

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ
ΑΡΙΘΜΟΙ**

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

**Παραγοντοποίηση αλγεβρικών
παραστάσεων**

**ΦΥΛΛΟ
ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

4

I. ΣΧΕΔΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

- Ο διδάσκων καθηγητής ζητάει από τους διδασκόμενους
Τι είναι παραγοντοποίηση
Ποιες είναι οι μέθοδοι παραγοντοποίησης
και συμπληρώνει σύντομα τη βασική θεωρία για την παραγοντοποίηση με ένα παράδειγμα για την κάθε περίπτωση
- Γίνονται επιλεκτικά στη τάξη από τους μαθητές, με επιβεβαίωση ή διάψευση από τον καθηγητή, οι ερωτήσεις κατανόησης B₈.
- Ο διδάσκων καθηγητής αναπτύσσει τα παραδείγματα του Γ' μέρους
- Ο διδασκόμενος μαθητής επιβλέπεται από τον καθηγητή και αναπτύσσει στο τετράδιο του τις 4Δ1,4 Δ2.
- Γίνεται σύντομη ανακεφαλαίωση του αντικειμένου από τον διδάσκοντα καθηγητή
- Δίνονται στον μαθητή για το σπίτι
α) οι υπόλοιπες ερωτήσεις κατανόησης,
β) τα θέματα 4Δ.

II. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ

A. Βασική Θεωρία (επιγραμματικά)-Παρατηρήσεις-Σχόλια

- α) Ορισμός παραγοντοποίησης.
β) Μέθοδοι παραγοντοποίησης
Κοινός παράγοντας
Κοινοί παράγοντες σε ομάδες (ομαδοποίηση)
Τέλειο τετράγωνο
Διαφορά τετραγώνων
Ταυτότητες κύβων
Διαφορά ή άθροισμα δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη
Τριώνυμο δευτέρου βαθμού
Διάσπαση ενός όρου
Πρόσθεση ή αφαίρεση όρου
Συνδυασμός διαφόρων μεθόδων.

B. Ερωτήσεις κατανόησης τύπου: Σωστού-Λάθους, πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης, διάταξης και συμπλήρωσης.

- Πότε τελειώνει η διαδικασία της παραγοντοποίησης;
.....
- Πότε ο αριθμός α είναι παράγοντας του β;
.....
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $\frac{x^2}{x} = x$;
.....
- Το γινόμενο $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ είναι ίσο με
A. x^8 B. x^8-1 Γ. $x^8+x^4+x^2+1$ Δ. Καμία από τις προηγούμενες.
- Αν $\psi = -\chi$ τότε η παράσταση $\chi^2-\psi^2$ ισούται με
A. 2χ B. 2ψ Γ. $\chi-\psi$ Δ. 0

| | |
|--|--|
| A. $(\alpha+\beta)^2$ | 1. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ |
| B. $\alpha^3-\beta^3$ | 2. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$ |
| Γ. $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ | 3. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ |
| Δ. $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$ | 4. $(\chi+\psi)(\chi-\psi)$ |
| E. $\chi^2-\psi^2$ | 5. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$ |

7. Συμπληρώστε τον πίνακα με την κατάλληλη μαθηματική έκφραση.

| | |
|--|--|
| Η διαφορά κύβων δύο αριθμών | |
| Το άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών | |
| Το τετράγωνο του αθροίσματος 3 αριθμών | |
| Το άθροισμα τετραγώνων τριών αριθμών | |

8. Αναγνωρίστε ποια μέθοδο παραγοντοποίησης χρησιμοποιείται στα παρακάτω αθροίσματα:
 α) $4\chi^2\psi+8\chi^3\psi^2-16\chi^2\psi^4$
 β) $9\chi^2-16\psi^4$
 γ) $4\chi^2+20\chi+25$
 δ) $\alpha\chi+\alpha\psi+\beta\psi+\beta\chi$
 ε) χ^6-64
 στ) $\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$
 ζ) $2\chi^2+3\chi-5$
 η) $\chi^2+5\chi+6$
 θ) $\alpha^2+2\alpha\gamma-\beta^2-2\beta\gamma$
 ι) $\alpha^4+4\beta^4$
 ια) $\chi^3+6\chi^2+11\chi+6$
 ιβ) $12\chi^2-3$

6. Να αντιστοιχίσετε τις δύο στήλες:

| | |
|---------|---------|
| Στήλη A | Στήλη B |
|---------|---------|

Γ. Αναπτυγμένα παραδείγματα για εμπέδωση με αντίστοιχους αλγόριθμους(μεθοδολογίες)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο

- Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις
 i) $5a^2xy-10a^5x^3$ ii) $10x^3-6y^3+4xy^2-15x^2y$
 iii) $9a^4-16$ iv) x^2-7x+6
 v) $4a^2+20a\beta+25\beta^2$ vi) x^4+4x^2+16
 vii) $2x^2+3x-5$ viii) $a^6-\beta^6$

Επίλυση

- i) $5a^2xy-10a^5x^3 = 5a^2x(y-2a^3x^2)$
 ii) $10x^3-6y^3+4xy^2-15x^2y = 5x^2(2x-3y)+2y^2(2x-3y) = (2x-3y)(5x^2+2y^2)$
 iii) $9a^4-16 = (3a^2)^2-4^2 = (3a^2-4)(3a^2+4)$
 iv) $x^2-7x+6 = x^2-(6+1)x+6 = (x-6)(x-1)$
 v) $4a^2+20a\beta+25\beta^2 = (2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3\beta+(3\beta)^2 = (2a+3\beta)^2$
 vi) $x^4+4x^2+16 = x^4+4x^2+16+4x^2-4x^2 = x^4+8x^2+16 - 4x^2 = (x^2+4)^2 - (2x)^2 = (x^2+4-2x)(x^2+4+2x)$
 vii) $2x^2+3x-5 = 2x^2-2x+5x-5 = 2x(x-1)+5(x-1) = (x-1)(2x+5)$
 viii) $a^6-\beta^6 = (a^3)^2-(\beta^3)^2 = (a^3-\beta^3)(a^3+\beta^3) = (a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)$

Παράδειγμα 2ο

Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$\frac{(x^4 - 1)(x^2 - 2x)}{(x^3 - 4x)(x^3 - x)}$$

Επίλυση

Είναι :
$$\frac{(x^4 - 1)(x^2 - 2x)}{(x^3 - 4x)(x^3 - x)} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)x(x - 2)}{x(x^2 - 4)x(x^2 - 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)x(x - 2)}{x(x - 2)(x + 2)x(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)}{x(x + 2)}$$

για $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq 2, x \neq -2$.

Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\Pi = \left(\frac{3}{\alpha - \beta} + \frac{2}{\alpha + \beta} \right) : \frac{5\alpha + \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Είναι
$$\Pi = \frac{3(\alpha + \beta) + 2(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{5\alpha + \beta} = \frac{3\alpha + 3\beta + 2\alpha - 2\beta}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} \cdot \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{5\alpha + \beta} = \frac{(5\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(5\alpha + \beta)} = 1$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

M₄: Για να κάνουμε **παραγοντοποίηση** ακολουθούμε, με τη σειρά που γράφονται, τα παρακάτω βήματα:

- 1) Κοινός παράγοντας
- 2) Ομαδοποίηση (ξεγαράκια - και ως παράγοντες)
- 3) Ταυτότητα $a^2 - \beta^2 = (a + \beta)(a - \beta)$
- 4) Ταυτότητα τετραγώνου $(a \pm \beta)^2 = a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$
- 5) Ταυτότητες κύβων
- 6) Τριώνυμο $x^2 \pm (a + \beta)x + a\beta = (x \pm a)(x \pm \beta)$
- 7) Μέθοδος της προσθαφαίρεσης
- 8) Συνδυασμός των παραπάνω.

M₂: Για να απλοποιήσουμε μία ρητή αλγεβρική παράσταση:
 α) Κάνουμε παραγοντοποίηση στους όρους της παράστασης
 β) Θέτουμε τους περιορισμούς. Όλοι οι παράγοντες στον παρονομαστή διάφοροι του μηδενός.
 γ) Απλοποιούμε

Δ. Προτεινόμενα θέματα προς τους διδασκόμενους για ανάπτυξη

- 4Δ1. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
 α) $16x^3y-24x^2y^2+12xy^3-2y^4$ β) $(4x-3)^2-(3+x)^2$
 γ) $(2x+1)^3-125x^3$ δ) $x^2+4y^2+9-4xy+6x-12y$

- 4Δ2. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις
 i) $a(a-3\psi)+\beta(\chi-a)-\chi(a-3\psi)$
 ii) $a\beta^2-2a^2+2\beta^3-4a\beta$
 iii) $375\chi^3-3$
 iv) $\chi^3-\chi^2+\chi\psi+\chi-\psi-1$
 v) $(\chi-\psi)^3+(\psi-\omega)^3+(\omega-\chi)^3$

4Δ3. Να γίνουν οι πράξεις
$$\frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 + 1}$$

4Δ4. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\Pi = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4x^3}{1+x^4}$$

4Δ5. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{(x-1)(x-3)-(1-x)(x-5)}{x^2-1}$$

4Δ6. Να απλοποιηθεί το κλάσμα
$$\frac{\alpha(5\alpha-9\beta)+2\beta(\alpha-3\beta)}{2\beta(4\alpha-5\beta)-3\alpha(3\beta-\alpha)}$$

4Δ7. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2\chi+4} - \frac{1}{3\chi-6} + \frac{\chi+8}{3(\chi^2-4)} = \frac{1}{2(\chi-2)}, \quad \chi \neq -2, 2.$$