ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^0 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ Β.1.13 Σχετικές θέσεις ευθείας - κύκλου Β.2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος	ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 9

Ι. ΣΧΕΔΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

1. Ο διδάσκων καθηγητής αναφέρει σύντομα τη βασική θεωρία που είναι
   ι. Τέμνουσα
   ιι. Σημείο επαφής- Εφαπτομένη
   ιιι. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος..
2. Υπαγορεύει την M_1 στους μαθητές κάνει το 1^0 παράδειγμα στον πίνακα
3. Υπαγορεύει το προτεινόμενο**Δ1** θέμα στους μαθητές και τους ζητά να το κάνουν στα τετράδιά τους. Ζητά το αποτέλεσμα. Έρχεται ένας μαθητής στον πίνακα και το επιλύει.
4. Υπαγορεύει την M_2 στους μαθητές κάνει το 2^0 παράδειγμα στον πίνακα
5. Υπαγορεύει το προτεινόμενο **Δ3** θέμα στους μαθητές και τους ζητά να το κάνουν στα τετράδιά τους. Ζητά το αποτέλεσμα. Έρχεται ένας μαθητής στον πίνακα και το επιλύει.
6. Υπαγορεύει την M_3 στους μαθητές κάνει το 3^0 παράδειγμα στον πίνακα
7. Ο διδασκόμενος μαθητής επιβλέπεται από τον καθηγητή και αναπτύσσει στο τετράδιο του τις ερωτήσεις κατανόησης 1 , 3 και σχολιάζει τα αποτελέσματα των μαθητών.
8. Γίνεται σύντομη ανακεφαλαίωση του αντικειμένου από τον διδάσκοντα καθηγητή
9. Δίνονται στον μαθητή για το σπίτι
   α) οι υπόλοιπες ερωτήσεις κατανόησης,
   β) τα θέματα: **Δ2, Δ4 ,Δ5 και Δ6.**

ΙΙ. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

Α. Βασική Θεωρία (επιγραμματικά)-Παρατηρήσεις-Σχόλια

E_1: Τι λέγεται τέμνουσα του κύκλου;
A_1: Λέγεται η ευθεία που έχει με τον κύκλο δύο κοινά σημεία.
E_2: Τι λέγεται εφαπτομένη του κύκλου;
A_2: Λέγεται η ευθεία που έχει με τον κύκλο ένα κοινό σημείο.
E_3: Τι λέγεται σημείο επαφής ενός κύκλου με ευθεία ε;
A_3: Λέγεται το μοναδικό σημείο τομής μιας ευθείας και ενός κύκλου.
E_4: Τι λέγεται μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ;
A_4: Λέγεται η ευθεία η κάθετη στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.
E_5: Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχει η μεσοκάθετος ενός ευθύγράμμου τμήματος;
A_5: Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
E_6: Τι λέγεται κανόνας ; Πως χρησιμοποιείται ;
A_6: Κανόνας λέγεται ο αβαθμολόγητος χάρακας. Χρησιμοποιείται να σχεδιάζει μόνο ευθύγραμμα τμήματα.
E_7: Τι λέγεται περίκεντρο ενός τριγώνου;
A_7: Λέγεται το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.
E_8: Τι λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος σε τρίγωνο ΑΒΓ;
A_8: Λέγεται ο κύκλος που διέρχεται και από τις 3 κορυφές του τριγώνου.

Παρατήρηση: $1^η$ Κάθε σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος.
$2^η$ Η εφαπτομένη είναι κάθετη στη ακτίνα στο σημείο επαφής.
$3^η$ Οι εφαπτόμενες στα άκρα μιας διαμέτρου είναι παράλληλες.

Σχόλιο: $1^ο$:Η απόσταση δ του κέντρου από μια ευθεία ε που είναι τέμνουσα του κύκλου (Ο, ρ) είναι μικρότερη της ακτίνας ρ , δηλαδή $δ < ρ$.
$2^ο$: Η απόσταση δ του κέντρου από μια ευθεία ε που είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) είναι ίση της ακτίνας ρ , δηλαδή $δ = ρ$.
$3^ο$: Η απόσταση δ του κέντρου από μια ευθεία ε που δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο (Ο, ρ) είναι μεγαλύτερη της ακτίνας ρ , δηλαδή $δ > ρ$.

Β. Ερωτήσεις κατανόησης τύπου: Σωστού-Λάθους, πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχησης, διάταξης και συμπλήρωσης.

1. Απαντήστε με Σ – Λ στις παρακάτω ερωτήσεις:
α) Εφαπτομένη και κύκλος έχουν 1 κοινό σημείο. **Σ - Λ**
β) Τέμνουσα και κύκλος έχουν 3 κοινά σημεία. **Σ – Λ**
γ) Η μεσοκάθετος έχει δύο σημεία. **Σ – Λ**
δ) Η τέμνουσα κύκλου διέρχεται πάντοτε από το κέντρο του κύκλου. **Σ - Λ**

2. Βάλτε σε κύκλο τη σωστή απάντηση
α) Το πλήθος των μεσοκαθέτων ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι
Α. 8 Β. 1 Γ. 2
Δ. Καμία από τις προηγούμενες.
β) Η τέμνουσα σε κύκλο έχει κοινά σημεία
Α. 2 Β. 3 Γ. 1
Δ. Καμία από τις προηγούμενες.

3. Να αντιστοιχίσετε τις δύο στήλες:

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. Η ε τέμνει τον (Ο, ρ) Β. Η ε δεν έχει κοινά σημεία με τον (Ο,ρ) Γ. Η ε εφαπτομένη του (Ο, ρ)	1. $δ > ρ$ 2. $δ = ρ$ 3. $δ < ρ$

Γ. Αναπτυγμένα παραδείγματα για εμπέδωση με αντίστοιχους αλγόριθμους(μεθοδολογίες)

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

M_1: Για να σχεδιάσουμε μια τέμνουσα ε σε κύκλο (Ο,ρ)
Α) Παίρνουμε ένα εσωτερικό σημείο Α του κύκλου.
Β) Από το Α φέρουμε τυχαία ευθεία ε .

M_2: Για να σχεδιάσουμε μια εφαπτομένη ε σε σημείο Μ του κύκλου (Ο,ρ)
Α) Φέρνω την ακτίνα ΟΜ.
Β) Με τον γνώμονα φέρνω την ευθεία ε κάθετη στην ΟΜ στο Μ.

M_3: Για να σχεδιάσουμε την μεσοκάθετο ε σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με γνώμονα ή σύνθετο γνώμονα
Α) Βρίσκω το μέσο Μ του ΑΒ.
Β) Με τον γνώμονα ή τον σύνθετο γνώμονα φέρνω την ευθεία ε κάθετη στο Μ
Γ) Η ε είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

M_4: Για να σχεδιάσουμε την μεσοκάθετο ε σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με κανόνα και διαβήτη
Α) Με κέντρα τα Α, Β και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε κύκλους που τέμνονται στα σημεία Γ, Δ.
Β) Φέρουμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Γ,Δ.
Γ) Η ε είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

M_4: Για να σχεδιάσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο σε τρίγωνο ΑΒΓ
Α) Φέρνουμε τις 3 μεσοκαθέτους των πλευρών του . Τέμνονται στο ίδιο σημείο Ο.
Β) Με κέντρο το Ο και ακτίνα ίση με ρ = ΟΑ γράφουμε κύκλο
Γ) Ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο ζητούμενος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο
Δίνεται ευθεία ε και σημείο της Α. Να σχεδιάσετε κύκλο ακτίνας 3cm που να εφάπτεται της ε στο Α.
Επίλυση
Φέρνω την ευθεία α κάθετη της ε στο Α. Πάνω σε αυτήν παίρνω δύο σημεία Ο και Ο΄ τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΑ΄=3cm.Με κέντρα τα Ο,Ο΄και ακτίνα 3cm γάφουμε τους κύκλους . Οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται της ε στο Α γιατι οι αποστάσεις ΟΑ, Ο΄Α είναι ίσες με 3cm.
(Η ευθεία ε λέγεται κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων).

Παράδειγμα 2ο
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευαστεί ο κύκλος που διέρχεται από τις τρείς κορυφές του.
Επίλυση
Σχεδιάζω τις μεσοκαθέτους των ΑΒ, ΑΓ οι οποίες τέμνονται στο Ο και ισχύει ΟΑ=ΟΒ και ΟΒ=ΟΓ οπότε ΟΑ = ΟΒ = =ΟΓ=ρ (1)
Γράφω κύκλο (Ο,ρ) ο οποίος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ με βάση τη σχέση (1).

Παράδειγμα 3ο
Να χωριστεί ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7cm σε δύο ίσα τμήματα με κανόνα και διαβήτη.
Επίλυση
Με άνοιγμα του διαβήτη λίγο μεγαλύτερο από το μισό του ΑΒ δηλαδή ρ = 4 cm και κέντρα τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ γράφουμε κύκλους που τέμνονται στα σημεία Γ, Δ . Φέρνω την ευθεία ΓΔ . Τέμνει την ΑΒ στο Μ . Το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Παράδειγμα 3ο
Να σχεδιάσετε τις εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα Α,Β χορδής ΑΒ.
Επίλυση
Σχεδιάζουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ. Στο σημείο Α φέρνουμε την κάθετη ε_1.Η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου. Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε την εφαπτομένη ε_2 στο Β.

Δ. Προτεινόμενα θέματα για ανάπτυξη για τους διδασκόμενους

Δ1. Να γράψετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=4,5cm, τον κύκλο που έχει διάμετρο την ΑΒ και τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β. Να δικαιολογήσετε γιατί οι εφαπτόμενες αυτές είναι ευθείες παράλληλες.

Δ2. α) Να σχεδιάσετε τις εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα μιας χορδής του ΑΒ. β) Αν οι εφαπτόμενες τέμνονται στο Ρ να συγκρίνετε τις ΡΑ,ΡΒ.

Δ3. α) Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=16,8cm σε δύο ίσα τμήματα ΑΓ, ΓΒ με κανόνα και διαβήτη.
β) Να χωριστεί το τμήμα ΑΓ σε τέσσερα ίσα ευθύγραμμα τμήματα με κανόνα και διαβήτη.

Δ4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, οι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τέμνονται στο Ο. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

Δ5. Να γράψετε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=8,4cm. Να πάρετε ένα σημείο Μ του ΑΒ ώστε να είναι ΑΜ = 4cm. Να γράψετε τους κύκλους (Α,4cm) και (Β,4,4cm). Να χαράξετε ευθεία ε, η οποία είναι κάθετη της ΑΒ στο Μ. α) Ποια είναι η θέση της ε ως προς καθέναν απ' τους δύο κύκλους και γιατί;
β) Πόσα κοινά σημεία έχουν οι δύο κύκλοι;

Δ6. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 ,ε_2 που απέχουν μεταξύ τους 6,4cm. α) Να σχεδιάσετε έναν κύκλο που να εφάπτεται στις δύο ευθείες . β) Τι σχήμα είναι το σύνολο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στις ε_1 ,ε_2;

Δ6. Αν ΑΒ μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ και ΓΔ μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να εξηγήσετε γιατί ΑΓ=ΒΓ=ΒΔ=ΑΔ.

Copyright: *Ηλίας Ράιδος Dr Εφαρμοσμένων Μαθηματικών* Τηλ.24210-28371 E-mail raidosi@yahoo.gr http:/users.in.gr/raidosil