

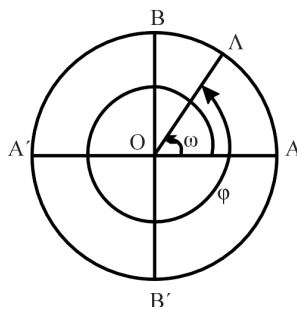
1^ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΣΤΗΝ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Γενικευμένη γωνία - Γενικευμένα τόξα - Το ακτίνιο

Τριγωνομετρικός κύκλος - Τριγωνομετρικοί αριθμοί γενικευμένης γωνίας

1. Η γωνία ω του παρακάτω σχήματος είναι θετική.



α) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

| Στήλη (Α) | Στήλη (Β) |
|-----------|----------------------------|
| ΟΛ | αρχική πλευρά της ω |
| ΟΑ | τελική πλευρά της ω |

β) Αν $\text{AOA} = \omega$, συμπληρώστε την ισότητα:

$\varphi = \dots\dots\dots$

γ) Συμπληρώστε τις φράσεις:

Η γωνία $720^\circ + \omega$ έχει αρχική πλευρά την $\dots\dots\dots$

Η γωνία $-360^\circ + \omega$ έχει τελική πλευρά την $\dots\dots\dots$

3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|----|-----|-----|---------|---------|------|----------|------|-------|---|----|
| Μέτρο γωνίας σε μοίρες | 0° | 30° | 45° | | | 120° | | 150° | 180° | | 1° |
| Μέτρο γωνίας σε ακτίνια | 0 | | | $\pi/3$ | $\pi/2$ | | $3\pi/4$ | | π | 1 | |

4. Πόσο είναι σε ακτίνια οι γωνίες:

α) ενός ισόπλευρου τριγώνου;

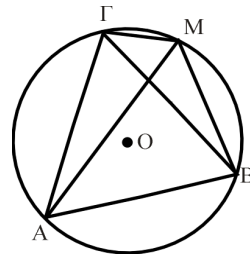
β) ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου;

5. Συμπληρώστε τον πίνακα:

| | | | | | | | | |
|----------------------------|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|---|
| Μέτρο γωνίας σε μοίρες | 10° | 53° | 60° | 18° | | | | |
| Μέτρο γωνίας σε ακτίνια | | | | | 2π/3 | π/4 | 3π/8 | 2 |

6. Εκφράστε σε ακτίνια τις γωνίες Α, Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ:

- α) όταν $A = 72^\circ$ και $B = 18^\circ$,
- β) όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές και $A = 45^\circ$
(θα εξετάσετε και τις δύο πιθανές περιπτώσεις).



7. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο. Υπολογίστε σε ακτίνια τις γωνίες ΑΟΒ, ΑΜΒ και ΒΜΓ.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A = \pi/6$ rad και $B = 2\pi/6$ rad. Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;

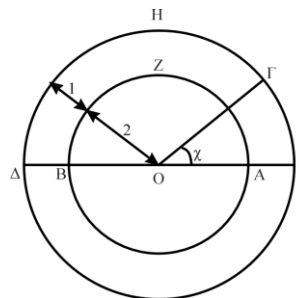
9. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και με ακτίνες R και R' αντίστοιχα. Μια γωνία xOy αποκόπτεται από τον Κ ένα τόξο με μήκος 9 και από τον Κ' ένα τόξο με μήκος 20.

Αποδείξτε ότι $\frac{R'}{R} = \frac{20}{9}$.

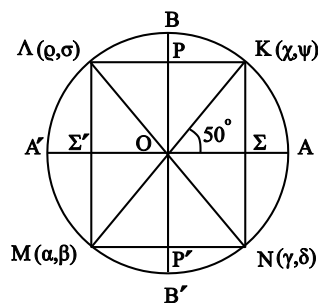
10. Σε κύκλο ακτίνας $R = 4$, υπολογίστε το μήκος τόξων που αντιστοιχούν στις γωνίες:

- α) $\alpha = \pi/4$ rad, β) $\alpha = 2\pi/3$ rad, γ) $\alpha = 36^\circ$

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι: το τόξο ΓΗΔ του εξωτερικού κύκλου έχει το ίδιο μήκος με το ημικύκλιο ΑΖΒ του εσωτερικού κύκλου. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της γωνίας $x = \text{ΑΟΓ}$ σε rad;



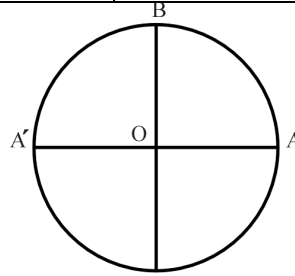
13. Με βάση το παρακάτω σχήμα, συμπληρώστε τον πίνακα:



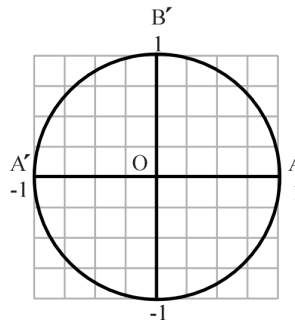
| γωνία | τελική πλευρά | μέτρο γωνίας σε μοίρες | ημίτονο γωνίας | συνημίτονο γωνίας |
|-------|---------------|------------------------|----------------|-------------------|
|-------|---------------|------------------------|----------------|-------------------|

| | | | | | |
|----------|-----|--|-----|--------------|------------------|
| θετική | ΑΟΚ | | 50° | $y = + (OP)$ | |
| θετική | ΑΟΛ | | | | $\rho = - (OS')$ |
| θετική | ΑΟΜ | | | | |
| Αρνητική | ΑΟΝ | | | | |

14. α) Τοποθετήστε στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο τη γωνία $\text{AOA}_1 = 25^\circ$ και προσδιορίστε γραφικά το ημίτονο και το συνημίτονό της. Να γίνει το ίδιο για τις γωνίες $\text{AOA}_2 = 76^\circ$, $\text{AOA}_3 = 135^\circ$.

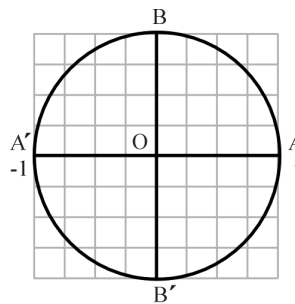


- β) Στον άξονα $A'O A$ προσδιορίστε σημείο Η με τετμημένη 0,75. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν συνημίτονο τον αριθμό 0,75. Να προσδιορίσετε γραφικά και τα ημίτονα των γωνιών αυτών.



- γ) Να γίνει ότι και στο (β) για σημείο Κ με τετμημένη 0,50 και για σημείο Λ με τετμημένη - 0,60.

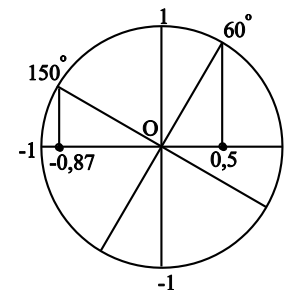
- δ) Στον άξονα $B'O B$ να προσδιορίσετε σημείο Κ με τεταγμένη 0,50. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν ημίτονο τον αριθμό 0,50. Να προσδιορίσετε γραφικά και το συνημίτονο των γωνιών αυτών.



- ε) Να γίνει ότι και στο (δ) για σημείο Ν με τεταγμένη 0,80.

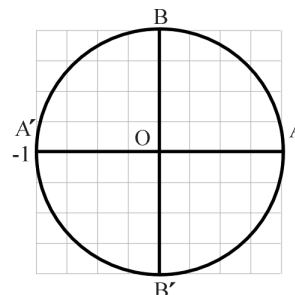
15. Με βάση τα στοιχεία που σημειώνονται στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο και τις απαραίτητες ευθείες που πρέπει να χαράξετε, να βρείτε:

- α) $\text{syn}0^\circ$ β) $\text{syn}30^\circ$
 $\text{syn}90^\circ$ $\text{syn}120^\circ$
 $\text{syn}180^\circ$ $\text{syn}240^\circ$
 $\text{syn}270^\circ$ $\text{syn}330^\circ$



Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο (β) ερώτημα.

16. Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο: Να σχεδιάσετε τις γωνίες που σημειώνονται στους πίνακες Α, Β, Γ και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τους πίνακες αυτούς.



| Πίνακας Α | | | | |
|---------------|---------|-------|----------|--------|
| γωνία | $\pi/2$ | π | $3\pi/2$ | 2π |
| τελική πλευρά | OB | | | |

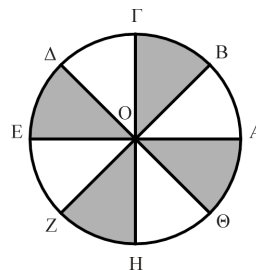
| Πίνακας Β | | | | |
|---------------|---------|----------|----------|----------|
| γωνία | $\pi/4$ | $3\pi/4$ | $5\pi/4$ | $7\pi/4$ |
| τελική πλευρά | | | | |

| Πίνακας Γ | | | | | | | |
|---------------|---------|----------|----------|---------|-------|-----------|--------|
| γωνία | $\pi/8$ | $2\pi/8$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ | | $15\pi/8$ | 2π |
| τελική πλευρά | | | | | | | |

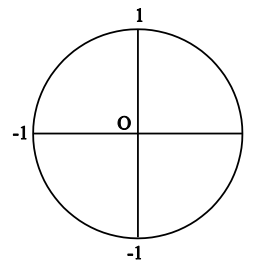
Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών του Πίνακα Γ;

17. Να γράψετε δύο γωνίες που να έχουν την ίδια αρχική και την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία:
 α) 60° , β) -20° .
18. Να τοποθετήσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο τις γωνίες:
 90° , -90° , 135° , 210° , -240° , 750° , $-4\pi/3$ rad, $-\pi$ rad.
19. Να εξετάσετε αν οι γωνίες $\varphi = 760^\circ$ και $\omega = -320^\circ$ έχουν την ίδια τελική πλευρά.

21. Ο διπλάνος κυκλικός δίσκος έχει διαιρεθεί σε οκτώ ίσους κυκλικούς τομείς. Να βρείτε σε ακτίνια τα μέτρα των γωνιών: AOB, ZOE, HOB και ZOΘ.



22. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:
 α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:
 $\pi/3$, $2\pi/3$, π , $4\pi/3$, $5\pi/3$, 2π .
 β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;
 γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;
 δ) Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;
 ε) Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.



23. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$x_k = k\pi/3 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση $\eta\mu x_{\kappa}$; η $\sigma\upsilon\nu x_{\kappa}$;

24. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:

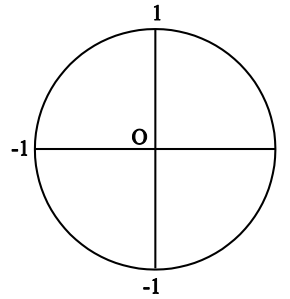
$$\pi/6, 2\pi/6, \dots, 11\pi/6, 2\pi.$$

β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;

γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;

δ) Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;

ε) Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.



25. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$y_{\kappa} = \kappa\pi/6 \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu y_{\kappa}$;

26. Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών $\kappa\pi/12$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$;

27. Το ημω:

A. μετριέται με μοίρες

B. μετριέται με rad

Γ. μετριέται με m

Δ. μετριέται με cm

E. δεν μετριέται με καμιά μονάδα

28. Από τις παρακάτω τιμές **δεν μπορεί** να είναι ημίτονο γωνίας:

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

Γ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δ. $-\frac{1}{2}$

E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. Αν $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 2$ τότε η γωνία x ισούται με:

A. 0°

B. 90°

Γ. 180°

Δ. 270°

E. κανένα από τα προηγούμενα.

30. Για οποιαδήποτε γωνία x:

A. $\sigma\upsilon\nu x < -1$

B. $\sigma\upsilon\nu x > 1$

Γ. $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

Δ. το $\sigma\upsilon\nu x$ δεν ορίζεται

E. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

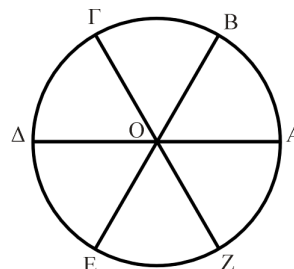
31. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος είναι χωρισμένος σε έξι ίσα τόξα.

α) Να δώσετε σε ακτίνια το μέτρο των γωνιών:

$$\angle AOB = \dots\dots\dots \quad \angle BO\Delta = \dots\dots\dots$$

β) Να δώσετε ένα μέτρο των τόξων:

$$AB \quad B\Delta \quad E\Gamma \quad \Delta A$$



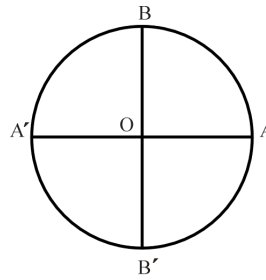
γ) Να προσδιορίσετε το σημείο M του κύκλου στις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) το τόξο BM να έχει μέτρο $2\pi/3$

ii) το τόξο ZM να έχει μέτρο $-\pi/3 + 8\pi$

iii) τα τόξα AE και ΓM να έχουν το ίδιο μέτρο.

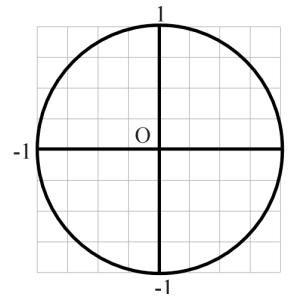
32. Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος που δείχνει το διπλανό σχήμα.



- α) Να γράψετε σε μοίρες δύο γωνίες:
- i) που να έχουν τελική πλευρά την OA
 - ii) που να έχουν τελική πλευρά την OB
 - iii) που να έχουν τελική πλευρά την OA'
 - iv) που να έχουν τελική πλευρά την OB'
- β) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που έχουν τελική πλευρά την OA, την OB, την OA' και την OB'.
- γ) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που να έχουν τελική πλευρά:
- i) την OA ή την OA'
 - ii) την OB ή την OB'.
- δ) Ποια είναι η τελική πλευρά των γωνιών:
- i) $2κπ + 3π/2, κ ∈ Z$
 - ii) $2κπ - π/2, κ ∈ Z;$

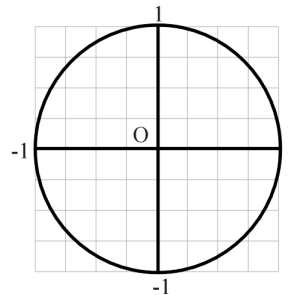
β) Σε ποιο τεταρτημόριο πρέπει να βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας για να είναι η συνεφαπτομένη της αρνητική;

35. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες: $π/3, 2π/3, π, 4π/3, 5π/3, 2π$.



- α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;
- β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συνεφαπτομένη;

36. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες: $π/4, π/2, 3π/4, π, 5π/4, 3π/2, 7π/4, 2π$.



- α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;
- β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συνεφαπτομένη;

Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!