right.$$

Λύνουμε το σύστημα και διαδοχικά έχουμε:

$$\left|\begin{array}{l} x=80-y \\ 3x+5y=336 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=80-y \\ 3(80-y)+5y=336 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=80-y \\ 240-3y+5y=336 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=80-y \\ 2y=336-240 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x=80-y \\ 2y=96 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=80-y \\ y=48 \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=80-48=32 \\ y=48 \end{array}\right.$$

Λύση $(x,y)=(32,48)$ δεκτή.

Άρα, θα πάρουμε 32 gr από το α΄κράμα και 48 gr από το β΄.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι αριθμοί x και y, ώστε να ισχύει $(x+y+6)^2+(y-2x)^2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Για να είναι το άθροισμα δύο αριθμών 0, δύο περιπτώσεις υπάρχουν. Ή να είναι και οι δύο 0 ή να είναι αντίθετοι. Αν αποκλείσουμε τη μια περίπτωση, τότε υποχρεωτικά θα ισχύει η άλλη. Έτσι, αν πούμε ότι είναι αντίθετοι οι αριθμοί $(x+y+6)^2$ και $(y-2x)^2$, τότε κάποιος από αυτούς είναι αρνητικός. Αυτό όμως είναι **άτοπο**, γιατί οι αριθμοί αυτοί, αφού είναι δυνάμεις με εκθέτη το 2, είναι μη αρνητικοί. Άρα, οι προσθετέοι του αθροίσματος πρέπει να είναι και οι δύο ίσοι με το 0.

Δηλαδή πρέπει να ισχύει $(x+y+6)^2=0$ **και** $(y-2x)^2=0$, οπότε $x+y+6=0$ **και** $y-2x=0$.

Έχουμε πει (παράγρ. 1.5) ότι ο σύνδεσμος «**και**» συνδέει δύο ισχυρισμούς στην περίπτωση που και οι δύο αληθεύουν. Αυτό σημαίνει εδώ ότι ζητάμε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $x+y+6=0$, $y-2x=0$, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\left|\begin{array}{l} x+y+6=0 \\ y-2x=0 \end{array}\right.$$

Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και διαδοχικά έχουμε:

$$\left|\begin{array}{l} x+y+6=0 \\ y=2x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x+2x+6=0 \\ y=2x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} 3x=-6 \\ y=2x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=2x \end{array}\right. \text{ ή } \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-4 \end{array}\right.$$

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $(x,y) = (-2,-4)$

1. *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.*

2. Δίνεται η εξίσωση: x–2y=10. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη (x,y) είναι λύσεις της; (Βάλτε + στο πλαίσιο)

(–1,4) ☐ (12,1) ☐ (1,–5) ☐ (–2, –6) ☐ (10,0) ☐ (8,–1) ☐

2. Το ζεύγος (x,y) που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + (x - y)^2 = 0$ είναι:

Α: (1,0) Β: (–1,1) Γ: (0,0) Δ: (0,–1) Ε: (2,2)

3. Το σύστημα

$$\left|\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ 0\alpha + \beta = 1 \end{array}\right.$$

έχει λύση το ζεύγος (α,β) που ισούται με:

Α: (0,1) Β: (1,0) Γ: (0,0) Δ: (1,1) Ε: (1, –1)

14. Να γράψετε μια εξίσωση α′ βαθμού με έναν άγνωστο η οποία να είναι αδύνατη και μια άλλη που να έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

15. Ποια είναι η γνώμη σας για τις λύσεις της κλασματικής εξίσωσης $\frac{2(x-1)}{x-1} = 0$;

16. Ποιές τιμές δεν μπορεί να πάρει η μεταβλητή d στον τύπο $K = \frac{d+1}{d^2 - 4}$;

17. Το σύστημα

$$\left|\begin{array}{r} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{array}\right.$$

έχει λύση την τριάδα (α,β,γ) που ισούται με:

Α: (0,0,1) Β: (0,1,0) Γ: (1,1,0) Δ: (0,1,1) Ε: (1,0,1).

8. Δίνεται η εξίσωση $x(x-1)(x^2+1)=0$. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή με Λ (λάθος) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Η εξίσωση είναι αδύνατη.	☐
ii) Ο αριθμός –1 είναι λύση της.	☐
iii) Οι λύσεις της είναι οι αριθμοί 0 και 1.	☐
iv) Η εξίσωση έχει τρεις λύσεις.	☐
v) Μόνο το 0 είναι λύση της.	☐

2. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Εν σύστημα 3χ3 έχει λύση. Τότε η λύση του είναι :

Α		μια διατεταγμένη τριάδα.
Β		μια διατεταγμένη δυάδα.
Γ		πάντοτε η μηδενική.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Το ομογενές σύστημα 3χ3 είναι :

Α		αδύνατο.
Β		πάντοτε συμβιβαστό.
Γ		αδύνατο ή αόριστο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Η γραφική παράσταση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους:

Α		είναι σημείο.
Β		είναι ευθεία.
Γ		τίποτα από τα παραπάνω.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Ένα γραμμικό σύστημα 3χ3 έχει λύσεις :

Α		μόνο μία διατεταγμένη τριάδα.
Β		άπειρα σημεία ενός επιπέδου.
Γ		μία ή καμία ή άπειρες.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Τα προβλήματα λύνονται με τα συστήματα εξισώσεων :

Α		πάντοτε.
Β		μόνο μερικές φορές.
Γ		ποτέ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6Η

Το κλιμακωτό σύστημα 3χ3 έχει τρεις εξισώσεις :

Α	η πρώτη με τρεις αγνώστους, η δεύτερη με δύο και η τρίτη με έναν άγνωστο.
Β	με τρεις αγνώστους η καθεμιά
Γ	με δύο αγνώστους η πρώτη και τρεις η τρίτη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7Η

Το ομογενές σύστημα 3χ3 είναι το σύστημα που έχει :

Α	τουλάχιστον ένα σταθερό όρο μηδέν.
Β	όλους τους σταθερούς όρους μηδέν.
Γ	όλους τους σταθερούς όρους διαφορετικούς μεταξύ τους.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8Η

Ένα ομογενές σύστημα 3χ3 είναι :

Α	πάντοτε αδύνατο.
Β	μερικές φορές αδύνατο.
Γ	πάντοτε συμβιβαστό.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9Η

Σε ένα συμμετρικό σύστημα εναλλάσσοντας τους άγνωστους το σύστημα που προκύπτει :

Α	δεν μεταβάλλεται.
Β	μεταβάλλεται πάντοτε.
Γ	γίνεται αδύνατο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10Η

Ένα μη ομογενές σύστημα 3χ3 έχει για λύση :

Α	μερικές φορές τη μηδενική.
Β	πάντοτε τη μηδενική.
Γ	μια διατεταγμένη τριάδα και ποτέ τη μηδενική.

3. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ........ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ.......

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε......	με όταν...

Ερώτηση α)

.... ένα σύστημα 3χ3 μη ομογενές είναι συμβιβαστό ;

Ερώτηση β)

.... ένα σύστημα 3χ3 ομογενές έχει λύση ;

Ερώτηση γ)

.... ένα κλιμακωτό σύστημα 3χ3 είναι αδύνατο ;

Ερώτηση δ)

.... ένα σύστημα 3χ3 είναι αόριστο;

Ερώτηση ε)

.... ένα σύστημα 4χ3 έχει μία μόνο λύση ;

Ερώτηση στ)

.... ένα σύστημα 3χ3 είναι κλιμακωτό;

Ερώτηση ζ)

..........ένα σύστημα 3χ3 είναι ασυμβίβαστο;

Ερώτηση η)

.... μια διατεταγμένη τριάδα είναι λύση ενός συστήματος;

Ερώτηση θ)

.... ένα ομογενές σύστημα είναι αδύνατο;

Ερώτηση ι)

.... ένα σύστημα είναι συμμετρικό;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Δίνεται το σύστημα: $5x + 8y = 91$
$8x + 5y = 52$

Προσθέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του. Αφαιρέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του.
Στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα των δύο νέων εξισώσεων που προέκυψαν.

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών:

α) $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$, $x + y = 24$ β) $\frac{x}{8} = \frac{y}{3}$, $x - y = 20$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με όποια μέθοδο θέλετε:

α) i) $5x - y = 13$, $-2x + 3y = 28$ ii) $7x - 4y = 102$, $5x + 4y = 42$

β) i) $7x - 4y = 23{,}7$, $3x + 5y = 30{,}3$ ii) $5{,}5x - 12y = 44{,}65$, $11{,}5x + 7{,}5y = 18{,}4$

γ) i) $\alpha + \beta = 10$, $\beta + \gamma = 25$, $\gamma + \delta = 15$ ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{5}$, $3x + y - \omega = 15$

4. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $y = 2x^2$, $-2x + y = 4$ β) $x - y = 1$, $x^2 - y^2 = 3$ γ) $x + y = \frac{5}{2}$, $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}$

5. Ένα πρόβλημα του Διοφάντου (325-409 μ.Χ.)

Το παρακάτω πρόβλημα διατυπώθηκε από το Διόφαντο και προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών. Του Luca Pacioli (15ος αι.), των Tartaglia και Viete (16ος αι.) και του Euler (18ος αι.). Βρίσκεται στο σύγγραμμα Logistique de Buteon (1559 μ.Χ.) και η εκφώνησή του έχει ως εξής:

«Δίνεται ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Να βρείτε τρεις αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος με το ήμισυ των δύο άλλων, ο

δεύτερος με το $\frac{1}{3}$ των δύο άλλων και ο τρίτος με το $\frac{1}{4}$ των άλλων να έχουν άθροισμα τον δοθέντα αριθμό».
Να λυθεί το πρόβλημα όταν ο αριθμός που δίνεται είναι ο 136.

6. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.

7.Να υπολογίσετε τα α και β γνωρίζοντας οτι:

i) $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}$ και $\alpha+\beta=18$ ii) $\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha}{3}$ και $\alpha-\beta=20$.

8. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 2x+y=7 \\ 4+5y=3x \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} 3x+5y=8 \\ 4x-2y=1 \end{array}\right.$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 3(x+7y)=-4 \\ 9(3+x)=5(y+3) \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} 3(\varphi-3\omega)=5(3\omega-\varphi) \\ 2(3\varphi-\omega)=3(4\omega+\varphi)+5 \end{array}\right.$

10. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\left|\begin{array}{l} 3x+y=6 \\ 2(x+1)-(y+1)=3 \end{array}\right.$ ii) $\left|\begin{array}{l} x-y=3(2-x)+2y \\ 12x-9y=18 \end{array}\right.$ iii) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{4}+\frac{3y}{8}=1 \\ 4x+6(y-2)=0 \end{array}\right.$

11. Να λύσετε το σύστημα και να κάνετε επαλήθευση.

$$\left|\begin{array}{l} x-\frac{2x-y}{2}+\frac{1}{4}=0 \\ \frac{2x-1}{6}-\frac{1-y}{2}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

12. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \sqrt{2}x = y \\ x + y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{2}x - y = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \alpha - 2\beta + 3\gamma = 9 \\ \beta + 3\gamma = 5 \\ \gamma = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 3 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 1 \\ 2\beta + \gamma = 4 \end{cases}$

18. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x+y+\omega = 0 \\ 2x-3y+8\omega = 0 \\ x-y-2\omega = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-y+\omega = 0 \\ -x+2y+2\omega = 4 \\ y-3\omega+2 = 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y+z = 9 \\ x-y+z = 3 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 50 και διαφορά 14.

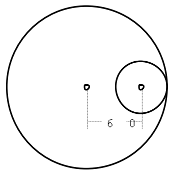
2. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι 16m. Αν το x είναι μεγαλύτερο του y κατά 2m, να βρείτε πόσα μέτρα είναι κάθε διάσταση.

3. Θέλουμε να κόψουμε ένα χάλκινο σύρμα με μήκος 30m σε δύο κομμάτια, ώστε το μήκος του ενός να είναι τα 2/3 του μήκους του άλλου. Τι θα κάνουμε για να βρούμε το σημείο τομής;

4. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που η διαφορά τους είναι 24 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με το μικρότερο δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 3.

5. Οι τρεις τορναδόροι και οι πέντε βοηθοί τους σε ένα μηχανουργείο πληρώνονται με 55125 δρχ την ημέρα. Αν το ημερομίσθιο του βοηθού είναι τα 5/8 του ημερομισθίου του τορναδόρου, πόσο είναι το ημερομίσθιο καθενός; (Οι τορναδόροι πληρώνονται με το ίδιο ημερομίσθιο)

6. Το διπλανό σχήμα δείχνει έναν τροχό και έναν τροχίσκο που συμπλέκονται μεταξύ τους και έχουν απόσταση στους άξονές τους 60 mm. Το διπλάσιο της διαμέτρου του τροχίσκου είναι μικρότερο κατά 40 mm από τη διάμετρο του τροχού. Να υπολογίσετε τις ακτίνες του τροχού και του τροχίσκου.

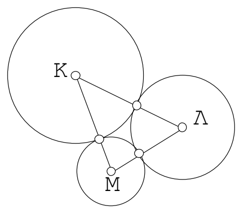


7. Ένα ορθογώνιο με μήκος x cm και πλάτος y cm έχει περίμετρο 10cm. Αν μεγαλώσουμε το μήκος κατά $y/3$ και μικρήνουμε το πλάτος κατά $x/4$, η περίμετρος αυξάνει κατά 1cm. Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.

8. Ένας έμπορος υφασμάτων, όταν θέλησε να πληρώσει την πρώτη δόση από τις οκτώ του φόρου του στην εφορία, σκέφτηκε πως αν πουλούσε ένα κομμάτι ύφασμα προς 320δρχ το μέτρο, θα του έλειπαν ακόμα 3200δρχ. Αν όμως το πουλούσε προς 400δρχ. το μέτρο, θα του περίσσευαν 2000δρχ. Πόσα μέτρα ήταν το κομμάτι αυτό και πόσος ολόκληρος ο φόρος;

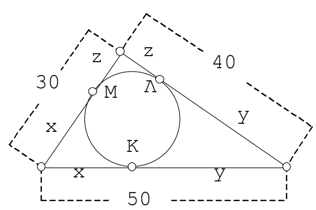
9. Δύο μαθητές Α και Β ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο Ο ενός δρόμου προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 60μέτρα το λεπτό ο Α και 75 μέτρα το λεπτό ο Β. Αν ο Α ξεκίνησε 4 λεπτά νωρίτερα από τον Β, να βρείτε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Α και σε πόση απόσταση από το σημείο Ο.

10. Να βρείτε τα μήκη των ακτίνων των κύκλων του διπλανού σχήματος.



ΚΛ=7,ΚΜ=6,ΛΜ=5

11. Βρείτε τα μήκη x, y, z των τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι πλευρές του τριγώνου από τα σημεία Κ, Λ, Μ του κύκλου στο διπλανό σχήμα. (Οι αποστάσεις που δίνονται είναι σε cm)



ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + y = 28 \\ x = y + 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2xy + 1 = -11 \\ x + y = 1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} -x + xy + 1 = y \\ x + y = 5 \end{cases}$

2. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \omega + t = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \dfrac{\omega + y}{3} = \dfrac{y + 7}{6} \\ \omega + y + y^2 = 31 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} z(t-1) = -12 \\ z + (t-1) = -1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} (\alpha - 1)(\beta - 1) = 0 \\ \alpha^2 + \beta = 1 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + \omega^2 = 73 \\ x\omega = 24 \end{cases}$

5. Αν *x, ω* είναι ρητοί αριθμοί να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \omega + x\omega = 23 \\ x\omega \cdot (x + \omega) = 120 \end{cases}$$

6. Με την αντικατάσταση $\dfrac{x^2}{y} = \lambda$ να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2} = 2 \\ x = y - 6 \end{cases}$

7. Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 15cm και η περίμετρός του 36cm.

Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του τριγώνου.

8. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} y + xy + y^2 = 24 \\ y = x - 1 \end{cases}$

9. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$

10. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$