ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	No 2

Τάξη : Β΄ Λυκείου
Μάθημα : Μαθηματικά
Κεφάλαιο : 1ο
Διδακτική ενότητα : 2η
Ημερομηνία : 20-09-2018

Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Το γινόμενο αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι πάντα διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Το γινόμενο αρνητικού αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι πάντα διάνυσμα αρνητικού μέτρου ή μπορεί να είναι και θετικού.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Αληθεύει η άποψη ότι ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων είναι αποκλειστικά κάθε έκφραση της μορφής :

$$\vec{v} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστή η άποψη ότι για δύο παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$,λ ανήκει στο IR ενώ δεν ισχύει η σχέση αυτή για δύο συγγραμμικά διανύσματα;

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι Ο το σημείο τομής των διαγώνιων.. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με τις τιμές του κ της στήλη Β.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
/ $\vec{Ο Γ} = κ\vec{ΓΑ}$	/ 2
/ $\vec{ΒΔ} = κ\vec{ΒΟ}$	/ -2
/ $\vec{ΑΓ} = κ\vec{ΓΟ}$	/ -1/2
/ $\vec{ΑΑ} = κ\vec{ΓΓ}$	/ 1/2
/ $\vec{ΒΒ} = κ\vec{ΒΔ}$	/ κ ανήκει IR
	/ κ=0

Συμπλήρωση κενού

Έστω Α,Β δύο διαφορετικά σημεία. Αν Μ είναι σημείο, τέτοιο ώστε $\vec{ΑΜ}=λ\vec{ΜΒ}$, λ ανήκει στο IR τότε:

α) …..$\vec{ΑΜ}$=…..$\vec{ΜΒ}$

β) Όταν λ=0 το Μ συμπίπτει με το …..

γ) Όταν λ=1 το Μ συμπίπτει με το …..

δ) Όταν λ=1/3 το Μ βρίσκεται ……………των Α και Β ………

ε) Όταν λ=-1/4 το Μ βρίσκεται …………………..των Α και Β και προς το μέρος του σημείου ………

στ) Όταν λ=-3 το Μ βρίσκεται …………………..των Α και Β και προς το μέρος του σημείου ………

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

1 Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa,\lambda \in IR^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$.

Α. ☐ κ,λ θετικοί
Β. ☐ κ,λ αρνητικοί
Γ. ☐ κ,λ αντίστροφοι
Δ. ☐ κ,λ ετερόσημοι
Ε. ☐ κανένα από τα προηγούμενα.

2 Αν ισχύει $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$, κ,λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ;

Α. ☐ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά
Β. ☐ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι κάθετα
Γ. ☐ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.
Δ. ☐ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο.
Ε. ☐ Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ......ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

1. Πότε δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι παράλληλα ;
<u>Απάντηση</u>

2. Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι παράλληλα ;
<u>Απάντηση</u>

3. Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπα ;
<u>Απάντηση</u>

4. Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$ είναι κάθετα ;
<u>Απάντηση</u>

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr** **iraidos@gmail.com**
http://blogs.sch.gr/iraidos/

5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

Α. Βασικές ασκήσεις σχολικού βιβλίου

01. Άσκηση 1/Σελ.28
02. Άσκηση 2/Σελ.28
03. Άσκηση 3/Σελ.28
04. Άσκηση 4/Σελ.28
05. Άσκηση 5/Σελ.28
06. Άσκηση 6/Σελ.28
07. Άσκηση 7/Σελ.29
08. Άσκηση 8/Σελ.29
09. Άσκηση 8/Σελ.29

ΕΠΙΠΕΔΟ 3ο

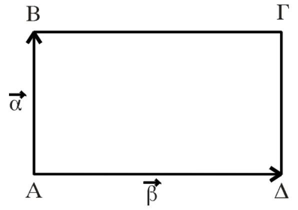
ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ- ΛΑΘΟΣ

1. Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$.



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **Β.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

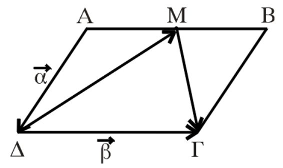
Δ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\dfrac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$ **Ε.** $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$

2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta M}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΜΓ}}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha}-\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

Δ. $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$

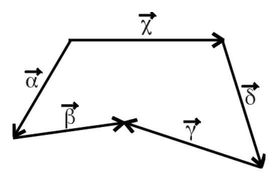
γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ **Γ.** $\overrightarrow{\text{ΔΒ}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\text{ΓΑ}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{ΓΑ}}$ **Γ.** $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\text{ΔΒ}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

3. Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με:



Α. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Β.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$

Γ. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$

Ε. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\delta}$

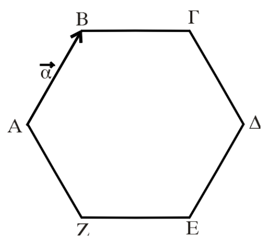
4. Για κάθε τετράδα σημείων Α, Β, Γ, Δ ισχύει:

Α. $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

Γ. $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

Ε. $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}-\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+\overrightarrow{\text{ΒΔ}}$

5. Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι:

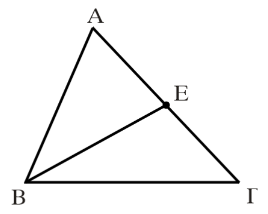


Α. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΕ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=-\overrightarrow{\text{ΕΑ}}$

Γ. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=-2\vec{\alpha}$ **Δ.** $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=-4\vec{\alpha}$

Ε. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΖΔ}}$

17. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΕ είναι διάμεσος.



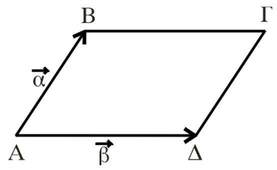
Το άθροισμα $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ ισούται με:

Α. $\overrightarrow{\text{ΒΕ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{ΓΑ}}$ **Γ.** $2\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$

Δ. $2\overrightarrow{\text{ΒΕ}}$ **Ε.** $2\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

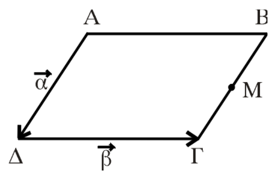
Ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{ΑΒ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{ΑΔ}} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχήσετε κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) με το ίσο του της στήλης (Β).



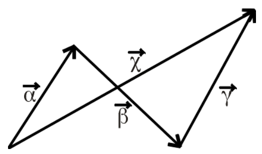
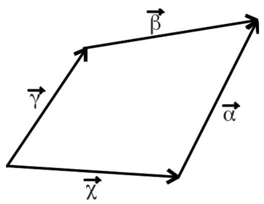
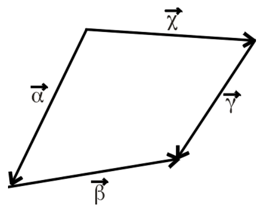
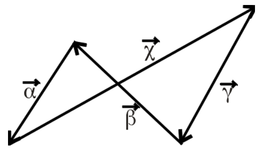
στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{\mathrm{ΑΓ}}$	$-\vec{\alpha}$
	$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΓΒ}}$	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
	$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΓΔ}}$	$-\vec{\beta}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΒΔ}}$	$\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{ΑΔ}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{ΔΓ}} = \vec{\beta}$ και Μ μέσο της ΒΓ. Να αντιστοιχήσετε κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) με το ίσο του της στήλης (Β).



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{\mathrm{ΑΓ}}$	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
	$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΒΔ}}$	$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΔΜ}}$	$\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{\mathrm{ΑΜ}}$	$\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$
	$\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

3. Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη (Α) αντιστοιχεί μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το αντίστοιχο $\vec{x}$ της στήλης (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$
	$-(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
	$\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}$
	$\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$
	$\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$
	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να σχεδιάσετε διανύσματα, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α. $\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΓΒ}=\overrightarrow{ΑΓ}$ **β.** $\overrightarrow{ΑΒ}=2\overrightarrow{ΚΛ}$

γ. $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΓ}=3\overrightarrow{ΑΔ}$ **δ.** $\vec{α}+\vec{β}=-\vec{γ}$

2. Έστω Ο, Α, Β, Γ, Δ σημεία τέτοια, ώστε $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΒ}=\vec{β}$, $\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{α}+2\vec{β}$ και $\overrightarrow{ΟΔ}=2\vec{α}-\vec{β}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΔ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΒΔ}$ με τη βοήθεια των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

3. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο, ώστε ΑΔ = 2/5·ΔΒ . Αν τα διανύσματα θέσης των Α και Β είναι $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}$ και $\overrightarrow{ΟΒ}=\vec{β}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{2}{7}(\vec{β}-\vec{α})$ και $\overrightarrow{ΟΔ}=\frac{5\vec{α}+2\vec{β}}{7}$.

4. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ είναι $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{γ}$. Ένα σημείο Δ βρίσκεται στην πλευρά ΑΒ, έτσι ώστε ΔΒ = 2·ΑΔ . Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΒ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΟΔ}$, $\overrightarrow{ΔΓ}$ συναρτήσει των $\vec{α}$, $\vec{γ}$.

5. Έστω ένα τραπέζιο ΟΑΒΓ με $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{γ}$ και $\overrightarrow{ΓΒ}=2\cdot\overrightarrow{ΟΑ}$. Αν Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΒ αντίστοιχα, να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΑ}$, $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΕΔ}$ συναρτήσει των $\vec{α}$, $\vec{γ}$ και να δείξετε ότι $\overrightarrow{ΓΑ}=2\cdot\overrightarrow{ΕΔ}$.

6. Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $3\overrightarrow{ΟΑ}+4\overrightarrow{ΟΒ}=7\overrightarrow{ΟΓ}$ τότε:

α. Να γράψετε τη σχέση χρησιμοποιώντας το Α ως σημείο αναφοράς.

β. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

7. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ με διανύσματα θέσης, ως προς σημείο αναφοράς το Ο, τα $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}$, $\overrightarrow{ΟΒ}=\vec{β}$, $\overrightarrow{ΟΓ}=3\vec{γ}-2\vec{β}$, όπου $\vec{α}$, $\vec{β}$ μη συγγραμμικά. Να υπολογίσετε τα $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$ συναρτήσει των $\vec{α}$, $\vec{β}$ και να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

8. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ της ΑΓ , ώστε ΑΕ = ΖΓ = 1/4·ΑΓ . Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ τότε να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Αν $2\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{B\Lambda}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{K\Lambda}\uparrow\downarrow\overrightarrow{M\Lambda}$.

10. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{K\Lambda}$.

11. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{MN}$.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, με $x + y = 1$. Να αποδείξετε ότι το Δ είναι σημείο της ευθείας ΒΓ.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\cdot\overrightarrow{BA}$ με λ, μ $\in$ *. Να αποδείξετε ότι $\lambda = \mu = 1/2$.

14. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ισχύει ότι $3\overrightarrow{EB}+5\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{A\Delta}-10\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

15. Δίνονται τα μη συγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και τα σημεία Α, Β, Γ, Ο. Αν $\overrightarrow{OA}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=11\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, τότε να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ότι ΒΓ = 2ΑΒ.

16. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ ώστε: $3\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και $5\overrightarrow{AZ}=3\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

17. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα μεταβλητό σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}-3\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

18. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το κέντρο του Κ και Μ το μέσο του ΚΓ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Gamma}$.

19. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ, ώστε: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=\vec{0}$.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ, ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{\Gamma P}$.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, ώστε να ισχύει:

α. $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$

β. $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$

γ. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}|$

22. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά και ισχύει ότι $\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$.

23. Να βρείτε μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ έτσι ώστε να ισχύει: $\kappa\vec{\alpha}+\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})+\mu(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{0}$ για κάθε ζεύγος διανύσματων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ, ώστε: $\Gamma\Delta=2\cdot\Delta A$. Οι ΒΔ, ΑΜ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι το Ε είναι μέσο της ΑΜ και $BE=3\cdot E\Delta$.

25. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, ώστε $3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}$ και Σ το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΕ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma}=4\overrightarrow{A\Sigma}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{5}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-\frac{1}{2}[\vec{\alpha}-3(2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+6\vec{\gamma})+4(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma})]-\frac{1}{2}\vec{\beta}-10\vec{\gamma}$$

2. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του, Μ το μέσον του ΚΓ. Δείξτε ότι:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=4\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{A\Gamma}$

3. Αν ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AZ}=6\overrightarrow{B\Gamma}$

4. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει:

$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma}=-2\overrightarrow{PB}$. Να αποδειχτεί ότι:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Delta}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

6. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{K\Lambda}$

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}$

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{\Gamma P}$

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι:

$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$