ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

**1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**

ΜΑΘΗΜΑ 1Ο

**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

**ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

# Το

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

## ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

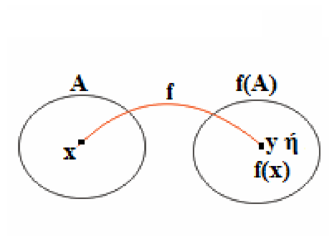
# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

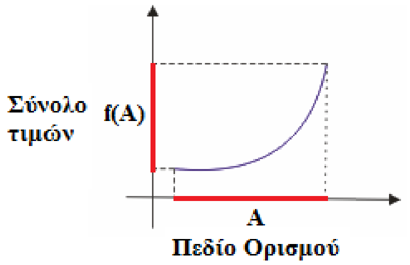
**α.** Ονομάζουμε **συνάρτηση** μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y έτσι ώστε σε **κάθε τιμή** του x να αντιστοιχεί **μία μόνο** τιμή του y. Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

**π.χ.** Η σχέση $y=2x+3$ είναι συνάρτηση, ενώ η $x^2+y^2=9$ δεν είναι, διότι για $x=0 \Rightarrow y=3$ ή $y=-3$.

**β.** Μία συνάρτηση έχει όνομα π.χ. f, g, φ, σ, κλπ. Για την συνάρτηση f χρησιμοποιούμε το f(x) αντί για το y.

**γ.** Τις τιμές του x τις παίρνουμε από ένα σύνολο που λέγεται πεδίο ορισμού π.χ. **A.** Οι αντίστοιχες τιμές του y που βρίσκουμε αποτελούν το σύνολο τιμών **f(A).**




---

## ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:

**Λέγεται το "ευρύτερο" υποσύνολο του R, για το οποίο έχει νόημα το f(x).**

**Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων:**

**α) Αν f(x)=πολυώνυμο τότε A=R.**

**π.χ.** Η $f(x)=4-x^2$ έχει πεδίο ορισμού το R.

**β) Αν f(x)=κλάσμα τότε A=R–{ρίζες του παρονομαστή}**

**π.χ.** Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x-7}{4-x^2}$ ορίζεται αν $4-x^2\neq 0$.

Δηλαδή $x\neq 2$ και $x\neq -2$.

ή $x\in R-\{-2,2\}$

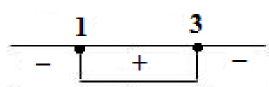
ή $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$ (χρησιμοποιούμε και τους τρεις τρόπους γραφής).

**π.χ.** Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x-7}{4+x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το R, αφού ο παρονομαστής ποτέ δεν μηδενίζεται.

**γ) Αν $f(x)=\sqrt{g(x)}$, τότε το πεδίο ορισμού είναι το $A=\{x\in R|g(x)\geq 0\}$**

**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{-2x^2+8x-6}$.

Πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $-2x^2+8x-6\geq 0$.
Η αντίστοιχη εξίσωση $-2x^2+8x-6=0$ έχει ρίζες 1 και 3.
Άρα το πεδίο ορισμού είναι **A=[1,3].**




**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1$.

Πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $x^2-x+1\geq 0$.
Έχουμε: $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$, άρα το τριώνυμο έχει πάντοτε το πρόσημο του $\alpha=1>0$.
Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το **R**.

**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}$.
Πρέπει $6-x\geq 0$ και $x+2\geq 0$ ή $x\leq 6$ και $x\geq -2$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το **[–2, 6]**.

**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.
Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-\sqrt{3}\neq 0$ ή $x\neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι $[0,3)\cup(3,+\infty)$.

**Προσοχή!**
Το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε στον αρχικό τύπο της συνάρτησης και όχι σε αυτόν που θα προκύψει από τυχόν απλοποιήσεις.

**π.χ.** Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ μετά την απλοποίηση γίνεται $f(x)=x+3$. Το πεδίο ορισμού όμως είναι το $R-\{3\}$.

**π.χ.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$.
**α**) Να απλοποιήσετε τον τύπο της
**β**) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Θυμίζουμε: Οι παραστάσεις α+β και α–β λέγονται **συζυγείς** παραστάσεις

**α**) Πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή μα την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}{\cancel{x-3}}.$$

Άρα $f(x)=(x+3)(\sqrt{x+6}+3)$.

**β**) Πηγαίνουμε στον αρχικό τύπο! Πρέπει $x\geq -6$ και $\sqrt{x+6}-3\neq 0$ ή $x+6\neq 9$ ή $x\neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο **A=[–6,3)∪(3,+∞).**

**δ) Οι συναρτήσεις f(x)=ημx, f(x)=συνx έχουν πεδίο ορισμού το R.**

**π.χ.** Η $f(x)=ημ(4-x^2)$ έχει πεδίο ορισμού το **R**.

**π.χ.** Η $f(x)=συν\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το **[0,+∞)**

**ε) Η συνάρτηση f(x)=logx ή f(x)=lnx έχει πεδίο ορισμού το A=(0,+∞).**

**π.χ.** Η $f(x)=\ln(4-x^2)$ ορίζεται αν $4-x^2>0$ (**α**)
Η ανίσωση (**α**) είναι δευτέρου βαθμού. Θα λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση $4-x^2=0$ που έχει ρίζες –2 και 2 και στην συνέχεια πάνω στον άξονα βρίσκουμε ότι A=(–2,2).
(Περισσότερα για τις ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου στη σελίδα **Α' Λυκείου.**)

**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=α\ln x-βx^2$ με $α, β\in R$.
Πρέπει $x>0$.

**στ) Η συνάρτηση f(x)=α$^x$ έχει πεδίο ορισμού A=R. (Υπόψη 0<α≠1)**

**π.χ.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$.
Επειδή η παράσταση $e^x>0$ το πεδίο ορισμού είναι το R.

## ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**α**) Κάθε τιμή του x με την αντίστοιχη τιμή του y ή f(x) ορίζουν ένα σημείο Α(x,y). Όλα τα σημεία μαζί σχηματίζουν μία γραμμή που είναι η γραφική παράσταση $C_f$.

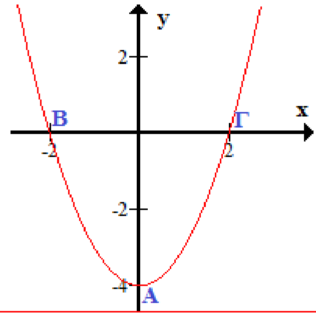
**β**) Ένα σημείο βρίσκεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης.

**π.χ.** Το σημείο Α(2,3) ανήκει στην συνάρτηση f(x)=4x–5, αφού f(2)=3, ενώ το Β(0.5) δεν ανήκει αφού f(0)=–5.

**Σημεία τομής συνάρτησης με άξονες.**
Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας συνάρτησης με τους άξονες θέτουμε x=0 και βρίσκουμε το y και μετά θέτουμε y=0 και βρίσκουμε το x (λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει).

**π.χ.** Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης $y=x^2–4$ με τους άξονες.

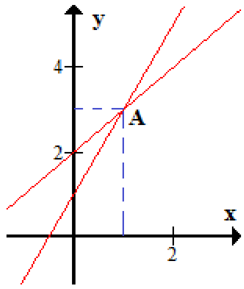
**α**) Για x=0 βρίσκουμε y=–4, άρα Α(0,–4).
**β**) Για y=0 βρίσκουμε $x^2–4=0$, οπότε x=2 ή x=–2, άρα Β(–2,0) και Γ(2,0).




**Σημεία τομής δύο συναρτήσεων.**
Για να βρούμε τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων f και g, λύνουμε την εξίσωση f(x)=g(x).

**π.χ.** Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων f(x)=2x+1 και g(x)=x+2.

Έχουμε: f(x)=g(x) ή
2x+1=x+2 ή
x=1. Επομένως τέμνονται στο Α(1,3).



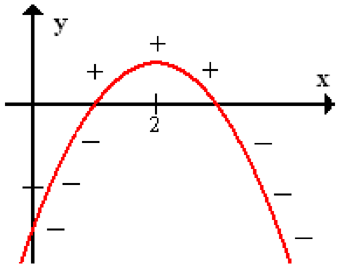

**π.χ.** Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων $f(x)=e^{\frac{x}{3}(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}$ και $h(x)=e^{\frac{x}{5}(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3})}$.

Πρέπει f(x)=g(x) ή $e^{\frac{x}{3}(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}=e^{\frac{x}{5}(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3})}$

$\frac{\cancel{x}}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{\cancel{x}}{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$...$x^2–5x+6=0$, και τελικά x=2 ή x=3.

**Θέση συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.**

**Α.** Όταν λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα x'x εννοούμε ότι $f(x)>0$.

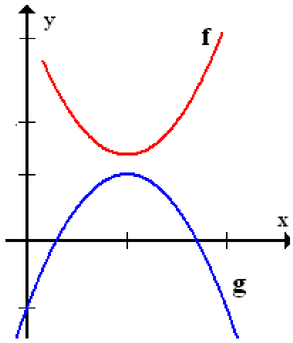



**π.χ.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=-x^2+6x-5$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Πρέπει $-x^2+6x-5>0$. Η αντίστοιχη εξίσωση $-x^2+6x-5=0$ έχει ρίζες 1 και 5 και το πρόσημο της φαίνεται στον διπλανό άξονα. Άρα η συνάρτηση f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x στο διάστημα (1,5).

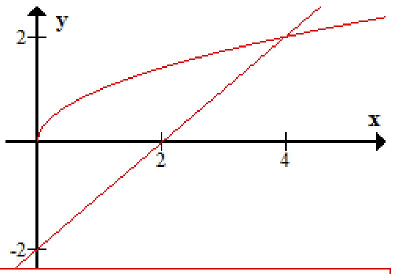
| | 1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|
| − | | + | | − |

**Β.** Όταν λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται "πάνω" από την γραφική παράσταση της g, εννοούμε ότι $f(x)>g(x)$.



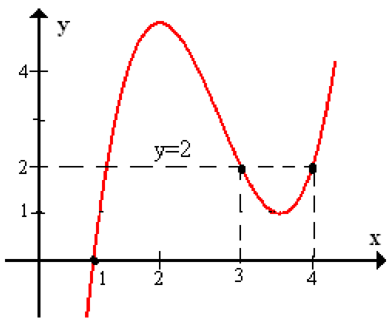

**π.χ.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ βρίσκεται πάνω από την $g(x)=x-2$.

Πρέπει $f(x)>g(x)$ ή
$\sqrt{x} > x-2$. Υψώνουμε στο τετράγωνο με την προϋπόθεση ότι $x>0$ και $x>2$.
Άρα $x>(x-2)^2$ και τελικά $x>4$.




**Γ.** Η ρίζα μιας συνάρτησης (εξίσωσης) $f(x)=0$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x.
Στο διπλανό παράδειγμα είναι **$x=1$**.

**Δ.** Η ρίζα μιας εξίσωσης π.χ. $f(x)=α$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=α$. Στο διπλανό παράδειγμα η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι **$x=3$** ή **$x=4$** διότι $f(3)=2$ και $f(4)=2$.

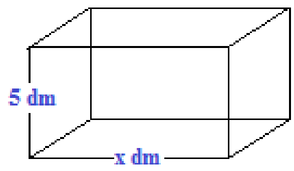


## ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης είναι σχετικά δύσκολη υπόθεση. Προϋποθέτει γνώσεις και άνεση στα Μαθηματικά.

**1ο π.χ.** Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω. Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0<x<10$.

Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E(x)=-x^2+10x+100$, $x\in(0,10)$.




Η περίμετρος της βάσης είναι 20 dm και η μία διάσταση είναι **x**. άρα η άλλη θα είναι **10–x**.

Γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια ενός παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο $E=2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

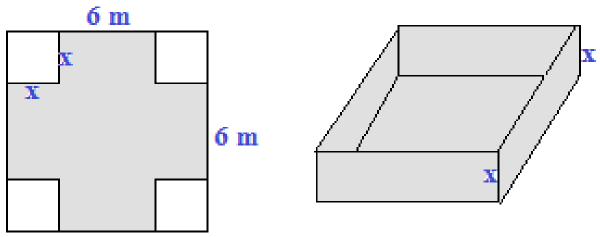
Άρα $E=2x(10-x)+2(10-x)5+2x5=\ldots=-x^2+10x+100$.

---

**2ο π.χ.** Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0<x<3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι $f(x)=4x(3-x)^2$, $0<x<3$.

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V=\alpha\beta\gamma$).

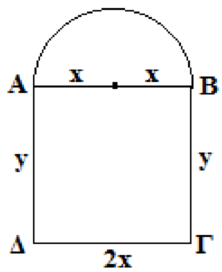



Μετά την αφαίρεση των τεσσάρων τετραγώνων η βάση θα είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 6–2x, το δε ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι x. Άρα $V=\alpha\beta\gamma=x(6-2x)(6-2x)=4x(3-x)^2$.

---

**3ο π .χ.** Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε το εμβαδόν του παραθύρου συναρτήσει του x.

(Μήκος κύκλου $L=2\pi\rho$, Εμβαδόν κύκλου $E=\pi\rho^2$)




Αν x είναι η ακτίνα του ημικύκλιου, τότε το μήκος του θα είναι $L=\frac{1}{2}2\pi x=\pi x$.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $2x+2y$.

Πρέπει $2x+2y+\pi x=30$. Άρα $y=15-x-\frac{\pi x}{2}$.

$E_{\pi\alpha\rho\alpha\theta}=E_{\eta\mu\iota\kappa}+E_{o\rho\theta}=\frac{1}{2}\pi x^2+2xy=\frac{1}{2}\pi x^2+2x(15-x-\frac{\pi x}{2})=30x-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2$.

---

# ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

## Πεδίο (ή Σύνολο) Ορισμού

Έστω μια συνάρτηση f: A → R. Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f και συνήθως συμβολίζεται είτε ως $\mathbf{A_f}$, είτε ως $\mathbf{D_f}$ .

### Περιορισμοί

**1. Παρονομαστές ( ≠ 0 )**

Αν $\mathbf{f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{h(x) \neq 0}}$

**2. Υπόρριζα ( ≥ 0 )**

Αν $\mathbf{f(x) = \sqrt[\nu]{g(x)}}$ , με $\nu \in {}^{*} - \{1\}$ , τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) \geq 0}}$

**3. Ορίσματα Λογαρίθμων ( > 0 )**

Αν $\mathbf{f(x) = \ln[g(x)]}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) > 0}}$

**4. Βάσεις Εκθετικών Συναρτήσεων ( > 0 )**

Αν $\mathbf{f(x) = [g(x)]^{h(x)}}$ τότε θα πρέπει $\boxed{\mathbf{g(x) > 0}}$

**5. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις**

- Αν $\mathbf{f(x) = εφx}$ τότε, εφόσον $\mathbf{εφx = \dfrac{ημx}{συνx}}$, θα πρέπει:

$$\mathbf{συνx \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq κπ + \frac{π}{2}\ ,\ κ \in Z}}$$

- Αν $\mathbf{f(x) = σφx}$ τότε, επειδή $\mathbf{σφx = \dfrac{συνx}{ημx}}$, θα πρέπει:

$$\mathbf{ημx \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq κπ\ ,\ κ \in Z}}$$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

### Μεθοδολογία 1η

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, λύνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις ή ανισώσεις που προκύπτουν από τους περιορισμούς που προαναφέραμε. Αν έχουμε περισσότερους του ενός περιορισμούς, τότε πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των **κοινών λύσεων**. Αυτό που προκύπτει, τελικά, είναι ένα **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

## Σύνολο (ή Πεδίο) Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f: A → R. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές y της συνάρτησης f για κάθε x∈A, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A).

### Μεθοδολογία 2η

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης:

- Λύνουμε την εξίσωση **f(x) = y, ως προς x** .
- Κατά την επίλυση, προσδιορίζουμε όλους τους απαραίτητους **περιορισμούς**, που προκύπτουν για το y .
- Απαιτούμε η λύση να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
- **Συναληθεύουμε** τους περιορισμούς που προέκυψαν με τις λύσεις που βρήκαμε.

### Μεθοδολογία 3η - Έλεγχος σημείου

Ένα σημείο $A(x_o, y_o)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή:

$$\mathbf{x_o \in A_f} \quad \text{και} \quad \mathbf{f(x_o) = y_o}$$

## Μεθοδολογία 4η - Οικογένεια συναρτήσεων

Όταν μας δίνεται μια **οικογένεια** συναρτήσεων $\mathbf{f_v}$ - δηλαδή μια ομάδα συναρτήσεων που ο τύπος τους διαφέρει μόνο ως προς μια **παράμετρο** «ν» - και μας ζητείται να αποδείξουμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται από **σταθερό σημείο**, τότε:

- Θέτουμε στην παράμετρο «ν» δύο οποιεσδήποτε αριθμητικές τιμές, παράγοντας έτσι δύο αντιπροσώπους $C_1$ και $C_2$ της οικογένειας.
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής των $C_1$ και $C_2$ (Σύστημα).
- Δείχνουμε ότι τα σημεία αυτά επαληθεύουν την γενική εξίσωση της οικογένειας $f_v$, για κάθε τιμή της παραμέτρου.

## Μεθοδολογία 5η - Σημεία τομής με άξονες

Για να υπολογίσουμε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα **x΄x** θέτουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, όπου $\mathbf{y = 0}$. Με άλλα λόγια, λύνουμε την $\mathbf{f(x) = 0}$.

Αντίστοιχα, για τα σημεία τομής με τον άξονα **y΄y** θέτουμε στην εξίσωση της συνάρτησης, όπου $\mathbf{x = 0}$ και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

## Μεθοδολογία 6η - Σχετική θέση ως προς x΄x

Για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης βρίσκεται **πάνω** (ή **κάτω**) από τον άξονα **x΄x** λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f(x) > 0}$ (αντίστοιχα την $\mathbf{f(x) < 0}$).

## Μεθοδολογία 7η - Σημεία τομής γραφικών παραστάσεων

Για να υπολογίσουμε τα σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων $C_f$ και $C_g$ , λύνουμε το σύστημα των αντίστοιχων εξισώσεων των συναρτήσεων f(x) και g(x), για κάθε $\mathbf{x \in A_f \cap A_g}$ .

## Μεθοδολογία 8η - Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων

Για να υπολογίσουμε τα διαστήματα εκείνα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω** (ή **κάτω**) από τη γραφική παράσταση μιας άλλη συνάρτησης g, τότε λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f(x) > g(x)}$ ( ή αντίστοιχα την $\mathbf{f(x) < g(x)}$ ), για κάθε $\mathbf{x \in A_f \cap A_g}$ .

## Ισότητα Συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες και γράφουμε **f = g** , όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

### Ισότητα σε σύνολο Γ

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ**.

### Μεθοδολογία 9η

Ακολουθούμε πιστά τον ορισμό, δηλαδή:

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων κι αν δεν ταυτίζονται, αναζητούμε τουλάχιστον κάποιο κοινό τους υποσύνολο. Αν αποτύχουμε και σ' αυτό οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.
- Αν επιτύχουμε στο πρώτο σκέλος, τότε μετασχηματίζουμε ένα από τους δύο ή και τους δύο τύπους των συναρτήσεων μέχρι να διαπιστώσουμε την ισότητά τους.

## Πράξεις Συναρτήσεων

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως. Ορίζουμε ως **άθροισμα f + g**, **διαφορά f – g**, **γινόμενο f · g** και **πηλίκο** $\mathbf{\frac{f}{g}}$ των συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

- $\mathbf{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$ και Π.Ο. $\mathbf{A \cap B}$
- $\mathbf{(f-g)(x) = f(x) - g(x)}$ και Π.Ο. $\mathbf{A \cap B}$
- $\mathbf{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)}$ και Π.Ο. $\mathbf{A \cap B}$

■ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και Π.Ο. $\{x \mid x \in A \cap B$ **και** $g(x) \neq 0\}$

**Μεθοδολογία 10η**

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων και κατόπιν υπολογίζουμε την τομή τους. Αν η τομή είναι το κενό σύνολο τότε δεν έχει νόημα να προχωρήσουμε σε πράξεις μεταξύ τους.
- Αν η τομή τους δεν είναι κενή, τότε σημειώνουμε τη ζητούμενη πράξη ανάμεσα στους τύπους των δύο συναρτήσεων και κατόπιν απλοποιούμε την παράσταση που προκύπτει.

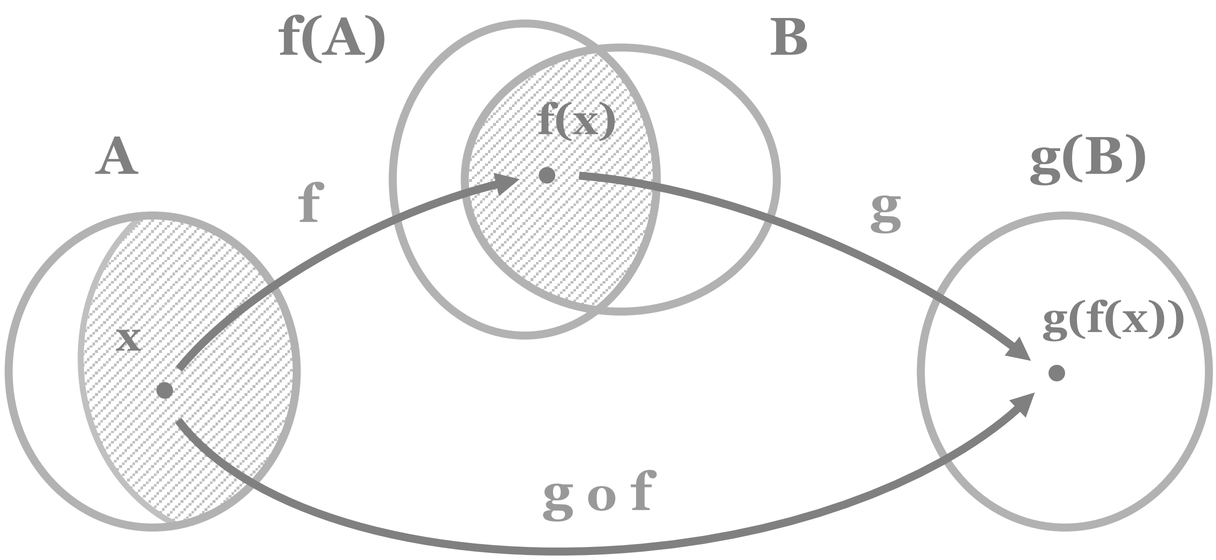
## Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού:

$$D_{g \circ f} = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$$




- Αναλόγως, ορίζεται και η σύνθεση της g με την f, ως η συνάρτηση με τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

και πεδίο ορισμού.

$$\mathbf{D_{fog} = \{\, x \in B \text{ και } g(x) \in A \}}$$

- Εφόσον ορίζονται οι g o f και f o g δύο συναρτήσεων, τότε **δεν είναι υποχρεωτικά ίσες**.
- Η σύνθεση ορίζεται και για περισσότερες των δύο συναρτήσεις. Για παράδειγμα, δοθέντων τριών συναρτήσεων και υπό την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα οι παρακάτω εκφράσεις, ισχύει:

$$\mathbf{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

## Μεθοδολογία 11η - Εύρεση σύνθετης συνάρτησης

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη σύνθεση g o f δύο συναρτήσεων f, g εκτελούμε τα εξής:

- Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού A και B των f, g αντίστοιχα.
- Βρίσκουμε (αν ορίζεται) το πεδίο ορισμού της g o f. Για το σκοπό αυτό, λύνουμε το παρακάτω σύστημα σχέσεων:

$$\begin{cases} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{f(x) \in B} \end{cases}$$

- Εφόσον $\mathbf{D_{gof}} \neq \varnothing$ τότε βρίσκουμε την εξίσωση της σύνθετης συνάρτησης, αντικαθιστώντας στον τύπο της g(x), όπου x τον τύπο της f(x).

## Μεθοδολογία 12η - Εύρεση της f από f o g και g

Αν γνωρίζουμε τον τύπο της f(g(x)) καθώς κι εκείνον της g, τότε:

- θέτουμε όπου g(x) = u ,
- λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς x ,
- αντικαθιστούμε το x στον τύπο της f(g(x)) .

## Μεθοδολογία 13η - Εύρεση της g από f o g και f

Αν γνωρίζουμε τον τύπο της f(g(x)) καθώς κι εκείνον της f, τότε:

- αντικαθιστούμε το x με g(x) στον τύπο της f ,
- εξισώνουμε τη σχέση που προκύπτει με την f(g(x)) ,
- λύνουμε ως προς g(x) .

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ

## ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**1.** Να γραφούν χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, οι παρακάτω συναρτησιακοί τύποι:

**α.** $f(x) = 4 - 3|2 - x^2|$ **β.** $g(x) = 2|x - 2| - |4 - x| - 8$

**2.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$ , $α \neq 0$ . Ποια σχέση ικανοποιούν τα $α, β, γ \in R$ αν:

**α.** το σημείο (1, 1) ανήκει στη $C_f$ ;

**β.** το σημείο (1, 1) είναι η κορυφή της $C_f$ ;

**γ.** η $C_f$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο (0, 6) ;

**δ.** Να βρείτε τη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί και τις τρεις προηγούμενες συνθήκες.

## ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

**3.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\ln|x||$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 10^{-6}$ .

**4.** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

**α.** $f(x) = x\sqrt{x^2}$ **β.** $f(x) = συν\frac{x}{2}$

**γ.** $$g(x) = \begin{cases} e^x & , x \leq 0 \\ \ln x & , 0 < x \leq e \\ (x-1)^2 & , x > e \end{cases}$$

**5.** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, h όταν:

**α.** $f(x) = \ln(-x)$ , $x < 0$ $g(x) = -\ln(-x)$ , $x < 0$

**β.** $f(x) = \ln|x|$ , $g(x) = -|\ln x|$ και $h(x) = -\ln|x|$

**6.** Ομοίως:

**α.** $f(x) = \sqrt{|x|}$ , $g(x) = -\sqrt{|x|} + 1$ και $h(x) = \sqrt{1 - x}$

**β.** $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ , $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ και $h(x)=\dfrac{1}{|x+1|}$

## ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

**7.** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του , στο οποίο ορίζεται καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

**α.** $f(x)=\sqrt{e^x-1}+\sqrt{1-\ln x}$ **β.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

**γ.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

**ε.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$

**8.** Ομοίως:

**α.** $f(x)=\sqrt{(e^x-1)\ln(x-1)}$ **β.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x-x^2}}$

**γ.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$

**9.** Ομοίως:

**α.** $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{2\eta\mu x+1}$ **β.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[x]{4-x^2}}$

**γ.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^{2x}-e^{-2x}}$ **δ.** $f(x)=\sqrt{\ln(1-x^2)}$

**10.** Ομοίως:

**α.** $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1}$ **β.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{9^x-4\cdot 3^{x+1}+27}$

**γ.** $f(x)=\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x+3}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{2\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x-\eta\mu 2x}$

## ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ

**11.** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων, καθώς και τα διαστήματα στα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους βρίσκονται "πάνω" από τον άξονα x΄x.

**α.** $f(x) = \ln(2x+1)^3$ **β.** $g(x)=\begin{cases} -x-1 & , x<0 \\ e^x-2 & , x\geq 0\end{cases}$

**12.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g : $R \to R$ , με $f(x) = g(x) + x^2 - \kappa$ , για κάθε $x\in R$ , $\kappa\in R$ .

**α.** Να βρεθεί ο κ, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων να τέμνονται πάνω στην ευθεία x = 1 .

**β.** Για την τιμή του κ, που υπολογίσατε, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $C_f$ είναι "πάνω" από την $C_g$ .

**13.** Έστω οι συναρτήσεις f, g : $R \to$ R, ώστε $f(x) = g(x) + x^2 - 4$ , για κάθε $x\in$ . Να βρεθεί η σχετική θέση των $C_f$ , $C_g$ .

**14.** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων, καθώς και τα διαστήματα όπου η $C_f$ είναι "πάνω" από τη $C_g$ , στις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-1}{x-x_0}=10$

**β.** $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{αν } x\geq 0 \\ -1-2x & , \text{αν } x<0\end{cases}$ και $g(x) = x + 2$

## ΙΣΟΤΗΤΑ

**15.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$ .

**α.** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $f_2(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

$f_3(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$ $f_4(x)=x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

$f_5(x) = \ln e^{x+1}$ $\qquad$ $f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

**β.** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του , στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

**16.** Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ και $g(x) = \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

**β.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)$ και $g(x) = \ln(1-2x) - \ln x$

**17.** Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ , ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{-\lambda x^3 + 3x - 4}{x^2 - \lambda x + 4} \quad \text{και} \quad g(x) = -\lambda x - 1$$

## ΠΡΑΞΕΙΣ

**18.** Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$ και $f / g$ όταν:

**α.** $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ και $g(x) = 2|x| + 1$

**β.** $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 2 \\ \sqrt{x} & , x > 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \ln x & , 0 < x < 3 \\ -2x+3 & , x \ge 3 \end{cases}$

**19.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq$ , για τις οποίες ισχύει ότι:

$$(f+g)(x)\cdot[(f+g)(x) - 6] = 2\cdot[(f\cdot g)(x) - 9] \text{ , για κάθε } x \in A .$$

Να αποδείξετε ότι $f = g$ .

**20.** Έστω οι συναρτήσεις $f, g : R \to R$ , για τις οποίες ισχύει ότι:

$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 3 \text{ , για κάθε } x \in \ .$$

Να αποδείξετε ότι η $C_g$ τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy.

**21.** Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : R \to R$ , αν ισχύει:

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2\cdot(\eta\mu x\cdot f(x) - \sigma\upsilon\nu x\cdot g(x)) \text{ , για κάθε } x \in R .$$

**22.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f^2(x) - f(x) = x\cdot(x-1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $C_f$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

## ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ

**23.** Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , x<0 \\ 3 & , x=0 \\ 2x-3 & , x>0 \end{cases}$$

**24.** Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι περιττή και για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot(x^2+2) \le 2x$. Να αποδείξετε ότι $(x^2+2)\cdot f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**25.** Δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$f^2(x) = f(x)\cdot f(-x) \quad \text{και} \quad g^2(x) = -g(x)\cdot g(-x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι άρτια και η $g$ περιττή.

**26.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g$, με $A_f = A_g \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν οι $f, g$ είναι περιττές, τότε η $f+g$ είναι περιττή, ενώ οι $f\cdot g$ και $f/g$ (με $g(x) \neq 0$) είναι άρτιες.

## ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

**27.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

**α.** $f(x) = -2x+3$, με $x \in [-1, 1]$

**β.** $f(x) = e^{1-x}+3$, με $x \in [-1, 2]$

**γ.** $f(x) = -3\ln(1-2x)-1$, με $x \in [-2, -1/2]$

**28.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

**α.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}+1$, με $x \in [-3, -2]$

**β.** $f(x) = -\sqrt{1-x}+3$, με $x \in [-4, -2]$

**29.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

**α.** $f(x) = 2\sqrt{3-x^2}+3$, με $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

**β.** $f(x)=\sqrt{7+\sqrt{6-x}}$ , με $x\in[2,5]$

**30.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

**α.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ , με $x\in[2,5]$

**β.** $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2-4}+2}$ , με $x\in(-\infty,-2]$

**31.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

**α.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

**β.** $f(x)=\log\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

**γ.** $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

**δ.** $f(x)=\dfrac{5+e^x}{5-e^{x+1}}$

**ε.** $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,\ \text{αν } 2\le x<3 \\ x-1 & ,\ 3\le x<5 \end{cases}$

**στ.** $f(x) = 3 + 2|x - 1|$

## ΣΥΝΘΕΣΗ

**32.** Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων, αν:

**α.** $f(x) = συν\sqrt{1+x^2}$

**β.** $f(x) = ημ(\,συν(\,ημx\,))$

**γ.** $f(x) = ημ^4(3x + 5)$

**δ.** $f(x) = 3\cdot ημ^3(x^2 - 1) + 4$

**ε.** $f(x) = 2\cdot συν^4 x$

**στ.** $f(x) = (συν^2 x + 1)^{100} + 1$

**ζ.** $f(x) = (\ln(x + 1) - \ln x)^2$

**η.** $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 3)$

**33.** Να οριστεί η g f για τις παρακάτω συναρτήσεις :

**α.** $f(x) = ημx$ , $g(x) = \ln(1 - 2x^2)$

**β.** $f(x) = συνx$ , $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$

**γ.** $f(x) = \begin{cases} x-1 & ,\ x\in(0,\ 2) \\ x+1 & ,\ x\in[2,\ 4) \end{cases}$ , $g(x) = |x - 1|$

**34.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h , στις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** Αν δίνεται ότι $f : [0, 1] \to R$ και $h(x) = f(2συνx - 1)$ .

**β.** Αν δίνεται ότι $f : [1, 2] \to R$ και $h(x) = f(1 + εφx)$ .

**γ.** Αν δίνεται ότι $f : [0, 5] \to R$ και $h(x) = f(x^2 - 4) + f(x + 1)$ .

**35.** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** $f(\ln(2x)) = x + 3$ , για κάθε $x > e$ .

**β.** $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x + 1$ .

**γ.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ και $g(x) = -x^2$ .

**36.** Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε περίπτωση :

**α.** $(g \circ f)(x) = \dfrac{1+συν2x}{x}$ και $g(x) = x^2$ .

**β.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2}$ και $g(x) = x^2 + 1$ .

**γ.** $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + 4$ και $(f \circ f)(x) = 4x - 3$ , για κάθε $x \in$ .

**37.** Έστω οι συναρτήσεις $f : A_f \to R$ , $g : A_g \to R$ με $f(A_f) \subseteq A_g$ . Να αποδειχτούν οι παρακάτω προτάσεις :

**α.** Αν η f είναι άρτια, τότε και η gof είναι άρτια .

**β.** Αν η f είναι περιοδική, τότε και η gof είναι περιοδική, με την ίδια περίοδο.

**38.** Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ , ώστε $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0$ , για κάθε $x \in R$ . Να αποδείξετε ότι η $C_f$ τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία τουλάχιστον.

**39.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to R$ , για την οποία ισχύει ότι: $f(x/e) \le \ln x \le f(x) - 1$ , για κάθε $x > 0$ .

**40.** Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = 2x - 2004$ , για κάθε $x \in$ τότε να υπολογίσετε το $f(2004)$ .

**41.** Έστω η συνάρτηση $f : R \to R$ με την ιδιότητα: $(f \circ f \circ f)(x) = -x$ , για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

**42.** Αν $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = x^2 - x + 2$, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση h με $A_h = \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$$

**43.** Να προσδιοριστεί ο τύπος της συνάρτησης f, σε κάθε μάι από τις περιπτώσεις:

**α.** Αν $f(x) - x \cdot f(2 - x) + x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

**β.** Αν $(1 - x) \cdot f(x - 1) + f(1 - x) + x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**γ.** Αν $2 \cdot f(x) + f(1/x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

**44.** Αν $f(f(x)) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή 2007.

**45.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{\alpha x + 3}{2 - x}$. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \neq 2$.

**46.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

**Α.** $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Β.** Αν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\xi) \neq 0$, τότε:

**α.** $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**β.** $f(0) = 1$

**γ.** $f(-x) = 1/f(x)$ και $f(x - y) = f(x)/f(y)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**δ.** $f(\nu x) = f^{\nu}(x)$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$.