ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	No 4

Τάξη	: Β΄ Λυκείου
Μάθημα	: Μαθηματικά
Κεφάλαιο	: 1ο
Διδακτική ενότητα	: 4η
Ημερομηνία	: 04-10-2018
Διδάσκων καθηγητής	: Ηλίας Ράιδος

« Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων »

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

01. Να δοθεί ο πλήρης ορισμός του εσωτερικού γινομένου.

02. Να γράψετε την σχέση που ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο δύο κάθετων διανυσμάτων.

03. Να γράψετε την σχέση που ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο δύο ομόροπων διανυσμάτων.

04. Να γράψετε την σχέση που ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο δύο αντίρροπων διανυσμάτων.

05. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου.

06. Διατύπωση και απόδειξη ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου.

07. Να υπολογισθεί ο τύπος τους συνημίτονου της γωνίας δυο διανυσμάτων με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου.

08. Τι ονομάζεται προβολή διανύσματος πάνω σε άλλο διάνυσμα και ποια σχέση την συνδέει με το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων;

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

01. Εφαρμογή 1/ Σελ.44
02. Εφαρμογή 2/ Σελ.44
03. Εφαρμογή 3/ Σελ.45
04. Εφαρμογή 1/ Σελ.46
05. Εφαρμογή 2/ Σελ.46
06. Άσκηση 1/Σελ.47
07. Άσκηση 2/Σελ.47
08. Άσκηση 3/Σελ.47
09. Άσκηση 4/Σελ.47

10. Άσκηση 5/Σελ.47
11. Άσκηση 6/Σελ.47
12. Άσκηση 7/Σελ.47
13. Άσκηση 8/Σελ.47
14. Άσκηση 9/Σελ.47
15. Άσκηση 10/Σελ.48
16. Άσκηση 11/Σελ.48
17. Άσκηση 12/Σελ.48
18. Άσκηση 13/Σελ.48
19. Άσκηση 14/Σελ.48
20. Άσκηση 15/Σελ.48

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Υπάρχουν $x \in IR$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1,3)$ και $\vec{\beta}=(x, 1)$ να είναι κάθετα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Όταν οι συντελεστές διεύθυνσης δύο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
/ $\vec{\alpha}=(2\kappa,1)$	/ $\vec{\beta}=(0,\kappa)$
/ $\vec{\alpha}=(\kappa,-1)$	/ $\vec{\beta}=(1/\kappa,1)$
/ $\vec{\alpha}=(\kappa+1,\kappa)$	/ $\vec{\beta}=(1,1/\kappa)$
/ $\vec{\alpha}=(0,1/\kappa)$	/ $\vec{\beta}=(1,-2\kappa)$
	/ $\vec{\beta}\,(\kappa,-\kappa-1)$
	/ $\vec{\beta}\,(\kappa^2,0)$

Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$ και $(\vec{\alpha},\vec{\gamma})=\pi$. Να αντιστοιχίσετε το εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη (Α) με την τιμή που βρίσκεται στη στήλη (Β).

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
/ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$	/ -1
/ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$	/ 0
/ $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$	/ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	/ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	/ $\frac{1}{2}$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

1 Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ είναι ένα διάνυσμα :

Α. ☐ παράλληλο στο $\vec{\alpha}$
Β. ☐ παράλληλο στο $\vec{\beta}$
Γ. ☐ ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$
Δ. ☐ ομόρροπο στο $\vec{\beta}$
Ε. ☐ τίποτε από τα παραπάνω.

2 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(λ,4) και $\vec{\beta}$=(λ-4,1) είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με :

Α. ☐ 0
Β. ☐ -2
Γ. ☐ 2
Δ. ☐ 4
Ε. ☐ 1/4

3 Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(λ^2,2λ) και $\vec{\beta}$=(1,-2) είναι παράλληλα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με :

Α. ☐ -2
Β. ☐ -1
Γ. ☐ $\sqrt{2}$
Δ. ☐ 1
Ε. ☐ 2

4 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(-2,4) και $\vec{\beta}$=(3,-2). Η σχέση $\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}=\vec{0}$ ισχύει με :

Α. ☐ κ=2/3
Β. ☐ κ=-2/3
Γ. ☐ κ=-2
Δ. ☐ κ=2
Ε. ☐ κανένα $\kappa\in$ IR.

4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ......ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

1. Πότε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα;

   Απάντηση

2. Πότε ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$;

   Απάντηση

3. Πότε ισχύει η σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$;

   Απάντηση

4. Πότε ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{x} \Rightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$;

   Απάντηση

ΕΠΙΠΕΔΟ 3ο

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ

Α. Βασικές ασκήσεις σχολικού βιβλίου

01. Άσκηση Β-1/Σελ.48
02. Άσκηση Β-2/Σελ.48
03. Άσκηση Β-3/Σελ.48
04. Άσκηση Β-4/Σελ.49
05. Άσκηση Β-5/Σελ.49
06. Άσκηση Β-6/Σελ.49
07. Άσκηση Β-7/Σελ.49
08. Άσκηση Β-8/Σελ.49
09. Άσκηση Β-9/Σελ.49
10. Άσκηση Β-10/Σελ.49
11. Άσκηση Β-11/Σελ.4

Ερωτήσεις του τύπου «σωστό-λάθος»

1. Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in R$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. **Σ** **Λ**

1. Αν $\vec{\alpha} . \vec{\beta} > 0$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ είναι οξεία. **Σ** **Λ**

2. Το $(\vec{\alpha} . \vec{\beta}). \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

3. Το $(\lambda \vec{\alpha}). \vec{\beta}$, $\lambda \in R$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

4. Το $(\vec{\alpha} \lambda). \vec{\beta}$, $\lambda \in R$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

5. Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα. **Σ** **Λ**

6. Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

7. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. **Σ** **Λ**

8. Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha} . \vec{\beta} < 0$. **Σ** **Λ**

9. Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

10. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

11. Υπάρχουν $x \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, 3)$ êáé $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

12. Υπάρχουν $\theta \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}\left(\frac{1}{συν\theta}, \frac{1}{ημ\theta}\right)$ και $\vec{\beta}$ (ημθ, συνθ) να είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

13. Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta} = \vec{\alpha}\cdot προβ_{\vec{\delta}}\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

14. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με:

Α. $\lambda = -1$ **Β.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$

Δ. $\lambda = 2$ **Ε.** $\lambda = 8$

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Σωστή είναι η σχέση:

Α. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **Β.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \,//\, \vec{\gamma}$

Δ. $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ **Ε.** $\vec{\alpha} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$

18. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με:

Α. 0 **Β.** - 2 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{1}{4}$

22. Αν $|\vec{\kappa}| = 2$, $|\vec{\nu}| = 3$, $\vec{\kappa}\cdot\vec{\nu} = -3$ και $0 \le \vec{\theta} = (\widehat{\vec{\kappa}, \vec{\nu}}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με:

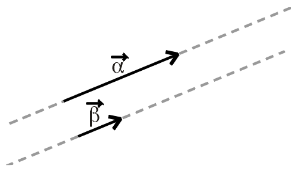
Α. 0° **Β.** 30° **Γ.** 60° **Δ.** 120° **Ε.** 150°

23. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$. Από τις παρακάτω σχέσεις δεν μπορεί να ισχύει:

Α. $\vec{\alpha} = 0$ **Β.** $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ **Γ.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$

Δ. $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$ **Ε.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

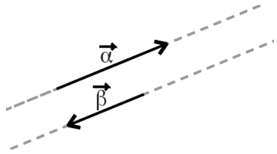
24. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με:



Α. $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Β.** $-\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** 0

Δ. $\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

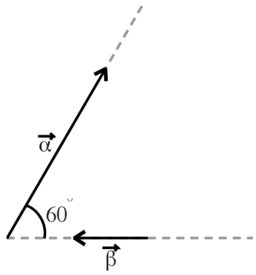
25. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με:



Α. 0 **Β.** $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** $-\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

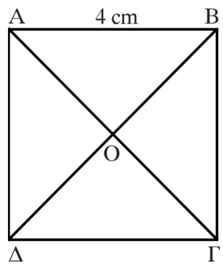
26. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με:



Α. $|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Β.** $\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

Δ. $-\,\frac{1}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\vec{\alpha}|\,.\,|\vec{\beta}|$

27. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm.
Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;



Α. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{\Gamma B} = 0$ **Β.** $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB} = 8$

Γ. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{A\Gamma} = 16$ **Δ.** $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\,16$

Ε. $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{BA} = 8$

28. Αν $\vec{\alpha}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha}\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha}$ **Β.** $\vec{\alpha}\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$

Γ. $\vec{\beta}\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$ **Δ.** $|\vec{\alpha}|\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta}$

Ε. $|\vec{\beta}|\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha}$

29. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το συν$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ισούται με:

Α. $\frac{|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|}{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}$ **Β.** $\frac{\vec{\alpha}\,|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|.\vec{\beta}}$ **Γ.** $\frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|}$ **Δ.** $\frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$ **Ε.** $\frac{|\vec{\alpha}.\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$

Ερωτήσεις διάταξης

1. Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}.\vec{\delta}$, $\vec{\alpha}.\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}.\vec{\delta}$, $\vec{\gamma}.\vec{\delta}$

2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\gamma} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{\delta} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$. Να τα γράψετε σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διευθύνσεως καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διευθύνσεως του επομένου του.

3. Σε ένα κύκλο παίρνουμε χορδές ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ με μήκος ίσο αντιστοίχως προς τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου και κανονικού δεκαγώνου, που εγγράφονται σ' αυτό. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|$, $|\overrightarrow{A\Delta}|$, $|\overrightarrow{AE}|$.

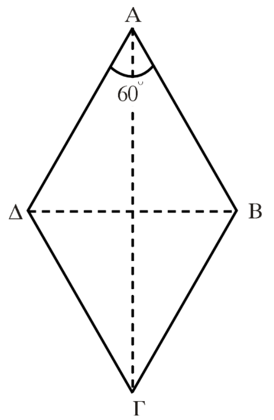
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗ

10. Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}) = \pi$.

Να αντιστοιχήσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη (Α) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη (Β).

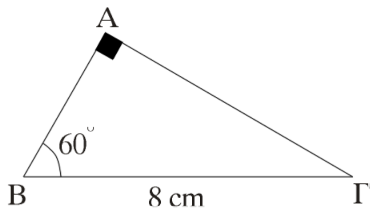
στήλη Α	**στήλη Β**
Εσωτερικό γινόμενο	-1
$\vec{\alpha}.\vec{\beta}$	0
$\vec{\alpha}.\vec{\gamma}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\vec{\gamma}.\vec{\beta}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\frac{1}{2}$

11. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με γωνία Α = 60° και πλευρά 6 cm. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχήσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης (Α) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης (Β).



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	18
	36
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$	0
	- 36
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	- 18
	$18.\sqrt{3}$
$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	

12. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και έχει γωνία Β = 60°. Αν η υποτείνουσά του ΒΓ είναι 8 cm. Να αντιστοιχήσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης (Α) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης (Β).



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$	-16
	$16\sqrt{3}$
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$	16
	0
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$	$-16\sqrt{3}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	μέτρο διανύσματος	γωνία $(\vec{Ox}, \vec{\alpha})$
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$		

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα σε καθεμιά από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

	Διανύσματα	**τιμή του x**
1.	$\vec{u} = (3, -5)$ και $\vec{v} = (10, x)$	
2.	$\vec{u} = (x, 4)$ και $\vec{v} = (2, -1)$	
3.	$\vec{u} = (3x, -3)$ και $\vec{v} = (x, 4)$	

3. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		**Σχετική θέση του $\vec{\alpha}$ ως προς τους άξονες x΄x, ψψ΄, (γωνία που σχηματίζει)**	**Σχετική θέση του $\vec{\beta}$ ως προς τους άξονες x΄x, ψψ΄, (γωνία που σχηματίζει)**	**Σχετική θέση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)**
$\vec{\alpha}$	$\vec{\beta}$			
(2, 0)	(0, - 3)			
(2, 2)	(- 3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		**γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$**	**μέτρο: $\|\vec{\alpha}\|$**	**μέτρο: $\|\vec{\beta}\|$**	**εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\,\vec{\beta}$**
$\vec{\alpha}$	$\vec{\beta}$				
(- 1, 4)	(2, - 3)	$\frac{\pi}{3}$			
(3, 2)	$(-1, \sqrt{2})$	$\frac{\pi}{12}$			
$(1, \sqrt{3})$	(1, 1)	$\frac{\pi}{4}$			
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{5\pi}{6}$			

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

59. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όπου $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ να βρεθούν τα:

α. $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$ **β.** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$ **γ.** $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

60. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

61. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Να βρείτε το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

62. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε να βρείτε το $|\vec{\gamma}|$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$.

63. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα, τότε να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

64. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

65. Αν $\vec{\alpha}=(\sqrt{3}(x-1),\ 2x)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},\ 1)$, τότε να βρείτε το x, ώστε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{5}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το $|\vec{v}|$, καθώς και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{\alpha}$.

67. Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α. $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$ **β.** $\vec{p}//\vec{\beta}$ **γ.** $\vec{q}\perp\vec{\beta}$

68. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-9,19)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να έχει διεύθυνση ίδια με τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}=(5,-3)$.

69. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(4,3)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,1)$.

70. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε το $\vec{x}$ αν $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$.

71. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$.

72. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, τότε να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

73. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

α. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

β. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

γ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

74. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

75. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι είναι αδύνατη στο η εξίσωση:

$$\left(1+\left(\vec{\alpha}\right)^2\right)x^2 - 2\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|x + \left(1+\left(\vec{\beta}\right)^2\right) = 0$$

76. Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$.

77. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\delta}$ με $\left|\vec{\delta}\right| = 2\sqrt{10}$ που έχει αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία είναι η $(4, 2)$.

78. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} = 1$, $\vec{\beta} = 2$, $\vec{\gamma} = 3$. Αν ισχύει ότι $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - 3\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -1$.

79. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $6\left|\vec{\alpha}\right| = 3\left|\vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\gamma}\right|$, τότε να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$ και το $\vec{\beta}$ αντίρροπο με το $\vec{\gamma}$.

80. Αν $1 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \neq 0$, τότε να λύσετε ως προς $\vec{x}$ την εξίσωση:

$$\vec{x} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

81. **α.** Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$ αν $x^2 + y^2 = 36$.

82. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$, $\vec{\beta} = (2, -5)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{x}\cdot\vec{\alpha} = 5$ και $\vec{x}\cdot\vec{\beta} = -8$.

83. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=5$, $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$ να βρείτε το $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$.

84. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$, $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ σχηματίζουν γωνία $2\pi/3$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

85. Σε πλαγιογώνιο σύστημα αξόνων τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 2), $\vec{\beta}$ = (3, 0) είναι κάθετα. Να βρείτε την γωνία των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.

86. Έστω ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ισχύει ότι: $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma})\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=(\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma})\cdot\overrightarrow{AB}$ να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κορυφή το Α.

87. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$, όπου Δ είναι η προβολή του Α στη ΒΓ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

88. Αποδείξτε διανυσματικά ότι αν οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι κάθετες τότε αυτό είναι ρόμβος.

89. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

α. Να δειχθεί ότι: $\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}\right|=1$.

β. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}+\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ είναι παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

90. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β με $|\overrightarrow{AB}|=8$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=9$.

91. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{x}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

92. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 5)$ και $B(4, -2)$. Τότε:

α. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα $y'y$, το οποίο ισαπέχει από τα Α και Β.

β. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ στο $\overrightarrow{MB}$.

γ. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μια από τις οποίες έχει τη διεύθυνση του $\overrightarrow{MB}$.

93. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ και $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

94. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x+1, 2)$ και $\vec{\beta} = (x, 2x+1)$ με $x\in$.

α. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι συγγραμμικά για κάθε $x\in$.

β. Αν $x = -3$, τότε να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.

γ. Αν $x = -1$, τότε να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=3\vec{i}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

δ. Αν $x = -2$, τότε να βρείτε ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με μέτρο $\sqrt{10}$.

95. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=12\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γνωστά μοναδιαία διανύσματα κάθετα μεταξύ τους.

α. Να εκφραστεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

β. Να εκφραστεί η διάμεσος $\overrightarrow{AM}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να υπολογιστεί το μήκος της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

65. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 75°$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135°$

66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2}$

γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

δ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

67. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$

68. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων:

$\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$

69. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45°$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$

70. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\left|\text{συν}\frac{\theta}{2}\right|$

71. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων:

$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

72. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$

73. Αν $\vec{u}(-3-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ και $0 < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{12}$

74. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$

75. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$

76. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

77. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$ και $\vec{\gamma} = (-1, 0)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα $\vec{v}$ με $|\vec{v}| = 10$, $\vec{v} \perp \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$, $\lambda, \mu \in R$.

78. Αν $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 4$ ή $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -4$.