



ΜΑΘΗΜΑ 7^ο

Η
Εξίσωση

$$x^y = \alpha$$

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = a$

1^η Περίπτωση. Όταν $a > 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός.

• Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$.

Όπως αναφέραμε στον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$.

Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $x^3 \leq 0$. Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.
Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{a}$.

2^η Περίπτωση. Όταν $a > 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$.

Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο

λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$
Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις την $\sqrt[v]{a}$ και $-\sqrt[v]{a}$.

3^η Περίπτωση. Όταν $a < 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός.

• Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$ Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \iff -x^3 = 8 \iff (-x)^3 = 8 \iff$$

$$-x = \sqrt[3]{8} \iff x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$-\sqrt[3]{8} = -2$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την
Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[v]{|a|}$.

4^η Περίπτωση. Όταν $a < 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^v = a^v$, με $v \in \mathbb{N}$, έχει προφανή λύση την $x = a$, προκύπτει ότι:

- Αν ο v περιττός τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει μοναδική λύση, την $x = a$
- Αν ο v άρτιος τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$

ΕΠΙΛΥΣΗ

$$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = -8 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^n = \alpha$

- Όταν $\alpha > 0$: Για n άρτιο, είναι $x = \sqrt[n]{\alpha}$
ή $x = -\sqrt[n]{\alpha}$

Π.χ $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ή $x = -\sqrt{5}$

- Για n περιττό, είναι $x = \sqrt[n]{\alpha}$
Π.χ $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$

- Όταν $\alpha < 0$: Για n άρτιο, η εξίσωση είναι αδύνατη

-

Π.χ $x^2 = -5$ αδύνατη

Για n περιττό, είναι $x = -\sqrt[n]{|\alpha|}$

Π.χ $x^3 = -5 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{5}$

2. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^n = \alpha^n$, με $\alpha > 0$

Για n άρτιο, είναι $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Π.χ $x^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

Για n περιττό, είναι $x = \alpha$

Π.χ $x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Φτιάξε μια δική σου εξίσωση της μορφής $x^v = a$ και λύστε την, με

- i) $a > 0$ και v περιττό
- ii) $a > 0$ και v άρτιο
- iii) $a < 0$ και v περιττό
- iv) $a < 0$ και v άρτιο

Επίλυση

- i) $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$
- ii) $x^4 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{5}$ ή $x = -\sqrt[4]{5}$
- iii) $x^3 = -5 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-5|} = -\sqrt[3]{5}$
- iv) $x^4 = -5$ αδύνατη

2.

Φτιάξε μια δική σου εξίσωση της μορφής $x^v = a^v$ και λύστε την, με $a > 0$ και

- i) v περιττό
- ii) v άρτιο

Επίλυση

- i) $x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5$
- ii) $x^4 = 5^4 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

3.

Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - x^3 - 2x + 2 = 0$

Επίλυση

$$\begin{aligned}
 x^4 - x^3 - 2x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3(x-1) - 2(x-1) = 0 \\
 &(x-1)(x^3 - 2) = 0 \\
 x-1 = 0 &\quad \text{ή} \quad x^3 - 2 = 0 \\
 x = 1 &\quad \text{ή} \quad x^3 = 2 \\
 x = 1 &\quad \text{ή} \quad x = \sqrt[3]{2}
 \end{aligned}$$

4.

Να λύσετε την εξίσωση $(x^3 + 25)^3 + 8 = 0$

Επίλυση

$$\begin{aligned}
 (x^3 + 25)^3 + 8 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + 25)^3 = -8 \\
 x^3 + 25 &= -\sqrt[3]{|-8|} \\
 x^3 + 25 &= -\sqrt[3]{8} = -2 \\
 x^3 &= -27 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{|-27|} \\
 &\quad \quad \quad x = -\sqrt[3]{27} \\
 &\quad \quad \quad x = -3
 \end{aligned}$$

Σκέφτομαι το
 $x^3 + 25$ σαν x

5.

Να λύσετε την εξίσωση $(x^3 + 29)^3 - 8 = 0$

Επίλυση

$$\begin{aligned}
 (x^3 + 29)^3 - 8 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + 29)^3 = 8 \\
 x^3 + 29 &= 2 \\
 x^3 &= -27 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{|-27|} \\
 &\quad \quad \quad x = -\sqrt[3]{27} \\
 &\quad \quad \quad x = -3
 \end{aligned}$$

Σκέφτομαι το
 $x^3 + 29$ σαν x

6.

Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^6 - 16(x-1)^2 = 0$

Επίλυση

$$\begin{aligned} (x-1)^6 - 16(x-1)^2 = 0 & \Leftrightarrow (x-1)^2 [(x-1)^4 - 16] = 0 \\ (x-1)^2 = 0 & \text{ ή } (x-1)^4 - 16 = 0 \\ x-1 = 0 & \text{ ή } (x-1)^4 = 16 \\ x = 1 & \text{ ή } (x-1)^4 = 2^4 \\ x = 1 & \text{ ή } x-1 = 2 \quad \text{ ή } x-1 = -2 \\ x = 1 & \text{ ή } x = 3 \quad \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$

iii) $x^7 - 1 = 0$

ii) $x^5 - 243 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 125$

iii) $x^7 + 1 = 0$

ii) $x^5 + 243 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 64$

iii) $x^6 - 64 = 0$

ii) $x^4 - 81 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^5 - 8x^2 = 0$

iii) $x^5 + 16x = 0$

ii) $x^4 + x = 0$

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 81m^3 και διαστάσεις x , x και $3x$. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπίπεδου.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x+1)^3 = 64$

iii) $(x-1)^4 - 27(x-1) = 0$

ii) $1 + 125x^3 = 0$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α. $x^3 - 64 = 0$

β. $x^6 + 64 = 0$

γ. $x^4 - 625 = 0$

δ. $x^5 + 1024 = 0$

ε. $x^{2013} - 1 = 0$

στ. $x^{2013} + 1 = 0$

ζ. $x^2 - 196 = 0$

η. $x^3 + 512 = 0$

2. Ομοίως:

α. $27x^3 - 1 = 0$

β. $2x^5 + 64 = 0$

γ. $125x^2 - 25 = 0$

δ. $49x^2 + 36 = 0$

ε. $64x^3 - 125 = 0$

στ. $-1000x^3 - 1 = 0$

3. Ομοίως:

α. $x^7 + 125x^4 = 0$

β. $216x^3 - x^6 = 0$

γ. $4x^5 - 100x^3 = 0$

δ. $18x^6 - 36x^4 = 0$

ε. $3x^{11} - 21x^9 = 0$

στ. $2x^8 + 128x^6 = 0$

4. Ομοίως:

α. $(x - 2)^4 = 81$

β. $(2x + 10)^3 = 125$

γ. $(x + 1)^5 + 32 = 0$

δ. $(1 - x)^4 = 8(1 - x)$

ε. $(2x - 4)^4 - 64(x - 2) = 0$

στ. $(x - 3)^4 - (3 - x)^2 = 0$