ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ

3.14-3.15

Ευθεία και κύκλος

Εφαπτόμενα τμήματα

Το

11^{Ο} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

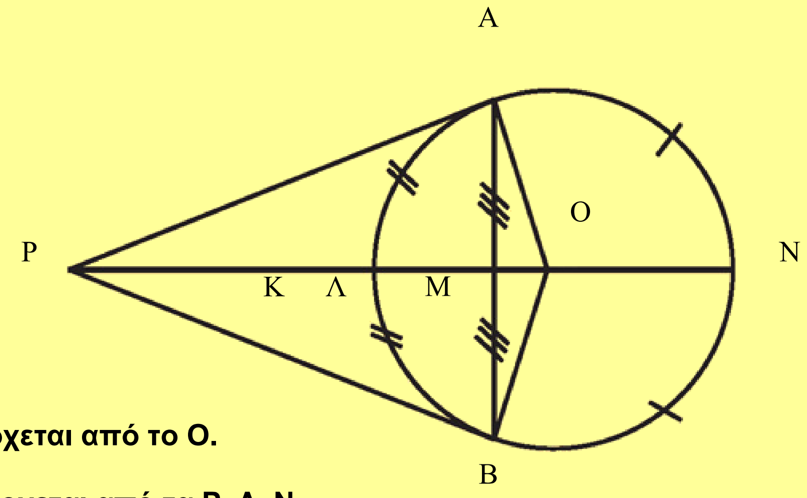
- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

3. **Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, η ΡΚ διχοτόμος της ΑΡΒ, τα Λ, Ν μέσα των τόξων ΑΛΒ, ΑΝΒ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:**



i) ΡΑ = ΡΒ. **Σ Λ**

ii) Η ΡΚ διέρχεται από το Ο. **Σ Λ**

iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν. **Σ Λ**

iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{ΑΡΒ}$, $\hat{ΑΟΒ}$ και το τόξο ΑΝΒ. **Σ Λ**

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.**

3. **Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ του κύκλου στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Γ, Δ, να**

αποδείξετε ότι ΓΟΔ = 90°.

3. **Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.**

2. **Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η**

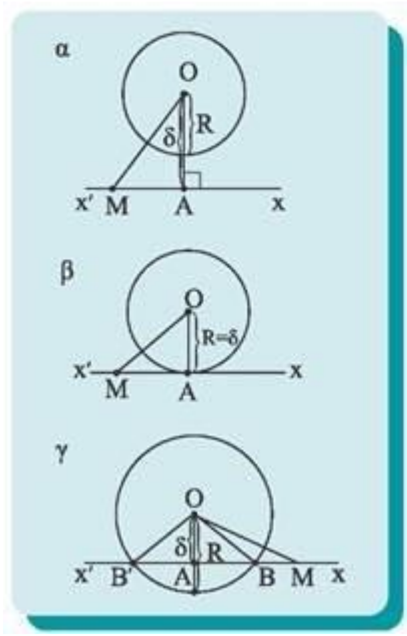
γωνία $\hat{ΑΜΓ}$ είναι τριπλάσια της$\hat{ΒΜΓ}$.

3. **Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τιμή,**

ΟΡ να αποδείξετε ότι $\hat{ΜΑΡ}$= $\hat{ΜΒΡ}$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R), μια ευθεία x'x.Τότε υπάρχουν **3** περιπτώσεις:



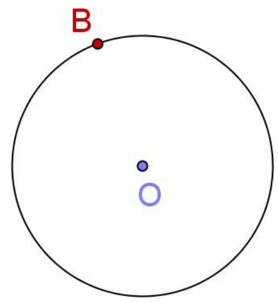
- Η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.
- Η x'x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου. Το κοινό σημείο της x'x και του κύκλου λέγεται **σημείο επαφής.**
- Η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία τομής της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

● Φέρνουμε το κάθετο τμήμα ΟΑ του Ο προς την x'x.Αν συμβολίσουμε με δ το μήκος του (**απόσταση** του Ο από την x'x) τότε, αποδεικνύεται ότι ισχύει:

- Η ευθεία είναι **εξωτερική** του κύκλου ⇔ **δ>R**
- Η ευθεία είναι **εφαπτομένη** του κύκλου ⇔ **δ=R**
- Η ευθεία έχει **τέμνουσα** του κύκλου ⇔ **δ<R**

ΔΥΟ ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να σχεδιάσουμε την εφαπτομένη του κύκλου (κέντρου Ο) σε ένα σημείο του Β,



i. φέρουμε την ακτίνα ΟΒ και στην συνέχεια

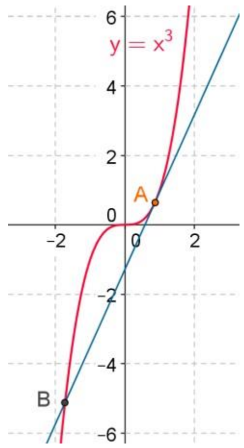
ii) κάθετη στην ακτίνα στο σημείο Β

►Σχεδιάστε την εφαπτομένη στο Β ακολουθώντας τις πιο πάνω οδηγίες

Για συζήτηση: ▪ *Πρόβλημα ορισμού και σχεδίασης εφαπτομένης σε μια άλλη καμπύλη.*

▪ *Αδυναμία γενίκευσης ορισμού της εφαπτομένης ως της ευθείας που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη*

▪ *Η εφαπτομένη ως οριακή θέση τέμνουσας.*

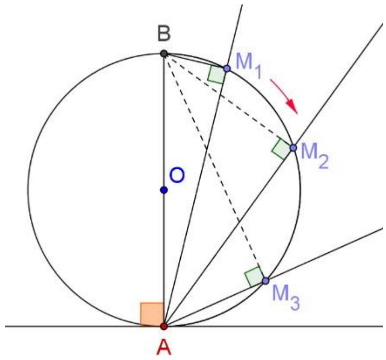


2. Η ακτίνα που καταληγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

- Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

Θεώρημα Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.



3.14 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το σημείο Ρ** και η ευθεία ΡΟ **διακεντρική** ευθεία του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα ΙΙ+Πορίσματα

Εστω κύκλος κέντρου Ο και Ρ ένα εξωτερικό σημείο του κύκλου.Τότε:

i) Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από το Ρ είναι ίσα μεταξύ τους.

(ii) Η διακεντρική ευθεία του Ρ διχοτομεί:

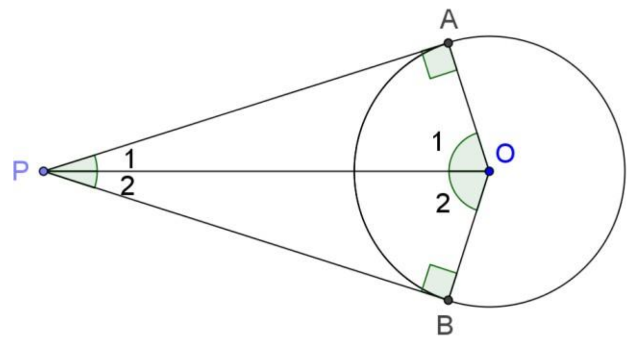
α) τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και

β) τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στο σημείο επαφής Ισχύει

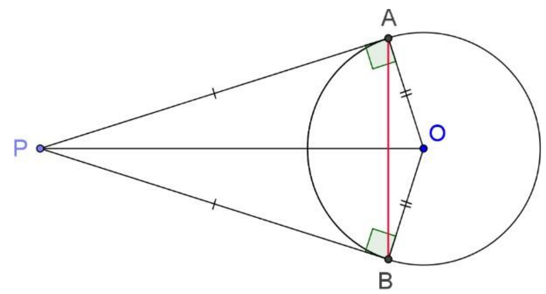
(iii) Η διακεντρική ευθεία του Ρ είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

Απόδειξη:

i) και **(ii)**



(iii)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

3.14-3.16 ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

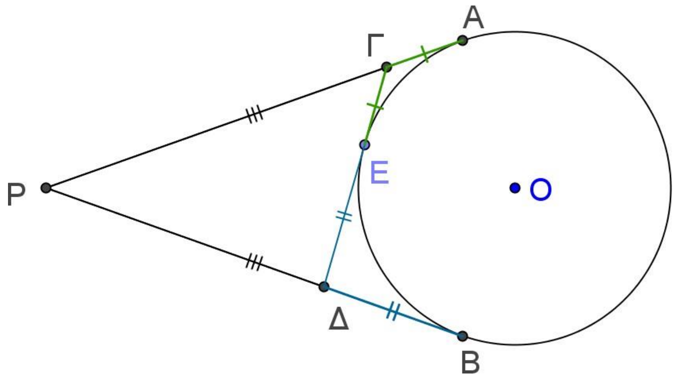
Ε3. Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα.

i. Στην περίπτωση που το Ε είναι σημείο του μικρότερου τόξου ΑΒ *(κυρτού)* να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση του εφαπτόμενου τμήματος ΡΑ.

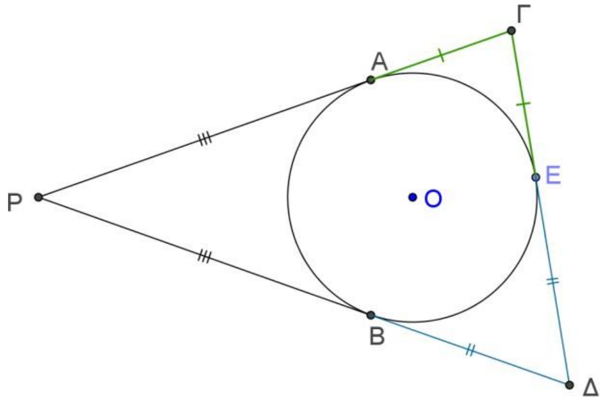
ii. Στην περίπτωση που το Ε είναι σημείο του μεγαλύτερου τόξου ΑΒ *(μή κυρτού)* να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση του εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.

Λύση:

i. Περίμετρος ΡΓΔ =



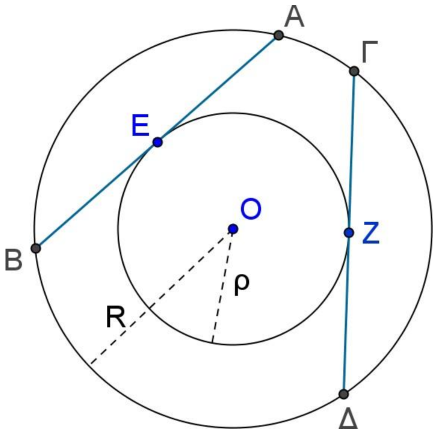
ii. Περίμετρος ΡΓΔ =



Ε1. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.

Λύση:

Εστω δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,ρ) και (Ο,R) με R>ρ.Εστω επίσης δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



…