ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 5ο

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

ΟΡΙΟ ΣΤΟ xο

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1 . Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_{\nu} x^{\nu}) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_{\nu} x^{\nu})$$

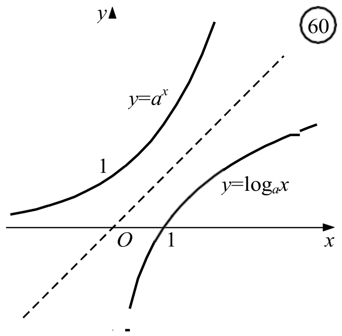
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_{\kappa}x^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_{\nu} \neq 0$, $\beta_{\kappa} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right)$$

δ) Για το όριο **εκθετικής - λογαριθμικής** συνάρτησης ισχύει ότι

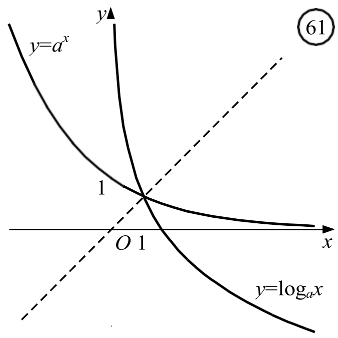
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

➢ ΟΡΙΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ΜΕ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ ΚΑΙ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$

Αρχικά απομονώνουμε τον παράγοντα που μηδενίζει τον παρονομαστή.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{g_1(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{g_2(x)}\right)$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g_2(x)}=\lambda\neq 0$

- Αν $g_1(x)>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g_1(x)}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ (ανάλογα με το λ)
- Αν $g_1(x)<0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g_1(x)}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ (ανάλογα με το λ)
- Αν το $g_1(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0 με πλευρικά όρια , διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x)$, οπότε δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

➢ ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Όταν ζητούνται οι τιμές των παραμέτρων , ώστε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda\in\mathbb{R}$ (όπου η $f(x)$ περιέχει παραμέτρους και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$) , τότε

- Θέτουμε : $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=h(x)g(x)$
- Είναι $\lim f(x)=\lim\left(h(x)g(x)\right)=0$ οπότε , προκύπτει μία σχέση με παραμέτρους.

$x \to x_0$ $x \to x_0$

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_o

36. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-x}{x-3\sqrt{x}+2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-2x+1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5-2x}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}$

37. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-2|x|+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|}$

γ. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{5-x^2}{\eta\mu x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3-2x^2}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x+5}{|x+1|}-\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\right)$

38. **α.** Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{h(x)}{|x-2|}=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

β. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x-4}{g(x)}=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to 2} \left[f(x)(-x^2-x)\right]=-\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+3}-5}{f(x)}=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to -1} \left[(x^2-4)\cdot f(x)-3x+2\right]=+\infty$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

στ. Αν $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-3$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|g(x)+2x|+g(x)-6+4x}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$.

ΟΡΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟ x_0

39. Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & , x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2+2\sqrt{x}} & , x>0 \end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, για κάθε $\alpha\in$.

40. Αν $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x<\lambda \\ x^2-x+\lambda & , x\geq\lambda \end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, για κάθε $\lambda\in$.

41. Να βρείτε το $\lambda\in$, ώστε $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-5\lambda}{(x-\lambda^2)^2}=-\infty$.

42. Να βρείτε τα λ, μ $\in$, αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\lambda x-\mu\sqrt{x}+2}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2}=8$.

43. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda\in$, η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$, δεν έχει πραγματικό όριο στο 1 .

44. Να βρείτε τους λ, μ $\in$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^3-(\lambda-\mu)x^2-(2\lambda-\mu+1)x+3-\mu}{x^3-3x+2}$$

να έχει πραγματικό όριο ℓ, στο $x_0=1$.

45. Για κάθε $\alpha\in$, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-\alpha}{\sqrt[3]{x+7}-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-\alpha}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$

γ. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-\alpha x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2\sqrt{x^2+21}-5\alpha}{\sqrt{x^2+5}-3}$