ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 3Ο

απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Ποιες είναι οι ιδιότητες των απόλυτων τιμών;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η: Τι λέγεται απόσταση δύο αριθμών α και β και πως συμβολίζεται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η: Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν $\theta > 0$ τότε $|\chi| > \theta \Leftrightarrow \chi < -\theta$ ή $\chi < \theta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η: Να αποδείξετε τις ιδιότητες:

α) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

β) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η: Ποιος είναι ο ορισμός της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού α;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η: Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν $\theta > 0$ τότε $|\chi| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \chi < \theta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η: Να αποδείξετε την ιδιότητα:

$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

M_1: Για να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή πρέπει να εφαρμόσουμε:
α) Τον ορισμό της απόλυτης τιμής |α|=α, αν α≥0 και |α|=-α, αν α<0 δηλαδή
i) Για α≥0, τότε το α βγαίνει από την απόλυτη τιμή όπως είναι δηλαδή α.
ii) Για α<0, τότε το α βγαίνει από την απόλυτη τιμή με ένα πλην, δηλαδή –α.
β) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|x|^2=x^2$.

Παράδειγμα 1ο
Αν είναι α<β<γ, να απλοποιηθεί η παράσταση
Α=3|α-β|+2|β-γ|-4|γ-α|

Επίλυση

Αφού α<β<γ παίρνουμε α-β< 0 , β-γ < 0 και γ-α > 0 οπότε έχουμε
Α = -3(α-β)-2(β-γ)-4(γ-α) = -3α+3β-2β+2γ-4γ+4α = α +β –2γ

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

Αν x<ψ<z, να απλοποιηθεί η παράσταση Α=4|x-ψ|+3|ψ-z|-2|z-x|

M_2: Για να επιλύσουμε μία εξίσωση με μια απόλυτη τιμή ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία, όπως στην εξίσωση α΄ βαθμού με άγνωστο τον x. Καταλήγοντας στη μορφή |x|=θ συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα έχοντας υπόψη ότι:
i) Για θ>0 έχουμε x=±θ.
ii) Για θ=0 έχουμε x=0.
iii)Για θ<0 η εξίσωση είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 2ο

Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{5|x|+1}{3}-\frac{2|x|+3}{5}=\frac{3|x|+4}{6}$ **(1)**

Επίλυση

Η εξίσωση (1) γράφεται $30\frac{5|x|+1}{3}-30\frac{2|x|+3}{5}=30\frac{3|x|+4}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $10(5|x|+1)-6(2|x|+3)=5(3|x|+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50|x|+10-12|x|-18=15|x|+20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50|x|-12|x|-15|x|=20+18-10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 23|x|=28 \Leftrightarrow |x|=\dfrac{28}{23} \Leftrightarrow \chi=\pm\dfrac{28}{23}$

<u>Εφαρμογή 2η από τον μαθητή</u>

Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3|x+2|}{4}+\dfrac{2|x+2|-1}{3}=|x+2|$

Μ$_3$: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση της μορφής |x|=α:
α) Παίρνουμε τις ισοδυναμίες της x=α ή x=-α.
β) Επιλύουμε ως προς τον άγνωστο της εξίσωσης.
γ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 3^{ο}
Να επιλυθεί η εξίσωση |3x-1|=|x-3| (1)

Επίλυση
Η (1) γράφεται $3\chi-1=\chi-3$ ή $3\chi-1=-\chi+3 \Leftrightarrow 3\chi-\chi=1-3$ ή $3\chi+\chi=3+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\chi=-2$ ή $4\chi=4 \Leftrightarrow \chi=-1$ ή $\chi=1$.

<u>Εφαρμογή 3η από τον μαθητή</u>

Να επιλυθεί η εξίσωση: |x+4|=2|x+1|

M_4: Για να επιλύσουμε μια ανίσωση με μια απόλυτη τιμή:
α) Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και στις απλές ανισώσεις.
β) Καταλήγοντας στη μορφή |x|<α ή |x|>α χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες |x|<α ⇔ -α<x<α ή |x|>α ⇔ (x>α ή x<-α) και επιλύουμε ως προς τον άγνωστο της εξίσωσης.
γ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

Να επιλύσετε την ανίσωση: $\dfrac{|x-1|-4}{2}+\dfrac{5}{3}<\dfrac{|x-1|}{3}$ **(1)**

Επίλυση

Η ανίσωση (1) γράφεται $6\dfrac{|x-1|-4}{2}+6\dfrac{5}{3}<6\dfrac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(|x-1|-4)+2.5<2|x-1| \Leftrightarrow 3|x-1|-12+10<2|x-1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x-1|-2|x-1|<12-10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow -2<\chi-1<2 \Leftrightarrow -2+1<\chi-1+1<2+1 \Leftrightarrow -1<\chi<3$.

<u>Εφαρμογή 4η από τον μαθητή</u>

Να **επιλύσετε την ανίσωση** : $\dfrac{2|x|-3}{4}<\dfrac{2|x|+1}{3}$

M_5: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση που περιέχει μια απόλυτη τιμή, αλλά υπάρχει και ο άγνωστος έξω από την απόλυτη τιμή, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις εφαρμόζοντας τον ορισμό της απόλυτης τιμής.

Παράδειγμα 5ο

Να επιλυθεί η εξίσωση 3|x-1|=2x-1 (1)

Επίλυση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) Για $\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ η (1) δίνει $3(\chi-1) = 2\chi-1 \Leftrightarrow 3\chi-3 = 2\chi-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\chi-2\chi=3-2 \quad \Leftrightarrow \chi = 1$
β) Για $\chi - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 1$ η (1) δίνει $-3(\chi-1) = 2\chi-1 \Leftrightarrow -3\chi+3 = 2\chi-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3\chi-2\chi = -1-3 \Leftrightarrow -5\chi = -4 \Leftrightarrow \chi = \frac{4}{5}$
Αρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\chi = 1$ και $\chi = \frac{4}{5}$.

Εφαρμογή 5η από τον μαθητή

Να επιλυθεί η εξίσωση |7-x|=2x+5

M_6: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση που περιέχει δύο ή περισσότερες διαφορετικές απόλυτες τιμές:
α) Βρίσκουμε που μηδενίζεται η κάθε απόλυτη τιμή.
β) Σχηματίζουμε συγκεντρωτικό πίνακα στον οποίο φαίνονται τα σημεία μηδενισμού των απόλυτων τιμών και το πρόσημο των παραστάσεων που περιέχονται στις απόλυτες τιμές.
γ) Για το κάθε διάστημα ξεχωριστά παίρνουμε την αρχική εξίσωση, κάνουμε απαλοιφή απόλυτων τιμών, επιλύουμε την εξίσωση και συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 6°

Να επιλυθεί η εξίσωση: $|x-3|+2|x|=4x-1$ (1)

Επίλυση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

Α) Αν $\chi \leq 0$ τότε η (1) γράφεται $-(\chi-3)-2\chi=4\chi-1 \Leftrightarrow -\chi+3-2\chi=4\chi-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\chi-2\chi-4\chi=-1-3 \Leftrightarrow -7\chi=-4 \Leftrightarrow \chi=\frac{4}{7}$ απορρίπτεται γιατί $\chi \leq 0$.

β) ÁÃ $0<\chi \leq 3$ τότε η (1) γράφεται $-(\chi-3)+2\chi=4\chi-1 \Leftrightarrow -\chi+3+2\chi=4\chi-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\chi+2\chi-4\chi=-1-3 \Leftrightarrow -3\chi=-4 \Leftrightarrow \chi=\frac{4}{3}$ δεκτή .

γ) ÁÃ $\chi>3$ τότε η (1) γράφεται $\chi-3+2\chi=4\chi-1 \Leftrightarrow \chi+2\chi-4\chi=3-1 \Leftrightarrow -\chi=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi=-2$ απορρίπτεται γιατί $\chi>3$.

Τελικά η λύση της εξίσωσης είναι η $\chi=\frac{4}{3}$.

<u>Εφαρμογή 6η από τον μαθητή</u>

Να επιλύσετε την εξίσωση: $|x-1|+|x-2|=|x-3|$

M_7: Για να επιλύσουμε μια ανίσωση που περιέχει μια απόλυτη τιμή, αλλά ο άγνωστος εμφανίζεται και εκτός απόλυτης τιμής διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την ποσότητα που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή και συναληθεύοντας τις τελικές ανισώσεις με τις αντίστοιχες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 7ο

Να επιλυθεί η ανίσωση: $|x-3|>2(2-x)$

Επίλυση
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις
Α) Αν $\chi - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 3$ (2) τότε η (1) γράφεται χ-3 > 4-2χ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \chi+2\chi > 4+3 \Leftrightarrow 3\chi > 7 \Leftrightarrow \chi > \frac{7}{3}$ (3) Οι σχέσεις (2) και (3) συναληθεύουν για $\chi \geq 3$.

β) Αν $\chi - 3 < 0 \Leftrightarrow \chi < 3$ (4) τότε η (1) γράφεται $-\chi+3 > 4-2\chi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\chi-\chi > 4-3 \Leftrightarrow \chi>1$ (5) Οι σχέσεις (4) και (5) συναληθεύουν για $1 < \chi < 3$.

<u>Εφαρμογή 7η από τον μαθητή</u>

Να επιλύσετε την ανίσωση: $\frac{2|x+1|}{3} - \frac{x+2}{2} > 0$

Μ$_8$: Για να επιλύσουμε μια ανίσωση που περιέχει δύο ή περισσότερες απόλυτες τιμές ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία με εκείνη τη διαδικασία των εξισώσεων.

Παράδειγμα 8^{ο}

Να επιλυθεί η ανίσωση: $|x+5|-|x-3| \leq 3x+7$ (1)

Επίλυση
Οι ρίζες των απολύτων τιμών είναι $\chi= -5$ και $\chi = 3$. Η μελέτη της ανίσωσης θα γίνει στα διαστήματα $(-\infty, -5]$, $(-5,3]$ και $(3, +\infty]$.
Α) Αν $\chi \leq -5$ τότε η (1) γράφεται $-\chi-5+\chi-3 \leq 3\chi+7 \Leftrightarrow -\chi+\chi-3\chi \leq 7+5+3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3\chi \leq 15 \Leftrightarrow \chi \geq -5$ Είναι δεκτή η τιμή $\chi = -5$.
β) Αν $-5 < \chi \leq 3$ τότε η (1) γράφεται $\chi+5+\chi-3 \leq 3\chi+7 \Leftrightarrow \chi+\chi-3\chi \leq 7+3-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\chi \leq 5 \Leftrightarrow \chi \geq -5$ οπότε παίρνουμε $-5 < \chi \leq 3$
γ) Αν $\chi>3$ τότε η (1) γράφεται $\chi+5-\chi+3 \leq 3\chi+7 \leq \Leftrightarrow -3\chi \leq 7-5-3 \Leftrightarrow -3\chi \leq -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{3}$ οπότε παίρνουμε $\chi > 3$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση αληθεύει για κάθε $\chi \geq -5$.

Εφαρμογή 8η από τον μαθητή

Να επιλυθεί η ανίσωση: $2|x+3|-|x-3|-3(x-9)>0$

M_9: Για να αποδείξουμε ότι ισχύει μια ισότητα ή μια ανισότητα με απόλυτη τιμή εφαρμόζουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες $|x|^2=x^2$, $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$, $\left|\frac{a}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ και $|x \pm y| \leq |x|+|y|$.

Παράδειγμα 9ο

Αν είναι $|\alpha|+|\beta|=2$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha\beta| \leq 1$

Επίλυση

Η σχέση $|\alpha|+|\beta|=2$ **δίνει** $|\alpha| = 2 -|\beta|$ **(1)**
Αφού $|\alpha\beta| \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha|\,|\beta| \leq 1$ **και με βάση την (1) παίρνουμε** $(2 -|\beta|)\,|\beta| \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2|\beta| - |\beta|^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2|\beta| - |\beta|^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -(|\beta|^2 - 2|\beta| + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (|\beta|^2 - 2|\beta| + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (|\beta| - 1)^2 \geq 0$ **που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό β**
.

Εφαρμογή 9η από τον μαθητή

Αν αβ$\neq$0, να δειχθεί η ισοδυναμία: $\frac{|a||\beta|+\beta|\alpha|}{|\alpha|.|\beta|}$=2$\Leftrightarrow$ αβ>0

M_{10}: Για να επαληθεύσουμε ανισώσεις με απόλυτες τιμές:
α) Επιλύουμε την κάθε μια ξεχωριστά
β) Σχεδιάζουμε τις λύσεις στον ίδιο άξονα x΄ x
γ) Συμπεραίνουμε για τις κοινές λύσεις

Παράδειγμα 10ο

Να γίνει η συναλήθευση των ανισοτήτων |x|-3(|x|+5)+6|x|>9 (1) και |x-3|$\geq$3 (2)

Επίλυση
Η (1) γράφεται |x|-3|x|-15+6|x|>9 $\Leftrightarrow$ 4 |x| > 9+15 $\Leftrightarrow$ 4 |x| > 24 $\Leftrightarrow$ |x| > 6 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ χ > 6 ή χ < -6 (3)
Η (2) γράφεται χ-3 $\geq$ 3 ή χ-3 $\leq$ -3 $\Leftrightarrow$χ $\geq$ 6 ή χ $\leq$ 0 (4)
Οι σχέσεις (3) και (4) συναληθεύουν όταν χ ε (- ∞ , - 6) $\cup$ [6 , +∞)

Εφαρμογή 10η από τον μαθητή

Να γίνει η συναλήθευση των ανισοτήτων ||x|+1<2 και ||x-1|+2>3

Γ.ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1.Να επιλυθούν οι εξισώσεις

ι) $|\chi-4| = 6$

ιι) $|\chi+4| = 2|\chi+1|$

ιιι) $\frac{2|\chi|+1}{3} - \frac{|\chi|-1}{2} = \frac{1}{2}$

2. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι) $|\chi-1| \leq 4$

ιι) $|\chi+1| \geq 2$

ιιι) $\frac{|\chi\text{-}1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|\chi\text{-}1|}{3}$

3.Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\frac{|\chi|}{\chi} + \frac{|\psi|}{\psi}$

4. Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| + \alpha\beta \geq |\alpha|.\beta + \alpha.|\beta|$

5.Να λυθεί η εξίσωση $3.|\chi\text{-}1| = 2\chi\text{-}1$

β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.

6.Αν είναι $\alpha < \beta < \gamma$, να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A=3\,|\alpha-\beta| +2\,|\beta-\gamma| -4\,|\gamma-\alpha|$$

7. Να επιλυθούν οι εξισώσεις

ι) $2|\chi|-5 -(|\chi|-3) = 7|\chi| - 1$

ιι) $|3\chi-1| = |\chi - 3|$

8. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι)$3(|\chi|- 1) + 2 (|\chi| - 2) > 2$

ιι) $\dfrac{2|\chi|-3}{4} < \dfrac{|\chi|+1}{3}$

9.Αν είναι $|\chi-\psi| < \alpha$ και $|\psi-\omega| < \alpha$, να αποδειχθεί ότι $|\chi-\omega| < 2\alpha$.

10.Να αποδειχθεί ότι

$$\chi^2 + |\chi\psi| + |-\chi|.\psi + \psi.|-\psi| = (|\chi| + |\psi|) (|\chi| + \psi).$$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Γιατί η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Τι συμπεραίνουμε από την σχέση
$|\alpha| + |\beta| = 0$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Τι σημαίνει για τους αριθμούς α, β, γ, η σχέση
$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
$|\chi| = -|\chi|$.
Αν η απάντηση είναι θετική , τότε να αποδειχθεί.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
$|\chi^{1998}| + |\chi^{2004}| = -3$.

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$\lvert\chi\rvert = \theta\ ,\ \theta > 0$	$-\theta < \chi < \theta$
$d\ (\alpha,\beta\ )$	$\lvert\alpha\rvert . \lvert\beta\rvert$
Αν $\theta > 0\ ,\ \lvert\chi\rvert < \theta$	α^2
$\lvert\alpha.\beta\rvert$	$\chi = \theta$ ή $\chi = -\theta$
$\lvert\alpha\rvert^2$	$\lvert\beta - \alpha\rvert$
$\lvert\alpha - \beta\rvert$	$\chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$
$\lvert\chi\rvert = \lvert\alpha\rvert$	$\alpha = \beta$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

Α) Αν $\theta > 0\ ,\ \lvert\chi\rvert \geq \theta \ \Leftrightarrow$ ....

β) Η απόσταση των α,β δίνεται από τη σχέση ....

γ) Αν $\alpha < 0$ τότε $\lvert\alpha\rvert =$ ....

δ) Είναι $\lvert\alpha + \beta\rvert \leq$ ....

Συμπληρώστε με το σύμβολο της διάταξης ή διατάξτε τις παρακάτω σχέσεις .

α) Για κάθε α ε IR ισχύει $\lvert\alpha\rvert$ .... α και $\lvert\alpha\rvert$ .... α .

β) $\lvert\alpha + \beta\rvert$, $\lvert\,\lvert\alpha\rvert - \lvert\beta\rvert\,\rvert$, $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$.

γ) $\lvert -10\rvert$, $\lvert 5\rvert$, $\lvert 0\rvert$, $\lvert -\sqrt{5}\rvert$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Ποια είναι αληθής από τις παρακάτω ισότητες;

(Α) $|χ-1| = \begin{cases} χ-1\ ,\ χ \geq 0 \\ 1-χ,\ χ < 0 \end{cases}$ (Β) $|χ-1| = \begin{cases} χ-1\ ,\ χ \geq 1 \\ 1-χ,\ χ < 1 \end{cases}$ (Γ) $|χ-1| = χ-1$.

Α	Β	Γ	Δ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Πότε ισχύει η σχέση $|χ+ψ| \leq |χ| + |ψ|$ ισχύει ως ισότητα; Όταν χ, ψ μόνο

- Α θετικοί.
- Β ετερόσημοι.
- Γ ομόσημοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

- Α $|χ.ψ| = |χ| + |ψ|$, όταν χ,ψ ομόσημοι.
- Β $|χ.ψ| = |χ| . |ψ|$, όταν χ,ψ ε IR.
- Γ $|χ.ψ| = |χ| - |ψ|$, όταν χ,ψ ετερόσημοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Η συνέχεια της επίλυσης της εξίσωσης $|χ-2| = -5$ είναι

- Α $χ-2 = +5$ ή $χ-2 = -5$ κ.λ.π
- Β $(χ-2)^2 = (-5)^2$ κ.λ.π
- Γ αδύνατη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ανισότητα $|χ| + |ψ| < 10$ ισχύει όταν

- Α $χ = 5\ ,\ ψ = -5$
- Β $χ = 8\ ,\ ψ = 0$
- Γ $χ = 12\ ,\ ψ = -4$.

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ......ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε......	με όταν...
Ερώτηση α)	
.... ισχύει η ισοδυναμία $\|\chi\| = \alpha \Leftrightarrow \chi = \alpha$, α ε IR;	
Ερώτηση β)	
.... ισχύει η σχέση $\|\alpha\|^{2\kappa} = \alpha^{2\kappa}$, αε IR, κ ε Z ;	
Ερώτηση γ)	
.... η απόλυτος τιμή ενός αριθμού α είναι ο ίδιος ο αριθμός;	
Ερώτηση δ)	
.... η απόλυτη τιμή ενός αριθμού α είναι ίση με την απόλυτη τιμή του αντίθετου του α;	
Ερώτηση ε)	
.... ισχύει η ισότητα στην σχέση $\|\alpha-\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$;	

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2 - |\chi+2|$

12. Να επιλυθεί η εξίσωση $\dfrac{|\chi|+4}{3} - \dfrac{|\chi|+4}{5} = \dfrac{2}{3}$

13. Να επιλυθεί η ανίσωση $\dfrac{|\chi|+1}{2} - \dfrac{2|\chi|}{3} > \dfrac{1-|\chi|}{3}$

14.Να αποδείξετε ότι $\dfrac{|1+\chi|-|1-\chi|}{2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\chi}, & \text{αν } \chi \leq -1 \\ 2, & \text{αν } -1<\chi<1 \\ \dfrac{2}{\chi}, & \text{αν } \chi \geq 1 \end{cases}$

15.Να αποδειχθεί ότι $3.\dfrac{\chi-1}{|\chi-1|} - 2.\dfrac{\psi+1}{|\psi+1|} \leq 5$

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16.Να επιλυθεί η ανίσωση $2|\chi-1| > \chi + 11$.

17.Αν $|\chi| \le 1$ και $|\psi| \le 2$, να αποδείξετε 'ότι

ι) $|2\chi-3\psi| \le 8$

ιι) $|3\chi-\psi+1| \le 6$

18.Αν α,β,γ,δ θετικοί αριθμοί και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι

$|\alpha-\delta| \ge 3|\beta-\gamma|$

19. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\chi}{|\chi|}+\frac{\psi}{|\psi|}+\frac{\omega}{|\omega|} \le 3$.

20.Να επιλυθεί η εξίσωση $2|2\chi+1|+3\left|\frac{1}{2}-\chi\right|-5\frac{|\chi+2|}{2}+3\chi < 0$.

7. ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = x + |2 - x|$.

2. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = 2|2 - x| - 3|x - 1|$.

3. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = \dfrac{|x+1| + |x+3|}{x-2}$.

4. Αν α < β < γ τότε να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$\mathbf{A} = 2|\alpha - \beta| - 3|\gamma - \beta| + 4|\gamma - \alpha|$$

5. Αν είναι $x > 2$ να υπολογίσετε την παράσταση : $\mathbf{A} = \dfrac{4x-8}{|x-2|}$.

6. Αν $|x| < 1$, γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές την παράσταση :

$$\mathbf{A} = 2|x+3| - 6|x-2| + x - 1$$

7. Αν $|x| \le 1$ να βρεθεί η μορφή της παράστασης :

$$\mathbf{A} = 2|x+3| - 3|x-4| - 2x + 1$$

χωρίς τις απόλυτες τιμές.

8. Αν α < β < γ να υπολογίσετε την παράσταση :

$$\mathbf{A} = 3|\alpha - \beta| - 2|\gamma - \alpha| + 3|\beta - \gamma|$$

9. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως υποδεικνύεται στην πρώτη του σειρά.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή Ένωση Διαστημάτων
$\lvert x-1\rvert > 2$	$d(x, 1) > 2$	$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
$\lvert x-5\rvert \le 3$		
$\lvert x+1\rvert < 5$		
$\lvert x+2\rvert \ge 4$		
	$d(x, -4) < 2$	
	$d(x, -1) > 6$	
	$d(x, 2) \le 3$	
	$d(x, 2) \ge 3$	
		$[-3, 3]$
		$(-9, 3)$
		$(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$
		$(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

10. Να αποδείξετε ότι : $\lvert x+y\rvert^2 - \lvert x-y\rvert^2 = 4xy$.

11. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

12. Αν x, y∈P με $x \neq y \neq 0$ και $\dfrac{\lvert x\lvert y\rvert + y\lvert x\rvert\rvert}{\lvert xy\rvert} = 2$ τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι.

13. Αν α, β∈Ρ με $\alpha \neq \pm 1$, $|\alpha| > 1$ και $\beta = \dfrac{\alpha}{1-|\alpha|}$ να δειχτεί ότι οι αριθμοί α, β ειναι ετερόσημοι.

14. Αν $\dfrac{|2\alpha+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|} \leq 1$ να αποδείξετε ότι : $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \leq 1$.

15. Να δείξετε ότι : $|x-y| = |y-x|$.

16. Αν $x|y| + y|x| = 0$ με $xy \neq 0$ να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ετερόσημοι.

17. Αν $|\alpha| \leq 2$ να δείξετε ότι : $|\alpha^2 - 2\alpha + 6| \leq 14$.

18. Αν $|x-y| < \alpha$ και $|y-\omega| < \alpha$ να δείξετε ότι : $|x-\omega| < 2^{\alpha}$.

19. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < \left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right|$$

20. Αν $x^2 \leq 16y^2$ να αποδείξετε ότι : $\left|\dfrac{x}{y}\right| - \left|\dfrac{y}{x}\right| < \dfrac{15}{4}$.

21. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι :

$$|\alpha| + |\beta| \leq \sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

22. Να δείξετε ότι : $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$.

23. Να δείξετε ότι : $\dfrac{|x+y|}{|x|+|y|} + \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} \leq 3$.

24. Να αποδείξετε ότι : $|xy| + xy \geq |x|y + x|y|$.

25. Αν $|x+\lambda y| < |\lambda x + y|$ και $|x| < |y|$ να δείξετε ότι : $|\lambda| < 1$.

26. Αν x, y $\neq 0$ να δείξετε ότι : $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$.

27. Να αποδειχτεί η ισοδυναμία : $|x+3y| < |y+3x| \Leftrightarrow |x| > |y|$.

28. Αν $|\alpha| \leq 2$ να δείξετε ότι : $|\alpha^2 - 2\alpha + 6| \leq 14$.

29. Να αποδείξετε για $x \neq \pm 1$, ότι η ισότητα $\frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} = \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ ισχύει μόνο όταν $x > 0$.

30. Αν $x = \frac{\alpha}{|\beta| + |\gamma|}$, $y = \frac{\beta}{|\gamma| + |\alpha|}$, $\omega = \frac{\gamma}{|\alpha| + |\beta|}$ να αποδείξετε ότι :

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|\omega|} \geq 6$$

όπου α, β, γ, x, y, ω μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

31. Αν $|\alpha| \leq 1$ να αποδείξετε ότι $-|\beta| \leq \alpha \cdot \beta \leq |\beta|$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

32. Αν α, β, x, y πραγματικοί αριθμοί με x, y $\neq 0$ και $x = \alpha\,(|\alpha| + |\beta|)$, $y = \beta\,(|\alpha| + |\beta|)$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

33. Αν α, β∈Ρ να δείξετε ότι : $|\alpha| + |\beta| \leq \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}$.

34. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν :

$$(|x| - 2)(2|x| - 30) = 0 \quad \text{και} \quad |x+5| \geq 7$$

35. Αν $\big||x| - |y|\big| = |x+y|$ τότε τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς x, y ;

36. Αν $|\alpha - 1| < 5$ και $|\beta - 2| < 3$ να βρείτε που μεταβάλλεται η παράσταση $\alpha + \beta$.

37. Να δείξετε ότι ο αριθμός x = $\dfrac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$ ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$.

38. Αν $\kappa < \lambda < \mu < \nu$ και $\lambda < x < \mu$ να δείξετε ότι η παράσταση :

$$\mathbf{A} = |\kappa - x| + |\lambda - x| + |\mu - x| + |\nu - x|$$

είναι ανεξάρτητη του x.

39. Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση :

$$|x^5 + 3| + 3 \neq 0$$

40. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$$d(x, 3) < 8$$