ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 4Ο
Ρίζες πραγματικών αριθμών. Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Τι λέγεται τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η: Τι λέγεται νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η: Ποιες ιδιότητες νιοστών ριζών γνωρίζετε;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η: Ποια είναι τα συμπεράσματα για τις λύσεις της εξίσωσης $\chi^{\nu} = \alpha$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η: Τι λέγεται συζυγή παράσταση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η: Τι λέγεται ρητοποίηση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η: Τι λέγεται άρρητη εξίσωση;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η: Να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{B}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η: Ποιος είναι ο ορισμός της δύναμης με ρητό εκθέτη;

β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η: Ποιες ιδιότητες τετραγωνικών ριζών γνωρίζετε; Αποδείξτε μια από αυτές.

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η: Τι ονομάζονται δυνάμεις με ρητό εκθέτη;

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η: Να αποδειχθεί ότι:

α) $\sqrt[\nu]{\alpha}\ \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha.\beta}$

β) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η: Να αποδειχθεί ότι:

α) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu.\mu]{\alpha}$

β) $\sqrt[\nu.\rho]{\alpha^{\mu.\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 14η: Να αποδειχθεί ότι

Αν α,β μη αρνητικοί αριθμοί, τότε α<β $\Leftrightarrow$ $\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

M_1: Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση που περιέχει ριζικά έχουμε υπόψη μας τα παρακάτω:

α) $\sqrt{x^2} = |x|$.

β) Τον ορισμό της απόλυτης τιμής.

Παράδειγμα 1ο

Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Pi = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} - \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ για τις διάφορες τιμές του χ.

Επίλυση

Η παράσταση Π ορίζεται για $\chi \neq 0$ και $\chi \neq 1$.

Είναι $\Pi = \dfrac{|x|}{x} - \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η Αν $\chi < 0$ τότε $|x| = -\chi$ και $|x-1| = -\chi+1$ τότε $\Pi = \dfrac{-x}{x} - \dfrac{-x+1}{x-1} = -1+1 = 0$

2η Αν $0 < \chi < 1$ τότε $|x| = \chi$ και $|x-1| = -\chi+1$ τότε $\Pi = \dfrac{x}{x} - \dfrac{-x+1}{x-1} = 1+1 = 2$

3η Αν $\chi > 1$ τότε $|x| = \chi$ και $|x-1| = \chi-1$ τότε $\Pi = \dfrac{x}{x} - \dfrac{x-1}{x-1} = 1-1 = 0$

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις α) $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

β) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

M_2: Για να αποδείξουμε μια ισότητα με ριζικά:
α) Παίρνουμε το ένα μέλος.
β) Εκτελούμε τις πράξεις.
γ) Καταλήγουμε στο άλλο μέλος.

Παράδειγμα 2ο

Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$

Επίλυση

Είναι $1^{ο}$ μέλος $= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$

<u>Εφαρμογή 2η από τον μαθητή</u>

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}$

M_3: Για να κάνουμε πιο απλή την τιμή μιας ρίζας ενός πραγματικού αριθμού:
α) Αναλύω τον αριθμό σε γινόμενο δύο άλλων από τους οποίους ο ένας είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή k^2, $k \geq 2$ $k \in N$.
β) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.
γ) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\sqrt{k^2} = k$ αφού k>0.

Παράδειγμα $3^{ο}$

Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $A = (\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32})$

Επίλυση

Είναι $A = (\sqrt{4.2} - \sqrt{9.2})(\sqrt{25.2} + \sqrt{36.2} - \sqrt{16.2})$
$= (\sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2})(\sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{36}\sqrt{2} - \sqrt{16}\sqrt{2})$
$= (2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2})$
$= -\sqrt{2}\,.\,7\sqrt{2} = -7\sqrt{2}^2 = -7.\,2 = -14$

<u>Εφαρμογή 3η από τον μαθητή</u>

Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $A = (\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32})(\sqrt{63} - \sqrt{32})$

Μ$_4$: Για να μετατρέψουμε σε μια μόνο ρίζα μια παράσταση ριζικών που εμφανίζεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:

Ι$_1$: $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}$

Ι$_2$: $\alpha^\nu \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$

Ι$_3$: $\sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\nu\kappa}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\kappa}$

Παράδειγμα 4ο

Να γράψετε την παράσταση Π = $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ **με την βοήθεια μιας μόνο ρίζας.**

Επίλυση

Είναι $\Pi = \sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3 2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}} = \sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6 2^4}} = \sqrt[30]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}$

<u>Εφαρμογή 4η από τον μαθητή</u>

Να γράψετε την παράσταση Π = $\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ **με την βοήθεια μιας μόνο ρίζας.**

Μ₅: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση 3ου ή ανώτερου βαθμού:
α) Κάνουμε παραγοντοποίηση.
β) Μηδενίζουμε κάθε παράγοντα
γ) Έχουμε υπόψη μας τον παρακάτω πίνακα για την επίλυση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.

Εξίσωση $x^\nu=\alpha$.		**Λύσεις**
α>0	**ν=άρτιος**	**x=** $\pm\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$
	ν=περιττός	**x=** $\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$
α=0	**Για κάθε ν**	**x=0**
α<0	**ν=άρτιος**	**αδύνατη**
	ν=περιττός	**x=** $-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

Παράδειγμα 5ο

Να επιλύσετε τις εξισώσεις α) $\chi^5 - 8\chi^2 = 0$ **β)** $\chi^4 + \chi = 0$
γ) $\chi^5 - 16\chi = 0$ **δ)** $\chi^3+\chi = 0$

Επίλυση

α) Είναι $\chi^5 - 8\chi^2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2(\chi^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 = 0$ ή $\chi^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^3 = 8 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = 2$.

β) Είναι $\chi^4 + \chi = 0 \Leftrightarrow \chi(\chi^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή
ή $\chi^3 = -1 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = -\sqrt[3]{\lvert -1\rvert} \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = -1$

γ) Είναι $\chi^5 - 16\chi = 0 \Leftrightarrow \chi(\chi^4 - 16) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^4 = 16 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = \pm 2$

δ) Είναι $\chi^3 + \chi = 0 \Leftrightarrow \chi(\chi^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi^2 = -1$ (αδύνατη) $\Leftrightarrow \chi = 0$

Εφαρμογή 5η από τον μαθητή

Να επιλύσετε τις εξισώσεις α) $\chi^3 - 8 = 0$ β) $\chi^4 + 1 = 0$
γ) $\chi^5 - \chi^2 = 0$ δ) $\chi^4 - 9\chi^2 = 0$

Μ$_6$: Για να βρούμε τα εξαγόμενα μιας παράστασης που περιέχει διαφορετικής τάξης ρίζες, εφαρμόζουμε:

α) τον τύπο $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$ και
β) ιδιότητες δυνάμεων

Παράδειγμα 6ο

Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
A= $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}$ B= $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4}$

Επίλυση

Είναι $A = 3^{\frac{3}{4}}$

Είναι $B =$

<u>Εφαρμογή 6η από τον μαθητή</u>

Να βρεθεί το εξαγόμενο $A = \sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5}$

M₇: Για να μετατρέψουμε μια παράσταση με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμή της με ρητό παρονομαστή έχουμε τις μορφές:

<u>1η μορφή</u>: $\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}} = \frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}} = \frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu+\nu-\mu}}} = \frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}} = \frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\alpha}$

<u>2η μορφή</u>: $\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{A\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{\alpha}^2-\sqrt{\beta}^2} = \frac{A\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\alpha-\beta}$

Παράδειγμα 7ο

Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Π = $\frac{5}{\sqrt[3]{10}}$ **Ρ =** $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Επίλυση

Είναι $\Pi = \dfrac{5}{\sqrt[3]{10}} =$

Επίσης είναι $P = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

<u>Εφαρμογή 7η από τον μαθητή</u>

Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

$\mathbf{\Pi} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ $\qquad$ $\mathbf{P} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

M_8:Για να δείξουμε ότι ένας αριθμός που περιέχει ριζικά είναι άρρητος, εργαζόμαστε με την «απαγωγή» σε άτοπο.

Παράδειγμα 8ο

Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 8η από τον μαθητή</u>

Να δειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{5}-\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

M_9: Για να συγκρίνουμε δύο άρρητους αριθμούς α, β
α) Συγκρίνουμε τα τετράγωνά τους α^2,β^2
β) Κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στο συμπέρασμα έχοντας υπόψη ότι
$\beta^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow \beta > \alpha$

Παράδειγμα 9ο

Να συγκριθούν οι αριθμοί $3+\sqrt{2}$ και $2+\sqrt{7}$.

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 9η από τον μαθητή</u>

Να συγκρίνετε τους αριθμούς ι) $\sqrt{7}$ και $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
ιι) 1- $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ - $\sqrt{2}$

M_{10}: Για να αποδείξουμε μία ισότητα ή μια ανισότητα με άπειρους όρους
α) Παίρνουμε την ισότητα ή την ανισότητα που ισχύει
β) Θέτουμε όπου ν τις φυσικές τιμές και παίρνουμε ν ισότητες ή ανισότητες
γ) Προσθέτουμε τις παραπάνω σχέσεις
δ) Καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Παράδειγμα 10ο

Α) Να δειχθεί η ταυτότητα $\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$

Β)Να δειχθεί ότι $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + .+ \frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}} = \frac{\sqrt{\nu+1}-1}{\sqrt{\nu+1}}$

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 10η από τον μαθητή</u>

Αν $\chi > 0$ να δειχθεί ότι $1+\chi+\chi^2+\ldots..+\chi^{2\nu} \geq (2\nu+1)\,\chi^{\nu}$ για κάθε ν φυσικό αριθμό.

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1.Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

ι) $\sqrt{(2\psi)^2}$, $\sqrt{\dfrac{\chi^2}{4}}$, $\sqrt{(-20)^2}$

ιι) $\sqrt{9\psi}$ - $\sqrt{16\psi}$ -5 $\sqrt{\psi}$, $\sqrt{\alpha^2\beta}$ -α $\sqrt{\beta}$ + $\sqrt{9\alpha^2\beta}$

ιιι) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$

2.Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

ι) ($\sqrt{8}$ - $\sqrt{18}$) ($\sqrt{50}$ + $\sqrt{72}$ - $\sqrt{32}$)

ιι) $\sqrt{2}\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.\sqrt{2+\sqrt{2}}$

3.Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$

4.Να επιλυθούν οι εξισώσεις

ι) χ^5-8χ^2 = 0

ιι) χ^4+χ = 0

ιιι) χ^5-16χ = 0

ιν) χ^3+χ = 0

5.Να βρεθούν τα εξαγόμενα

ι) Α = $27^{\frac{-5}{6}}.9^{1,5}.3^{\frac{1}{2}}$

ιι) Β = $\sqrt{5^3}.\sqrt[3]{5}.\sqrt[6]{5^4}$

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6.Να βρεθούν οι ρίζες

ι) $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt{0{,}0009}$, $\sqrt[3]{\dfrac{64\chi^6\psi^9}{125}}$

ιι) $A = \dfrac{\sqrt{\chi^2}}{\chi}$, $B = \sqrt{(\chi-1)^2} + \sqrt{(3-\chi)^2}$

7.Αν $\chi = 1 + \sqrt{2}$ και $\psi = 1 + \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι
$3\chi^2-6\chi+3 = 2\psi^2-4\psi+2$.

8.Να απλοποιηθούν τα ριζικά

ι) $\sqrt{108\varepsilon\ \upsilon^5\eta}$

ιι) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$

ιιι) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{o^2}}}$

9.Να βρεθούν τα γινόμενα

ι) $\sqrt[5]{\alpha^2}.\sqrt[15]{\alpha^4}$

ιι) $\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{3}\,.\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$

10.Να γίνει η ρητοποίηση των παρακάτω κλασμάτων

ι) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

ιι) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Ποιο είναι το αποτέλεσμα για ν=1 και ν=2 στην $\sqrt[\nu]{\alpha}$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

$\chi\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4\chi^3}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

$\sqrt{\chi^2+\psi^2} = \chi+\psi$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

Η παράσταση $\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$, α>0 ορίζεται στο κλειστό διάστημα [-α,α].

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

$\sqrt[8]{\chi^{10}} = \sqrt[4]{\chi^5}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Πόσες το πολύ ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $\chi^\nu = \alpha$;

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$\sqrt{\alpha} = \chi$	$\sqrt{\alpha\beta}$
$\sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}$	$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$	$\chi = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $\chi = -\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	$\sqrt[\mu.\nu]{\alpha}$
$\alpha > 0$, ν= άρτιος , $\chi^{\nu} = \alpha$	αδύνατη
$\alpha < 0$, ν = άρτιος , $\chi^{\nu} = \alpha$	$\chi^2 = \alpha$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

α) Συζυγής παράσταση λέγεται ....

β) Ρητοποίηση λέγεται ....

γ) Όταν $A > 0$, $B > 0$ και $\Gamma^2 = \alpha^2 - B > 0$ τότε $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ = ...

Διατάξτε τους αριθμούς της στήλης (Α) στη στήλη (Β) από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$\sqrt{0}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[5]{32}$	
$\sqrt[4]{81\sqrt{256}}, \sqrt{8\sqrt[3]{8}}, 27^{\frac{1}{3}}$	
$8^{\frac{5}{3}}, 25^{\frac{3}{2}}, (4^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{2}}, 16^{-0,25}$	

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η ισοδυναμία $\chi = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \chi^2 = \alpha$ ισχύει όταν

(Α)χ,α ε IR (Β) χ,α ε IR_+ (Γ) χ ε R και α ε IR_+. (Δ) α ε R και χ ε IR_+.

Α	Β	Γ	Δ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Η εξίσωση $\chi^2 = \alpha$ με α > 0 έχει λύσεις

Α	$\chi = \sqrt{\alpha}$ ή $\chi = -\sqrt{\alpha}$
Β	$\chi = \sqrt{\alpha}$ ή $\chi = \sqrt{-\alpha}$
Γ	$\chi = \sqrt{\alpha}$ μόνο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Αν α > 0 τότε για να είναι ο αριθμός $\sqrt{\alpha}$ ρητός πρέπει ο αριθμός α να είναι

Α	τετράγωνο ρητού αριθμού.
Β	θετικός αριθμός.
Γ	πραγματικός αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Έστω $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. Για να γίνει ρητοποίηση, η συνέχεια είναι

Α) $A = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$ =....... (Β) $A = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$ =..... (Γ) $A = \dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$ =...

Α	Β	Γ

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ισότητα $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu.\nu]{\alpha}$, α ≥ 0 ισχύει μόνο για μ,ν

Α	φυσικοί αριθμοί.
Β	περιττοί αριθμοί.
Γ	φυσικοί αλλά μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2.

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ......ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε......	με όταν...

Ερώτηση α)

.... ισχύει η σχέση
$\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$;

Ερώτηση β)

.... ορίζεται η παράσταση
$A = \sqrt{P(\chi)}$;

Ερώτηση γ)

.... ισχύει η σχέση
$\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta} = 0$;

Ερώτηση δ)

.... η εξίσωση $\chi^\nu = \alpha$ έχει μία μόνο ρίζα;

Ερώτηση ε)

.... ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι άρρητος αριθμός;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

11.ι) Υπολογίστε τις παραστάσεις $(3+2\sqrt{7})^2$ και $(3-2\sqrt{7})^2$

ιι) Απλοποιείστε την παράσταση $\sqrt{37+12\sqrt{7}} + \sqrt{37-12\sqrt{7}}$

12.Να βρεθούν τα εξαγόμενα

ι) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})(\sqrt{63}-\sqrt{32})$

ιι) $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}.\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$

13.Να βρεθούν τα εξαγόμενα

$A = (0,25)^{-\frac{3}{2}} . (\frac{1}{16})^{0,5}$

$B = \sqrt[9]{2^8} : \sqrt[6]{2^5}$

$\Gamma = \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2} - \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$

14.Να απλοποιηθεί η παράσταση

$\Pi = \sqrt{36\chi^4+12\chi^2+1}$

$A = \sqrt{\frac{1}{4}\chi^4+\frac{3}{5}\chi^2+\frac{9}{25}}$

15.Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$\Pi = [\alpha^{-3/2}.\beta(\alpha\beta^{-2})^{-½}.(\alpha^{-1})^{-2/3}]^3$

για $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\beta = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16.Να απλοποιηθούν τα ριζικά

ι) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

ιι) $\sqrt{54+14\sqrt{5}}$

17.Να αποδειχθεί ότι

$(\alpha^{1/3}+\beta^{1/3}).(\alpha^{2/3}-\alpha^{1/3}.\beta^{1/3}+\beta^{2/3}) = \alpha+\beta$

18.ι) Αν α>0 να αποδείξετε ότι ι $\dfrac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}} \geq 2$

ιι) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{10^{\nu}}{\sqrt{999...9}} \geq 2$

19.ι) Αν ν θετικός ακέραιος , να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{\nu.\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}} = \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} - \frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu+1}$$

ιι) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\Sigma = \frac{1}{1.\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+......+\frac{1}{99\sqrt{100}+100\sqrt{99}}$$

20. Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\Pi = (7^{1/2} - 6^{1/2}) (7^{1/2} + 6^{1/2}) (\chi^{½}+1) (\chi^{½}-1)$$

7. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Αν $x - 2\sqrt[3]{6} = 4\sqrt[3]{6}$ να υπολογίσετε τον x^3 .

2. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$x^2 + xy + y^2 \quad \text{όταν} \quad x = \sqrt{3}+1 \quad \text{και} \quad y = \sqrt{3}-1$$

3. Αν $x = 1+\sqrt{2}$ και $y = 1+\sqrt{3}$ να δείξετε ότι οι παραστάσεις :

$$\mathbf{A} = 3x^2 - 6x + 3 \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = 2y^2 - 4y + 2$$

είναι ίσες.

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2+6x+9}$$

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-\sqrt{9}}}}$.

7. Να υπολογίσετε την παράσταση : $2\sqrt{8}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{6}$.

8. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\dfrac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}$.

9. Να απλοποιηθούν τα ριζικά :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}, \quad \sqrt{9-\sqrt{8}}, \quad \sqrt{4+\sqrt{15}}$$

10. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}$.

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}+3\sqrt{\alpha}-4}{\alpha-1}$

όταν $\alpha \in [0,1)\cup(1,+\infty)$.

12. Να γράψετε την παράσταση με τη βοήθεια μιας μόνο ρίζας :

$$\sqrt{\sqrt{3\sqrt[5]{3}}}$$

13. Να απλοποιήσετε τα ριζικά :

$$\sqrt{\sqrt[4]{16}},\quad \sqrt[9]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^3},\quad \sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3}}},\quad \sqrt{108x^5y^6}$$

14. Αν $x = \sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}$ και $y = \sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{2}$, τότε να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x^2 + y^2$ και $x^3 + y^3$.

15. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α. $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$ **β.** $\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$

γ. $8\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{500}$ **δ.** $-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{54}$

ε. $(12\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450}):\sqrt{10}$

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α. $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt{3^2}}}$ **β.** $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}}}$ **γ.** $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

δ. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^4}}$ **ε.** $\sqrt[4]{\frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{y^2}{x}}}$

17. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$$

18. Να γίνουν οι πράξεις : $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^6}\cdot\sqrt[10]{x^7}$.

19. Να υπολογίσετε το γινόμενο :

$$\Gamma = \sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{3+\sqrt{3+3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[4]{3-\sqrt{3+3\sqrt{3}}}$$

20. Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

α. $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1}$ **β.** $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

γ. $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ **δ.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

ε. $\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$ **στ.** $\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

ζ. $\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ **η.** $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

θ. $\dfrac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}$ **ι.** $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$

ια. $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha-\beta}}$ (με $\alpha > \beta$) **ιβ.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$

ιγ. $\dfrac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

21. Να γίνουν οι πράξεις : $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

22. Να γίνουν οι πράξεις : $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$.

23. Να γίνουν οι πράξεις : $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-3}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-3}$.

24. Να γίνουν οι πράξεις : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

25. Αν $0 < x < \alpha$ να δείξετε ότι : $\dfrac{\sqrt{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}}-\sqrt{\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}}{\sqrt{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}}+\sqrt{\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}}=\dfrac{x}{\alpha}$.

26. Να δείξετε ότι : $\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{9}}+\sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

27. Να δείξετε ότι : $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}+\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}}=\sqrt{5}$.

28. Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι : $\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}\le\sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

29. Να δείξετε ότι : $\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

30. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt{2}$.

31. Να δείξετε ότι : $\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

32. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, όταν α, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

33. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma = (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$$

34. Για ποιες τιμές του $x\in$Ρ έχουν έννοια οι παραστάσεις :

$$\mathbf{A}=\frac{2x-1}{x^4+7x} \qquad \mathbf{B}=\frac{4}{x^5+8x} \qquad \mathbf{\Gamma}=\frac{2x-\sqrt{x-1}}{x^3+x^2}$$

35. Αν x = 0,125 και y = $(0,\overline{6})^{-6}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A}=\left[x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-1}\cdot\left(x^{-1}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

36. Αν $x=1-3\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A}=\frac{\sqrt{2}}{x}-\frac{3}{x^2}$$