ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Α.1.1

Η έννοια της μεταβλητής

Αλγεβρικές παραστάσεις

Επαναληπτικές έννοιες

Το

1Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Οι πραγματικοί αριθμοί

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

N

Άρτιοι (ή Ζυγοί) : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
Περιττοί (ή Μονοί) : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : ... , –5, –4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...

Z

Θετικοί : +1, +2, +3, +4, +5, ...
Αρνητικοί : –1, –2, –3, –4, –5, ...

Δηλαδή, ακέραιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί (που τώρα μπορούμε να τους λέμε απλά θετικούς) μαζί με τους αρνητικούς αριθμούς.

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όσοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν κλάσμα.

Q

Πχ. $-\frac{10}{7}$ $\quad 5 = \frac{5}{1}$ $\quad 3{,}75 = \frac{375}{100}$ $\quad 1{,}666... = \frac{15}{9}$

Δηλαδή, ρητοί είναι οι ακέραιοι μαζί με όλα τα γνωστά μας κλάσματα, αλλά και τους δεκαδικούς που είναι **απλοί** ή **περιοδικοί**.

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όσοι αριθμοί δεν είναι ρητοί.

Πχ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$ (αλλά όχι πχ. το $\sqrt{9} = 3$)

Αν γράψουμε έναν άρρητο αριθμό σα δεκαδικό, τότε αυτός θα έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, χωρίς φαινομενικά καμία «περιοδικότητα» ή «λογική».

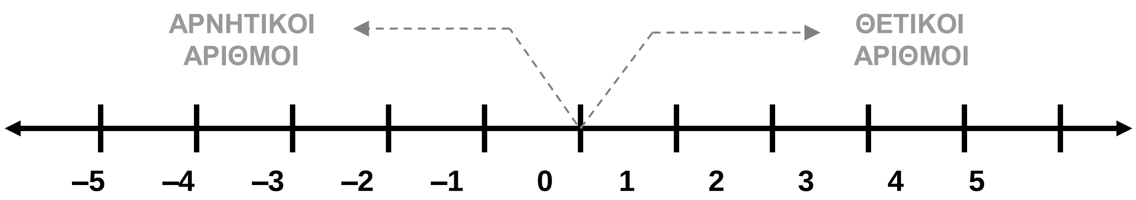
R

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ : Λέγονται όλοι οι προηγούμενοι αριθμοί μαζί!

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Για να έχουμε μια καλύτερη άποψη των πραγματικών αριθμών μπορούμε να τους τοποθετήσουμε πάνω στα σημεία ενός άξονα (κάτι σαν χάρακα, δηλαδή).

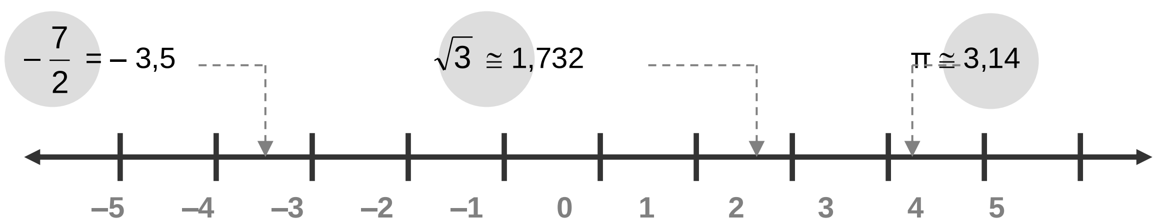


Φυσικά, καταλαβαίνουμε εύκολα πως όσο δεξιότερα βρίσκεται ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι. Άρα, για παράδειγμα:

- Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.

Οι θέσεις των ακέραιων αριθμών είναι ξεκάθαρες. Τι συμβαίνει όμως όταν χρειάζεται να τοποθετήσουμε ένα κλάσμα πάνω στον άξονα ή, ακόμα χειρότερα, έναν άρρητο αριθμό;

Για το κλάσμα, τα πράγματα είναι εύκολα: αρκεί να κάνουμε τη διαίρεση και θα καταλάβουμε αμέσως για ποιον αριθμό πρόκειται. Για τους άρρητους αριθμούς, ίσως χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστή τσέπης (δηλ. το... κομπιουτεράκι). Για παράδειγμα:



Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Λέγοντας «απόλυτη τιμή» ενός αριθμού θα μπορούσαμε, για ευκολία, να εννοούμε τον αριθμό *χωρίς το πρόσημό του*.

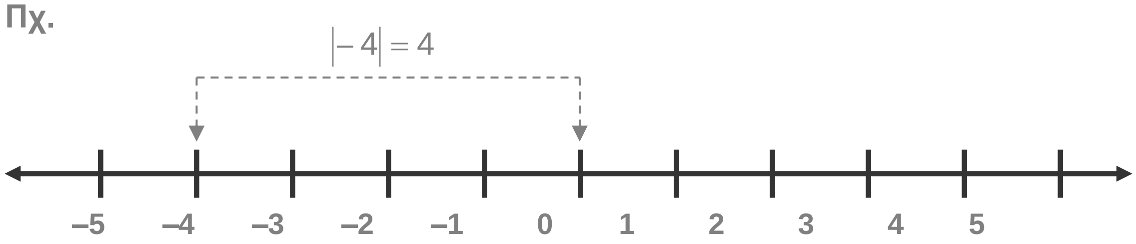
Το ίδιο σωστό θα ήταν αν λέγαμε ότι *«απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο αριθμός με θετικό πρόσημο»*, αφού όλοι γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός χωρίς πρόσημο θεωρείται πάντα θετικός.

Την απόλυτη τιμή ενός αριθμού **α** τη συμβολίζουμε με $|\mathbf{α}|$. Για παράδειγμα:

Πχ. $|+5| = 5$, $|-12| = 12$, $\left|-\dfrac{11}{5}\right| = \dfrac{11}{5}$, $|+3{,}45| = 3{,}45$

Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, η απόλυτη τιμή ενός αριθμού α **συμβολίζει την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα** (δηλαδή, το σημείο που παριστάνει το 0).

Πχ.



Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Ομόσημοι αριθμοί

Για να προσθέσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το κοινό τους πρόσημο και **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους.

Ετερόσημοι αριθμοί

Για να προσθέσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και **αφαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους (από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη).

Πχ.

$$7 + 15 = +(7 + 15) = 22$$
$$-7 - 15 = -(7 + 15) = -22$$

$$-7 + 15 = +(15 - 7) = +8 = 8$$
$$7 - 15 = -(15 - 7) = -8$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Για να αφαιρέσουμε δυο πραγματικούς αριθμούς, τότε τα πράγματα είναι πολύ εύκολα: μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση και αλλάζουμε το πρόσημο του *Αφαιρετέου*. Αν δε θυμάστε, αυτός είναι ο δεύτερος από τους δύο αριθμούς, αυτός δηλαδή που αφαιρούμε. Ο άλλος λέγεται *Μειωτέος*. Γράφουμε σύντομα:

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

Κατόπιν, ακολουθούμε πολύ απλά τους κανόνες της πρόσθεσης.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ομόσημοι αριθμοί

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ομόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε πάντα θετικό πρόσημο **(+)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Ετερόσημοι αριθμοί

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ετερόσημους πραγματικούς αριθμούς βάζουμε πάντα αρνητικό πρόσημο **(–)** και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Πχ.

$$3 \cdot 5 = +(3 \cdot 5) = 15$$
$$-3 \cdot (-5) = +(3 \cdot 5) = +15 = 15$$

$$3 \cdot (-5) = -(3 \cdot 5) = -15$$
$$-3 \cdot (+5) = -(3 \cdot 5) = -15$$

Για ευκολία θυμόμαστε τον παρακάτω κανόνα των προσήμων:

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Ο κανόνας λέει ότι για να διαιρέσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς τότε μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και πολλαπλασιάζουμε το *Διαιρετέο* με τον αντίστροφο του *Διαιρέτη* (σας θυμίζει κάτι απ' την αφαίρεση αυτός ο κανόνας;). Γράφουμε συμβολικά:

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Κατόπιν συμβουλευόμαστε τον προηγούμενο πίνακα, του πολλαπλασιασμού.

- Στην πράξη, αρκεί να βάλουμε το σωστό πρόσημο – σύμφωνα με τους κανόνες του πολλαπλασιασμού – και στη συνέχεια να κάνουμε απλά τη... διαίρεση!

ΚΑΙ ΜΗΝ ΞΕΧΝΑΜΕ!!!

Άθροισμα	$\Rightarrow$	Πρόσθεση
Διαφορά	$\Rightarrow$	Αφαίρεση
Γινόμενο	$\Rightarrow$	Πολλαπλασιασμός
Πηλίκο	$\Rightarrow$	Διαίρεση

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ

Οι τέσσερεις γνωστές μας πράξεις έχουν κάποιες βασικές ιδιότητες. Από αυτές καλό είναι να θυμόμαστε μερικές:

α Ουδέτερο στοιχείο

Ένας αριθμός λέγεται ουδέτερο στοιχείο μιας πράξης όταν δεν παίζει κανένα ρόλο στον υπολογισμό του αποτελέσματος, δηλαδή παραμένει ουδέτερος!

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης: **0**

Πχ. $15 + 0 = 15$, $0 - 9 = -9$

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: **1**

Πχ. $1 \cdot (-15) = -15$, $9 \cdot 1 = 9$

β Αντίθετοι αριθμοί

Δύο αριθμοί θα λέγονται αντίθετοι αν έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο. **Πχ.** +5, –5

Ιδιότητα: Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα 0.

Πχ. $+12 - 12 = 0$

γ Αντίστροφοι αριθμοί

Ιδιότητα: Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1.

Πχ. $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$

Αυτός είναι επίσης και ο ορισμός των αντίστροφων αριθμών.

δ Επιμεριστική ιδιότητα

Ολόκληρο το όνομά της είναι *«επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση»* (ουφ)! Μας χρειάζεται κυρίως όταν δεν μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις μέσα σε μια παρένθεση (πχ. γιατί υπάρχουν μεταβλητές) αλλά με κάποιο τρόπο θα πρέπει να διώξουμε την παρένθεση.

Απλή επιμεριστική: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Διπλή επιμεριστική: $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

ε

Πολύ σημαντικό είναι, επίσης, να θυμόμαστε τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

$$\text{Αν } \alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό ν θα ονομάζουμε ένα γινόμενο από ν παράγοντες, που είναι όλοι ίσοι με τον α. Το $α^ν$ θα το διαβάζουμε *«νιοστή δύναμη του α»*.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι δυνάμεις έχουν, επίσης, κάποιες καταπληκτικές ιδιότητες:

1. $α^μ \cdot α^ν = α^{ν+μ}$
2. $\dfrac{α^μ}{α^ν} = α^{μ-ν}$
3. $(α \cdot β)^ν = α^ν \cdot β^ν$
4. $\left(\dfrac{α}{β}\right)^ν = \dfrac{α^ν}{β^ν}$
5. $(α^μ)^ν = α^{ν \cdot μ}$

Ορίζουμε, ακόμη, τα εξής χρήσιμα:

6. $α^0 = 1$ και $α^1 = α$
7. $α^{-ν} = \dfrac{1}{α^ν}$
8. $\left(\dfrac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\dfrac{β}{α}\right)^ν$

Προτεραιότητα Πράξεων

Τώρα που θυμηθήκαμε και την έννοια της δύναμης, είμαστε έτοιμοι να θυμηθούμε και τη σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις σε μια οποιαδήποτε παράσταση:

1ον **Πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις** (Αν υπάρχουν)

2ον **Τις δυνάμεις**

3ον **Τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις**

4ον **Τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις**

Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και θα τη συμβολίζουμε $\sqrt{\alpha}$ θα ονομάζουμε ένα θετικό αριθμό, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

Άρα: $\sqrt{\alpha} = x$ σημαίνει ότι $x^2 = \alpha$

Πχ. $\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$

Για ευκολία, θα ήταν καλό αν απομνημονεύαμε μερικές από τις πιο συνηθισμένες τετραγωνικές ρίζες:

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{289} = 17$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{324} = 18$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{400} = 20$

Άρα...

$\sqrt{16} = 4$ **ΣΩΣΤΟ!**

$\sqrt{16} = 8$ **ΛΑΘΟΣ!**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Και οι τετραγωνικές ρίζες έχουν, επίσης, κάποιες ιδιότητες:

1. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
2. Γενικά $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
3. $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
4. $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$

Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

- **Αριθμητική παράσταση**

  θα λέγεται μια μαθηματική έκφραση που περιέχει *αριθμούς* και τις τέσσερεις γνωστές μας πράξεις.

  Πχ. $Α = 2\cdot(10 - 7)^2 + [3^2 - (24 - 6):2]$

- **Αλγεβρική παράσταση**

  θα λέγεται μια παράσταση η οποία, επιπλέον, περιέχει *μεταβλητές*.

  Πχ. $Β = 2\cdot(α - 7)^2 + [α^2 - (8\cdot α - β):2]$

- **Ακέραια αλγεβρική παράσταση**

  θα λέγεται μια αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

- **Αριθμητική τιμή**

  μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε κάποιον αριθμό και κάνουμε τις πράξεις.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Α.1.1.Α ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ	**ΘΕΩΡΙΑ -ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ**
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ **Να κάνετε τις πράξεις.**	**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**
$(+8)+(+6)=$………………………… $(-8)+(-6)=$………………………… $(+8)+(-6)=$………………………… $(-8)+(+6)=$………………………… $(+5)-(+7)=$………………………… $(+5)-(-7)=$………………………… $(+5)\cdot(+7)=$……… $(-5)\cdot(-7)=$……… $(+5)\cdot(-7)=$……… $(-5)\cdot(+7)=$……… $\alpha\cdot 0=$……… $3\cdot\frac{1}{3}=$…………………… $(-3)\cdot(-\frac{1}{3})=$…………………… $(+\frac{4}{3})\cdot(+\frac{3}{4})=$……………………	Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς,… απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κοινό τους …………………… Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη ………………………………………………………… τιμή. Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, ……………………… στον α τον …………………………του αριθμού β. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο $+$. Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο $-$.
$(+12):(+4)=$………………………… $(-2):(+3)=$………………………… $(-5):(+15)=$………………………… $(+6):(-2)=$………………………… $\alpha:0=$……… 0 $:\ \alpha=$……… $\alpha\ :1=$……… $\alpha:(-1)=$……… $(+\frac{4}{3}):(-\frac{5}{6})=$…………………………	Γενικά, στον πολλαπλασιασμό ισχύει ο κανόνας των προσήμων:…………………………………… Για να διαιρέσουμε δύο αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το κατάλληλο πρόσημο σύμφωνα με τον κανόνα που ισχύει και στον πολλαπλασιασμό. Ακόμα, η διαίρεση μπορεί να εκτελεστεί και ως εξής: Για να διαιρέσουμε δύο αριθμούς,…………………… διαιρετέο με τον……………………………………του διαιρέτη.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ		
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	**ΠΡΟΣΘΕΣΗ**	**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ**

Αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε ……………………………………… Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε ………………………………………

Α.1.1.Β. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις.	**ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**
$2^3 =$ ……………………… $2^4 =$ ……………………… $(-2)^3 =$ ……………………… $(-2)^4 =$ ……………………… $-2^4 =$ ……………………… $2^0 =$ ……………………… $2^{-3} =$ ……………………… $3^{-2} =$ ………………………	Η δύναμη με βάση ………………………… αριθμό και εκθέτη φυσικό αριθμό ….. ≥ 2 συμβολίζεται με ……… και είναι το …………………… παραγόντων ίσων με ……. Ορίζουμε ακόμα: …………………………………… ………………………………… …………………………………

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις.	**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ**
$2^3 \cdot 2^4 =$………………………… $3^5 : 3^3 =$………………………… $(2x)^2 =$………………………… $2^4 \cdot 5^4 =$………………………… $(2^3)^2 =$………………………… $(4^2)^{-4} =$…………………………	1) ……………………………………… 2) ……………………………………… 3) ……………………………………… 4) ……………………………………… 5) ……………………………………… 6) ………………………………………

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις.	**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ**
$A=(-2)^2\cdot(-3)+2\cdot 3^2-5^2\cdot(-2):5-6$ $B=(2\cdot 5-3^2)+2\cdot(2^3-4)-12:(-3)$	Η προτεραιότητα των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση είναι: **1.** ……………………………………………… **2.** ……………………………………………… **3.** ……………………………………………… **4.** ………………………………………………

Α.1.1.Γ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες.		**ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**
$\sqrt{25}=$……	$\sqrt{x}=4\Rightarrow x=$……	Η τετραγωνική ρίζα ενός ……………………… αριθμού x συμβολίζεται με ……… και είναι ο ………………… αριθμός που όταν ………………………………………………… δίνει τον αριθμό x. Ορίζουμε ακόμα: ………………
$\sqrt{81}=$……	$\sqrt{x}=-4\Rightarrow x=$…….	
$\sqrt{0}=$……	$\sqrt{x}=0\Rightarrow x=$……	
$\sqrt{1}=$……	$\sqrt{x}=1\Rightarrow x=$……	**Προσοχή!** Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα ……………………… αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το ……………………… του να είναι ……………………………… αριθμός.
$\sqrt{9}=$……	$\sqrt{x}=10\Rightarrow x=$……	
$\sqrt{-9}=$……	$\sqrt{x}=7\Rightarrow x=$……	

Να κάνετε τις πράξεις.		**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ**
$\sqrt{7^2}=$…………………… $\sqrt{(-7)^2}=$…………… $\sqrt{-7^2}=$………………… $(\sqrt{3})^2=$…………………	$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}}=$……………… $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}=$…………………	**1.** ……………………………………………… **2.** ……………………………………………… **3.** ………………………………………………
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=$……………… $\sqrt{4}\cdot\sqrt{100}=$……………	$\sqrt{9+16}=$……….. $\sqrt{9}+\sqrt{16}=$………	**4.** ……………………………………………… **5.** ………………………………………………

2Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή , ή να είναι λάθος. Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το Σ αν αυτή είναι σωστή και το Λ αν αυτή είναι λάθος.

- Ο αριθμός –χ είναι ένας αρνητικός ρητός αριθμός. ………
- Ο αριθμός –χ είναι ο αντίθετος του αριθμού χ και μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αν ο χ είναι αρνητικός ή θετικός αντίστοιχα. ……..
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες απόλυτες τιμές. …….
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια πάντα απόλυτη τιμή αφού αυτή εκφράζει την απόσταση των σημείων του άξονα στα οποία αυτοί μπαίνουν από την αρχή του. …..
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. ……
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός. …..
- Ο αντίθετος του χ είναι ίσος με το γινόμενο του –1 με τον χ δηλαδή –χ = (-1)·χ
  - Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αριθμό ομόσημο μ’ αυτούς.
  - Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο έναν θετικό αριθμό.
  - Οι ετερόσημοι έχουν γινόμενο έναν αρνητικό αριθμό.
  - Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό αριθμό.
  - Αν α ένας ρητός αριθμός τότε α ·1 = α και α ·0 = 0.
  - Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0
  - Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο –1
  - Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1

2. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε το σωστό συμπέρασμα συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί.

1. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
Α. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. Β. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.
2. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.
Α. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. Β. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.
3. Έστω οι ρητοί αριθμοί α , β , γ ώστε αβγ = 1
Α. Οι αριθμοί α , β , γ είναι αντίστροφοι. Β. Οι αριθμοί α , β , γ είναι ομόσημοι.
Γ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του β. Δ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του βγ.
4. Έστω οι ρητοί αριθμοί α , β ώστε -3·(α + β) = 0.
Α. Οι αριθμοί α , β είναι αντίστροφοι. Β. Οι αριθμοί α , β είναι 0.
Γ. Ο αριθμός α είναι αντίθετος του β. Δ. Ισχύει α + β = 3.
5. Το γινόμενο και το άθροισμα δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.
Α. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. Β. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

Πρόταση	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Σωστό συμπέρασμα					

3. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή , μπορεί όμως να είναι λάθος.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το Σ αν αυτή είναι σωστή και το Λ αν αυτή είναι λάθος.

- Για δύο ρητούς αριθμούς α και β διαφορετικούς από το 0 ισχύει: α : β = β : α ……..
- Για τον αριθμό α διαφορετικό του 0 ισχύει: 0 : α = 0 ……..
- Για τον αριθμό α ισχύει: α : 0 = α ……..
- Για τον αριθμό α διαφορετικό του 0 ισχύει: α : (-α) = -1 ……..
- Για τον αριθμό α διαφορετικό του 0 ισχύει: α : $\frac{1}{\alpha}$ = 1 ……..
- Για τον αριθμό α ισχύει: α : 1 = 1 ……..
- Για τον αριθμό α διαφορετικό του 0 ισχύει: - α : (-α) = -1 ……..
- Για τον αριθμό α ισχύει: α : (-1) = -α ……..
- Το πηλίκο α : β με β διαφορετικό του 0 παριστάνει το γινόμενο του α με τον αντίστροφο του β ……………………

4. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις:

- χ . α = α τότε χ = ……..
- -α . χ = 2α τότε χ = ……..
- χ : (-α) = -1 τότε χ = ……..
- α : χ = -1 τότε χ = ……..
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν πηλίκο ……

5. Έστω κ , λ δύο ακέραιοι αριθμοί με γινόμενο -2 .

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τους κ, λ:

Τιμή του κ		
Τιμή του λ		

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των κ, λ.

3Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις ισότητες : α) -2^4 = … β) $(-2)^3$ = … γ) -2^3 = … δ) $(-2)^4$ = …

2. Ομοίως:

- Αν ν: άρτιος , τότε $(-1)^\nu$ = …
- Αν ν: περιττός , τότε $(-1)^\nu$ = …

3. Αν $\alpha^{\kappa+\lambda} = 1$, τότε ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή;

Α.: $\kappa = \lambda$ Β.: $\kappa + \lambda \neq 0$ Γ.: $\alpha = 0$ Δ.: $\alpha \neq 0$ και $\kappa = -\lambda$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

4. Αν $\alpha \neq 0$, τότε : $(\alpha^{\alpha})^{2\alpha} = \ldots$

Α.: $\alpha^{3\alpha}$ Β.: $\alpha^{2\alpha^2}$ Γ.: $\alpha^{2\alpha}$ Δ.: α^3

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

5. Αν $5^{\chi} = (-5)^{\chi}$, τότε ο ακέραιος αριθμός x είναι ………………. .

Α.: 1 Β.: -1 Γ.: ένας περιττός ακέραιος Δ.: ένας άρτιος ακέραιος

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

6. Στις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

- $5^{\nu+2} - 5^{\nu+1} = \ldots\ldots$ Α.: $5^{\nu+1}$ Β.: 5^{ν} Γ.: $4{\cdot}5^{\nu+1}$ Δ.: 5 Ε.: $5^{(\nu+2):(\nu+1)}$
- $4{\cdot}3^{\nu+3} - 10{\cdot}3^{\nu+2} = \ldots\ldots$ Α.: $-6{\cdot}3^{\nu+1}$ Β.: $-6{\cdot}3^{\nu+5}$ Γ.: $-6{\cdot}3^{2\nu+5}$ Δ.: $18{\cdot}3^{\nu+2}$ Ε.: $2{\cdot}3^{\nu+2}$
- $4^{\nu+2} + 6{\cdot}(-2)^{2\nu+1} = \ldots\ldots$ Α.: $2^{2\nu+1}$ Β.: $(-2)^{2(\nu+1)}$ Γ.: $4{\cdot}2^{2\nu+1}$ Δ.: $(-2)^{2\nu}$ Ε.: $(-2)^{2\nu+1}$

4Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τις ισότητες : α) $\sqrt{0{,}04} = \ldots.$ β) $\sqrt{225} = \ldots$ γ) $\sqrt{10^6} = \ldots.$ δ) $\sqrt{\sqrt{16}} = \ldots..$

2. Συμπληρώστε τις προτάσεις:

- Αν $\sqrt{a} = x$ με α, χ μη αρνητικούς αριθμούς τότε ισχύει …………..
- Αν $\sqrt{a^2} = a$ τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι ……………
- Αν $\sqrt{a^2} = -a$, τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι…………………
- Αν α οποιοσδήποτε αριθμός τότε $\sqrt{a^2} = \ldots\ldots.$
- Αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = \ldots\ldots.$
- Αν $a \geq 0$ τότε $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \ldots\ldots.$
- Αν $x \geq 0$ *και* $\sqrt{5} = x$ τότε $x^2 = \ldots\ldots.$
- Αν $x^2=5$ και $x \geq 0$ τότε x=…….
- Αν $x^2=5$ και x<0 τότε x=…….

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\sqrt{0{,}02}\sqrt{0.08} = \ldots.$ β) $\sqrt{2003}\sqrt{2003} = \ldots$ γ) $\dfrac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}} = \ldots.$ δ) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{16}}{2}}\sqrt{200} = \ldots..$

4. α) Να αναλύσετε τους αριθμούς 8, 12, 18, 20, 27 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
   β) Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της α΄ στήλης του σε ένα μόνο στοιχείο της β΄ στήλης του συμπληρώνοντας τον επόμενο πίνακα.

Αριθμός	Τετραγωνική ρίζα αριθμού
Α=8	$3\sqrt{3}$
Β=12	$2\sqrt{2}$
Γ=18	$3\sqrt{2}$
Δ=20	$2\sqrt{3}$
Ε=27	$2\sqrt{5}$

Αριθμός	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Τετραγωνική ρίζα του αριθμού					

5. Έστω α, β δύο αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $α^4 = β^2$.
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $2004^{\alpha+\sqrt{-\beta}}$

6. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 4 cm^2 . Η μία του διάσταση είναι $\sqrt{5}-1$ cm
   α) Να υπολογίσετε την άλλη διάστασή του.
   β) Να δείξετε ότι η περίμετρός του είναι $4\sqrt{5}$ cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

1. Να υπολογιστούν με δύο τρόπους τα παρακάτω αθροίσματα:

α. $(-5) + (-6) - (+3) - (-7) + (-12) - (-13)$

β. $(-7) - (+8) + (-3) + (+7) - (-3) - (+1)$

γ. $-3 - (8 - 7) - (-12 + 11) - (5 + 2)$

2. Να υπολογιστούν οι αριθμητικές παραστάσεις:

α. $-2 - [36 - 8 - (9 - 28)]$

β. $-4 - (-5 + 3) - [6 - (-4 + 9) + (-1 -2 +7)] - (12 -16)$

γ. $-(-5) + (-12) - [-(+5) - (-12)] - [-(-36)]$

3. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

α. $4-\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(4-\frac{1}{5}\right)$ **β.** $\left(-5+\frac{1}{3}\right)\cdot 2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}+3\right)$

γ. $\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)$ **δ.** $\dfrac{3\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}{2-\left(-\frac{1}{2}+1\right)}$

4. Να υπολογιστεί με δύο τρόπους η τιμή της παρακάτω παράστασης, αν γνωρίζετε ότι $x = \frac{2}{3}$ και $y = -2$.

$$A = x - [\, y - (y + 2) - (x + \frac{5}{4})\,] - (x - y)$$

Δυνάμεις

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α. $\alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha$ **β.** $x^5 : x^3$ **γ.** $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}$

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α. $4\cdot\alpha^4\cdot\beta^5\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\alpha^3\cdot\beta$ **β.** $4\cdot\alpha^4\cdot\beta^{-5}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\alpha^{-12}\cdot\beta$

7. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α. $\left(\frac{x^2y}{xy^3}\right)^{-2}\cdot(xy)^2$ **β.** $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^5\cdot\left(\frac{4y}{x}\right)^6$ **γ.** $\left(\frac{7x^2}{-3y^4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{9y^2}{49x^4}\right)^{-2}$

8. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = 12\cdot\left[3^{-4}:\left(2^4:3^2-2^2:\frac{9}{8}\right)\right]+\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-4}\cdot x=\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$ **β.** $x:\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2}=-\frac{1}{7}$

Τετραγωνικές Ρίζες

10. Να απαλειφθούν οι ρίζες από τους παρονομαστές:

α. $\frac{7}{\sqrt{7}}$ **β.** $\frac{60}{3\sqrt{5}}$ **γ.** $\frac{8\sqrt{8}}{5\sqrt{8}-3\sqrt{8}}$

11. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $\sqrt{18}+\sqrt{75}$ **β.** $\sqrt{75}-2\sqrt{12}+3\sqrt{3}$

γ. $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1)$ **δ.** $\sqrt{2}\cdot(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})$

ε. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ **στ.** $-\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}-11\sqrt{2}$

12. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{9+\sqrt{49}}}}$ **β.** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{8+1}+1}+1}$

γ. $\sqrt{\sqrt{16}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{5}}$ **δ.** $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}$

13. Να λυθεί η εξίσωση: $4(x+\sqrt{2})-\sqrt{8}=\sqrt{8}(x+\sqrt{2})$