ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 1Ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

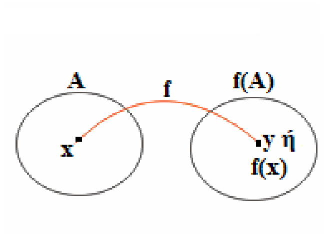
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

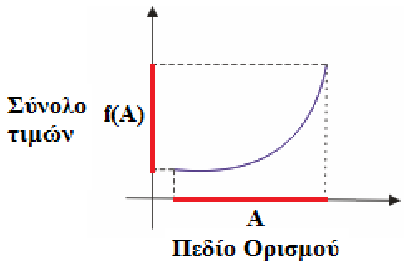
α. Ονομάζουμε **συνάρτηση** μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y έτσι ώστε σε **κάθε τιμή** του x να αντιστοιχεί **μία μόνο** τιμή του y. Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

π.χ. Η σχέση $y=2x+3$ είναι συνάρτηση, ενώ η $x^2+y^2=9$ δεν είναι, διότι για $x=0 \Rightarrow y=3$ ή $y=-3$.

β. Μία συνάρτηση έχει όνομα π.χ. f, g, φ, σ, κλπ. Για την συνάρτηση f χρησιμοποιούμε το f(x) αντί για το y.

γ. Τις τιμές του x τις παίρνουμε από ένα σύνολο που λέγεται πεδίο ορισμού π.χ. **A**. Οι αντίστοιχες τιμές του y που βρίσκουμε αποτελούν το σύνολο τιμών **f(A)**.





ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:

Λέγεται το "ευρύτερο" υποσύνολο του R, για το οποίο έχει νόημα το f(x).

Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων:

α) Αν f(x)=πολυώνυμο τότε A=R.

π.χ. Η $f(x)=4-x^2$ έχει πεδίο ορισμού το R.

β) Αν f(x)=κλάσμα τότε A=R–{ρίζες του παρονομαστή}

π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x-7}{4-x^2}$ ορίζεται αν $4-x^2 \neq 0$.

Δηλαδή $\mathbf{x \neq 2}$ και $\mathbf{x \neq -2}$.

ή $\mathbf{x \in R-\{-2,2\}}$

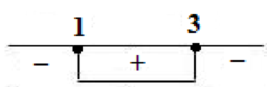
ή $\mathbf{x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)}$ (χρησιμοποιούμε και τους τρεις τρόπους γραφής).

π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x-7}{4+x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το R, αφού ο παρονομαστής ποτέ δεν μηδενίζεται.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{g(x)}$, τότε το πεδίο ορισμού είναι το $A=\{x \in R | g(x) \geq 0\}$

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{-2x^2+8x-6}$.

Πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $-2x^2+8x-6 \geq 0$.
Η αντίστοιχη εξίσωση $-2x^2+8x-6=0$ έχει ρίζες 1 και 3.
Άρα το πεδίο ορισμού είναι **A=[1,3].**



π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1$.

Πρέπει το υπόριζο να είναι μη αρνητικό, δηλαδή $x^2-x+1\geq 0$.
Έχουμε: $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$, άρα το τριώνυμο έχει πάντοτε το πρόσημο του $\alpha=1>0$.
Επομένως το πεδίο ορισμού είναι το **R**.

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}$.
Πρέπει $6-x\geq 0$ και $x+2\geq 0$ ή $x\leq 6$ και $x\geq -2$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το **[–2, 6]**.

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-\sqrt{3}\neq 0$ ή $x\neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι **$[0,3)\cup(3,+\infty)$.**

Προσοχή!
Το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε στον αρχικό τύπο της συνάρτησης και όχι σε αυτόν που θα προκύψει από τυχόν απλοποιήσεις.

π.χ. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ μετά την απλοποίηση γίνεται $f(x)=x+3$. Το πεδίο ορισμού όμως είναι το $R-\{3\}$.

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Θυμίζουμε: Οι παραστάσεις α+β και α–β λέγονται **συζυγείς** παραστάσεις

α) Πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή και τον παρονομαστή μα την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+6}+3)}{\cancel{x-3}}.$$

Άρα $f(x)=(x+3)(\sqrt{x+6}+3)$.

β) Πηγαίνουμε στον αρχικό τύπο! Πρέπει $x\geq -6$ και $\sqrt{x+6}-3\neq 0$ ή $x+6\neq 9$ ή $x\neq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο **$A=[-6,3)\cup(3,+\infty)$.**

δ) Οι συναρτήσεις f(x)=ημx, f(x)=συνx έχουν πεδίο ορισμού το R.

π.χ. Η $f(x)=\eta\mu(4-x^2)$ έχει πεδίο ορισμού το **R**.

π.χ. Η $f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το **$[0,+\infty)$**

ε) Η συνάρτηση f(x)=logx ή f(x)=lnx έχει πεδίο ορισμού το A=(0,+∞).

π.χ. Η $f(x)=\ln(4-x^2)$ ορίζεται αν $4-x^2>0$ (**α**)
Η ανίσωση (**α**) είναι δευτέρου βαθμού. Θα λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση $4-x^2=0$ που έχει ρίζες –2 και 2 και στην συνέχεια πάνω στον άξονα βρίσκουμε ότι $A=(-2,2)$.
(Περισσότερα για τις ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου στη σελίδα **Α' Λυκείου.**)

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\alpha\ln x-\beta x^2$ με $\alpha, \beta\in R$.
Πρέπει $x>0$.

στ) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ έχει πεδίο ορισμού A=R. (Υπόψη $0<\alpha\neq1$)

π.χ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$.
Επειδή η παράσταση $e^x>0$ το πεδίο ορισμού είναι το R.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

α) Κάθε τιμή του x με την αντίστοιχη τιμή του y ή f(x) ορίζουν ένα σημείο A(x,y). Όλα τα σημεία μαζί σχηματίζουν μία γραμμή που είναι η γραφική παράσταση C_f.

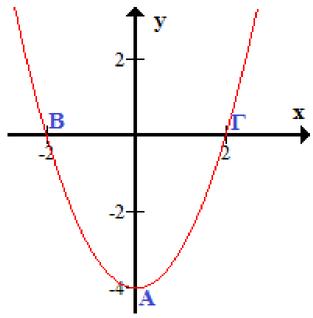
β) Ένα σημείο βρίσκεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης.

π.χ. Το σημείο A(2,3) ανήκει στην συνάρτηση $f(x)=4x-5$, αφού $f(2)=3$, ενώ το B(0.5) δεν ανήκει αφού $f(0)=-5$.

Σημεία τομής συνάρτησης με άξονες.
Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας συνάρτησης με τους άξονες θέτουμε x=0 και βρίσκουμε το y και μετά θέτουμε y=0 και βρίσκουμε το x (λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει).

π.χ. Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης $y=x^2-4$ με τους άξονες.

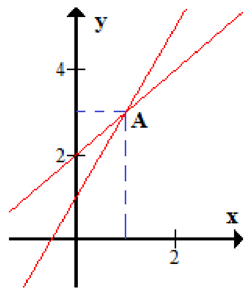
α) Για x=0 βρίσκουμε y=–4, άρα A(0,–4).
β) Για y=0 βρίσκουμε $x^2-4=0$, οπότε x=2 ή x=–2, άρα B(–2,0) και Γ(2,0).



Σημεία τομής δύο συναρτήσεων.
Για να βρούμε τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων f και g, λύνουμε την εξίσωση f(x)=g(x).

π.χ. Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων $f(x)=2x+1$ και $g(x)=x+2$.

Έχουμε: $f(x)=g(x)$ ή
$2x+1=x+2$ ή
$x=1$. Επομένως τέμνονται στο A(1,3).



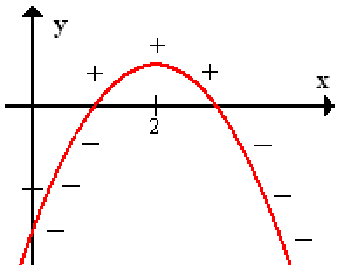
π.χ. Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων $f(x)=e^{\frac{x}{3}(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}$ και $h(x)=e^{\frac{x}{5}(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3})}$.

Πρέπει f(x)=g(x) ή $e^{\frac{x}{3}(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5})}=e^{\frac{x}{5}(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3})}$

$\frac{\cancel{x}}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{\cancel{x}}{5}\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$...$x^2-5x+6=0$, και τελικά x=2 ή x=3. **ΠΕ 2011**

Θέση συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Α. Όταν λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα x'x εννοούμε ότι f(x)>0.

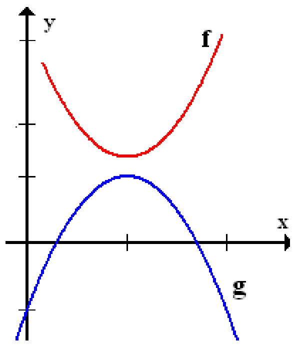


π.χ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=-x^2+6x-5$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

Πρέπει $-x^2+6x-5>0$. Η αντίστοιχη εξίσωση $-x^2+6x-5=0$ έχει ρίζες 1 και 5 και το πρόσημο της φαίνεται στον διπλανό άξονα. Άρα η συνάρτηση f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x στο διάστημα (1,5).

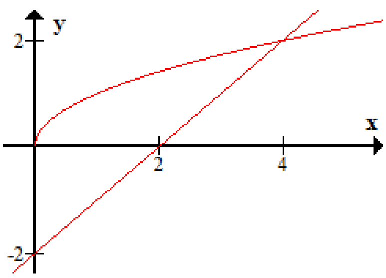
	1		5	
−		+		−

Β. Όταν λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται "πάνω" από την γραφική παράσταση της g, εννοούμε ότι f(x)>g(x).



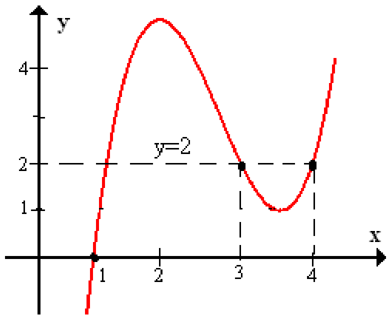
π.χ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ βρίσκεται πάνω από την g(x)=x–2.

Πρέπει f(x)>g(x) ή
$\sqrt{x}>x-2$. Υψώνουμε στο τετράγωνο με την προϋπόθεση ότι x>0 και x>2.
Άρα $x>(x-2)^2$ και τελικά x>4.

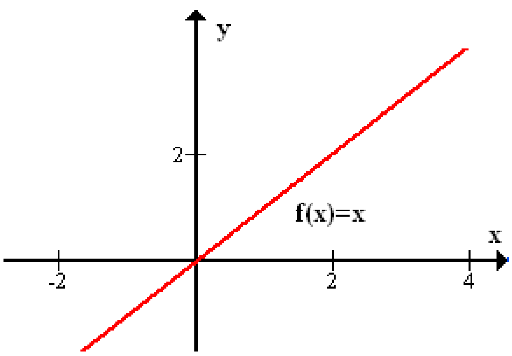


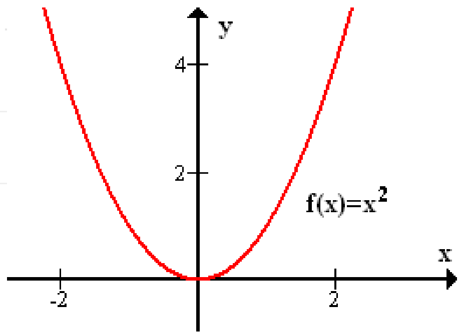
Γ. Η ρίζα μιας συνάρτησης (εξίσωσης) f(x)=0 είναι η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'x.
Στο διπλανό παράδειγμα είναι **x=1**.

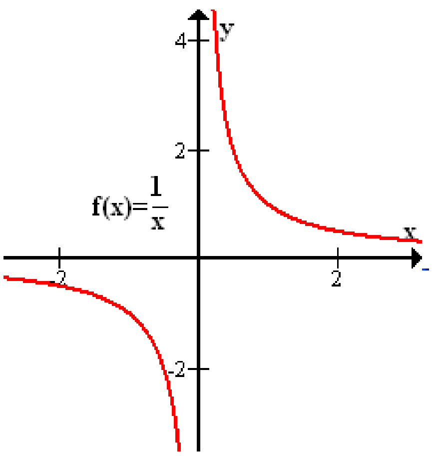
Δ. Η ρίζα μιας εξίσωσης π.χ. f(x)=α είναι η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y=α. Στο διπλανό παράδειγμα η ρίζα της εξίσωσης f(x)=2 είναι **x=3** ή **x=4** διότι f(3)=2 και f(4)=2.

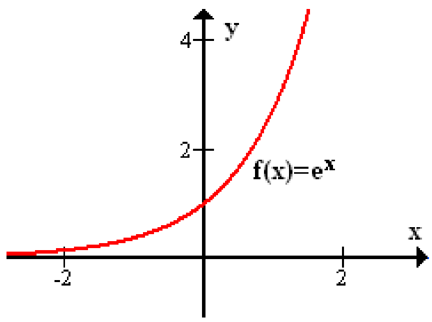


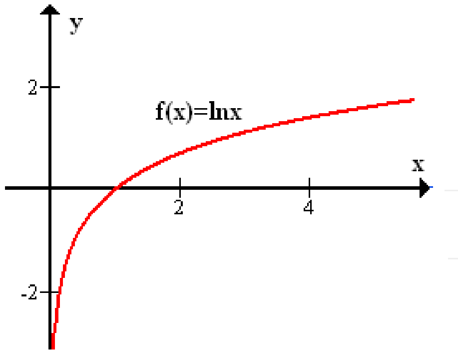
Να μάθετε απέξω τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων!!
Γνωρίζοντας π.χ. την γραφική παράσταση της $f(x)=e^x$ έχετε αυτόματα στο μυαλό σας την μονοτονία της, τις ακραίες οριακές τιμές τα σημεία τομής με άξονες κ.λ.π.

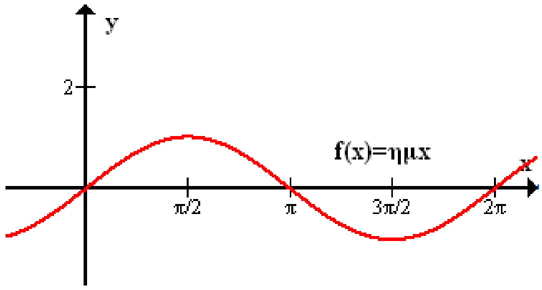


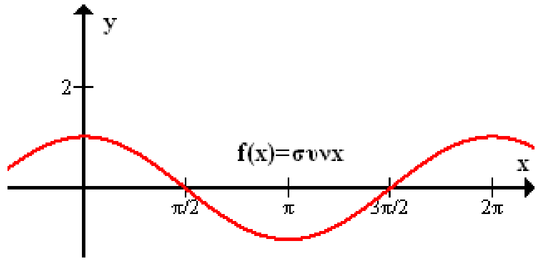










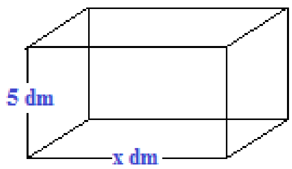


ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

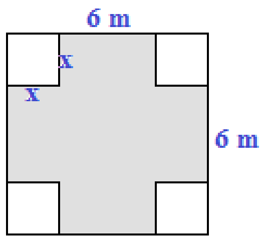
Η εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης είναι σχετικά δύσκολη υπόθεση. Προϋποθέτει γνώσεις και άνεση στα Μαθηματικά.

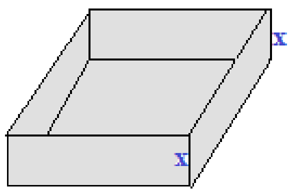
π.χ. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω. Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0<x<10$.
Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E(x)=-x^2+10x+100,\ x\in(0,10)$.

Η περίμετρος της βάσης είναι 20 dm και η μία διάσταση είναι **x**. άρα η άλλη θα είναι **10–x**.
Γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια ενός παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο $E=2αβ+2αγ+2βγ$.
Άρα $E=2x(10-x)+2(10-x)5+2x5=\ldots=-x^2+10x+100$.



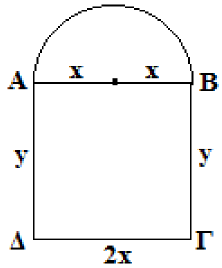
π.χ. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0<x<3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.
Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι $f(x)=4x(3-x)^2,\ 0<x<3$.
(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V=αβγ$).





Μετά την αφαίρεση των τεσσάρων τετραγώνων η βάση θα είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $6-2x$, το δε ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι x. Άρα $V=αβγ=x(6-2x)(6-2x)=4x(3-x)^2$.

π.χ. Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε το εμβαδόν του παραθύρου συναρτήσει του x.
(Μήκος κύκλου L=2πρ, Εμβαδόν κύκλου $E=\pi\rho^2$)



Αν x είναι η ακτίνα του ημικύκλιου, τότε το μήκος του θα είναι

$L=\frac{1}{2}2\pi x=\pi x$.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 2x+2y.

Πρέπει 2x+2y+πx=30. Άρα $y=15-x-\frac{\pi x}{2}$.

$E_{\pi\alpha\rho\alpha\theta}=E_{\eta\mu\iota\kappa}+E_{o\rho\theta}=\frac{1}{2}\pi x^2+2xy=\frac{1}{2}\pi x^2+2x(15-x-\frac{\pi x}{2})=30x-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2$.

π.χ. Οι επιβάτες ενός ΤΑΧΙ πληρώνουν 2 € για σημαία (ξέρετε τί είναι;) και 0,8 € για κάθε χιλιόμετρο. Να φτιάξετε τη σχέση (συνάρτηση) που συνδέει τα y € με τα x χιλιόμετρα.

Μόλις πει "καλημέρα"	2 €
Μετά από 1 Km	y=2+0,8 €
Μετά από 2 Km	y=2+2·0,8 €
Μετά από 3 Km	y=2+3·0,8 €
Μετά από 4 Km	y=2+4·0,8 €
Μετά από x Km	y=2+0,8·x €

Άρα **y=2+0,8x**.

Προσοχή! Στην δεύτερη στήλη μην κάνετε πράξεις γιατί θα χάσετε τον μηχανισμό που θα δημιουργήσει τον τύπο.

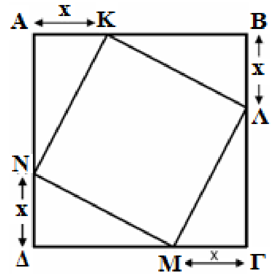
π.χ. Ένα γραφείο ταξιδιών διοργανώνει κρουαζιέρες και απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων προς 1000 € το άτομο. Για να αυξήσει την προσέλευση ταξιδιωτών κάνει την εξής προσφορά: "Για κάθε επιπλέον άτομο το εισιτήριο θα μειώνεται κατά 5 € σε κάθε άτομο". Να βρείτε την συνάρτηση που δίνει τα έσοδα του γραφείου.

Λύση (προσέξτε την διαδικασία)
Τα 100 άτομα θα δώσουν 1000 € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει 100·1000 €
Τα 100+1 άτομα θα δώσουν 1000-5·1 € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει (100+1)·(1000–5·1) €
Τα 100+2 άτομα θα δώσουν 1000–5·2 € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει (100+1)·(1000-5·2) €
Τα 100+3 άτομα θα δώσουν 1000–5·3 € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει (100+3)·(1000–5·3) €
Τα 100+4 άτομα θα δώσουν 1000–5·4 € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει (100+4)·(1000–5·4) €

Μην κάνετε τις πράξεις!!

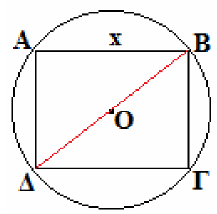
Αν δηλώσουν x επιπλέον άτομα τότε: Τα 100+x άτομα θα δώσουν 1000–5x € έκαστος και το γραφείο θα εισπράξει (100+x)·(1000–5x) €
άρα η συνάρτηση είναι: **f(x)=(100+x)·(1000–5x)**.

π.χ. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ=x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x)=2(x^2-4x+8)$, $x\in(0,4)$.



Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΚΝ με πλευρές ΑΚ=x και ΑΝ=4–x.
Έχουμε $KN^2=AK^2+AN^2=x^2+(4-x)^2=2(x^2-4x+8)$.
Άρα $(ΚΛΜΝ)=KN^2=2(x^2-4x+8)$.

π.χ. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=x, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$.



Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ με πλευρές ΑΒ=x και ΒΔ=10.
Έχουμε $AB^2+AΔ^2=$ΒΔ2 ή

$x^2+AΔ^2=10^2$ άρα x= $\sqrt{100-x^2}$ και επομένως (ΑΒΓΔ)=ΑΒ·ΑΔ= $x\sqrt{100-x^2}$.

ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Για να βρούμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, αντικαθιστούμε όπου x το x_0.

Αν είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ προσπαθούμε να διώξουμε το...αγκάθι που φταίει για το περίεργο αποτέλεσμα.
Αν π.χ. x→5 τότε το...αγκάθι έχει τη μορφή (x–5) το οποίο και απλοποιούμε:

α) Με **παραγοντοποίηση**, αν έχουμε ρητή παράσταση (κλάσμα με πολυώνυμα).

β) Με πολλαπλασιασμό του αριθμητή και του παρονομαστή με την **συζυγή παράσταση** του άρρητου όρου, (αν έχουμε παράσταση με ρίζα).

π.χ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-8x+6}{x^3+2x-3}$.

Παρατηρούμε ότι για x=1 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επειδή πρόκειται για ρητή παράσταση (κλάσμα με όρους πολυώνυμα), θα παραγοντοποιήσουμε και τους δύο όρους.

Ο αριθμητής γίνεται **2**(x–1)(x–3). (Πολλοί ξεχνούν το **2**)
Ο παρονομαστής γίνεται $(x-1)(x^2+x+3)$ (Με το σχήμα Horner). Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-8x+6}{x^3+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{2(\cancel{x-1})(x-3)}{(\cancel{x-1})(x^2+x+3)}=\frac{2(-2)}{5}=-\frac{4}{5}.$$

π.χ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Παρατηρούμε ότι για x=9 προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Επειδή στο κλάσμα υπάρχει άρρητή παράσταση, θα πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους με την συζυγή της.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{\cancel{x-9}}{\left(\cancel{x-9}\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{6}$

π.χ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{(2x-10)(5+\sqrt{5x})}{(5-\sqrt{5x})(5+\sqrt{5x})}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{25-5x}=$

$=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{25-5x}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2(\cancel{x-5})(5+\sqrt{5x})}{-5(\cancel{x-5})}=\frac{2\cdot(5+5)}{-5}=-4.$

Αν κάνετε τον πολλαπλασιασμό στον παρονομαστή...χάσατε!!

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

α. Πρέπει x≥0 και $\sqrt{x}-\sqrt{3}\neq 0$. Άρα **A=[0,3)∪(3,+∞).**
Παρατηρούμε ότι x≠3. Αυτό σημαίνει ότι το x μπορεί να πλησιάσει το 3, χωρίς να γίνει ίσο με αυτό!

β. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-1)(\cancel{x-3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\cancel{x-3})}=4\sqrt{3}$.

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\frac{x^2-3x}{\sqrt{x+6}-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β. Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

α. Πρέπει x+6≥0 και $\sqrt{x+6}\neq 3$ ή
x≥–6 και x+6≠9, άρα **A=[–6,3)∪(3,+∞)**.

β. Για x=0, f(0)=0, άρα τέμνει τον y'y στο O(0,0).
Για f(0)=0, έχουμε x^2–3x=0, οπότε x=0 ή x=3 (απορρίπτεται). Άρα βρίσκουμε πάλι το O(0,0).

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+6}-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(\cancel{x-3})\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\cancel{x-3}}$ =**18**.

π.χ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x(\cancel{x+1})}{x^2(\cancel{x+1})\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μία συνάρτηση είναι συνεχής:
α) **Αν ισχύει ο ορισμός**, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$=f($x_o$).
β) Αν είναι **πολυωνυμική, ρητή, τριγωνομετρική, εκθετική, λογαριθμική** και όσες προκύπτουν από αυτές με πράξεις είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού των. (Δεν χρειάζεται απόδειξη)

π.χ. Η συνάρτηση f(x)=2x^2–4x+5 είναι συνεχής ως πολυωνυμική
Η συνάρτηση f(x)=$\dfrac{x+2}{x-3}$ είναι συνεχής ως ρητή.
Η συνάρτηση f(x)=ημx–4lnx+5e^x είναι συνεχής ως άθροισμα ρητών συναρτήσεων.

π.χ. Να μελετήσετε την συνέχεια της συνάρτησης f(x)=$\begin{cases}\dfrac{2x^2-12x+10}{x^2-5x} & ,x\neq 5\\[2mm] \dfrac{8}{5} & ,x=5\end{cases}$.

α) Η συνάρτηση f(x)= $\dfrac{2x^2-12x+10}{x^2-5x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

β) Θα εξετάσουμε την συνέχεια στο x=5.

Για να είναι συνεχής πρέπει $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$=f(5).

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-12x+10}{x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-1)(\cancel{x-5})}{x(\cancel{x-5})}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-1)}{x}=\dfrac{2\cdot 4}{5}=\dfrac{8}{5}$

Δίνεται: f(5)=$\frac{8}{5}$. Άρα συνεχής στο x_o=5.

π.χ. Η συνάρτηση f(x)=$\frac{2x^2-12x+10}{x^2-5x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Άρα η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της. Ομοίως η συνάρτηση g(x)=2lnx+e^x, ως άθροισμα συνεχών.

π.χ. Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ,x\neq 2 \\ \lambda^3+\lambda^2-8 & ,x=2 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$=f(2).

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$=4.

Άρα πρέπει $\lambda^3+\lambda^2-8=4$ (**1**)

$\lambda^3+\lambda^2-12=0$ Σχήμα Horner

Η (**1**) γράφεται: $(\lambda-2)(\lambda^2+3\lambda+6)=0$ άρα **λ=2**. (Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα δεν μηδενίζεται).

π.χ. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} \frac{x^3-x^2-21x+45}{x-3} & ,x\neq 3 \\ 16\alpha-2\beta & ,x=3 \end{cases}$, α, β∈R. Αν το σημείο Μ(4,3α) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τα α, β.

Ζητάμε δύο αριθμούς. Άρα χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.

α) Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, πρέπει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$=f(3).

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-21x+45}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\cancel{x-3})(x^2+2x-15)}{\cancel{x-3}}$=0.

(Ο αριθμητής έγινε γινόμενο με το σχήμα Horner).

Άρα 16α–2β=0 (**1**)

β) Επειδή το σημείο Μ(4,3α) ανήκει στην γραφική παράσταση της f πρέπει f(4)=3α. Άρα

$\frac{4^3-4^2-21\cdot 4+45}{4-3}$=3β οπότε **β=3** (**2**).

Από (**1**) και (**2**) βρίσκουμε **α=24**.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x) = x^2 - 1$.

α. Για ποιες τιμές του $x \in$ έχουμε $g(x) = 0$;

β. Για ποιες τιμές του $x \in$ η γραφική παράσταση της g(x) βρίσκεται "κάτω" απ' τον άξονα $x'x$;

γ. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσωσεων:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \ , \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 1} \ , \quad \varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \log(9 - x^2)$

β. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

γ. $f(x) = \dfrac{4x - 2}{\sqrt{e^x + 1}}$

δ. $f(x) = \dfrac{2\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$

ε. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

στ. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x}{\sqrt{x - 4}}$

ζ. $f(x) = \dfrac{5}{|x - 3| - 1}$

η. $f(x) = \sqrt{3 - |x|}$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \ln\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

β. $k(x) = \sqrt{12 - x - x^2}$

γ. $h(x) = \ln\dfrac{x + 2}{5 - x} + 3\ln\dfrac{x - 1}{x - 3}$

δ. $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

ε. $r(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2}}$

στ. $t(x) = \log(2 - \log x)$

4. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

β. $\rho(x) = \ln\dfrac{1}{x}$

γ. $\varphi(x) = e^{x+1} - 2$

δ. $g(x) = x^2 - 1$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

ε. $\sigma(x) = \ln|x|$ **στ.** $\pi(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

5. Αν $f(x) = \ln(x + 1)$ και $g(x) = \sqrt{4 - |x|}$, τότε να ορίσετε (εφόσον είναι εφικτό) τις συναρτήσεις: $f + g$, $f \cdot g$, f / g .

6. Να βρείτε τα κοινά σημεία των αξόνων με τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$ **β.** $e^{3x-2} - 1$

γ. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(2 - x)$

7. Εξετάστε αν είναι ίσα τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του , στο οποίο ισχύει η ισότητα.

α. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

β. $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

γ. $f(x) = \ln(x^4)$ και $g(x) = 4\ln x$

8. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1$$

καθώς και τα κοινά, μεταξύ τους, σημεία.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$$

10. Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$$

11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 5x^2 + \beta x + 1$.

α. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, έτσι ώστε τα σημεία (2, 25) και (1, 0) να ανήκουν στη C_f .

β. Να μετασχηματιστεί ο τύπος της συνάρτησης σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

γ. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, για τους οποίους ισχύει $f(x) > 0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2/x$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Α (1, f(1)) και Β (–1, f(–1)) .

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το α ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο Μ (4, 2).

14. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει:

α. $f(x^2) + f(x) = x$, τότε να βρείτε τα f(0) και f(1) .

β. $2f(x) - 3f(1/x) = x^2$, με $x \neq 0$, τότε να βρείτε το f(2) .

15. Έστω η ευθεία (ε) : $y = (\lambda^2 - 3\lambda)x + 1$.

α. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο (1, –1) να βρεθεί το λ.

β. Για ποιες τιμές του λ η (ε) είναι παράλληλη προς τον x΄x.

γ. Ποια είναι τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες ;

16. Να εξετάσετε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = -2x + 2$ **β.** $g(x) = \ln(1 - x)$

γ. $h(x) = e^{-2x+1}$ **δ.** $k(x) = -2/x$, $x > 0$

ΟΡΙΑ

17. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x+2}e^{\frac{3}{x}}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7x-21}{|x-4|+1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

18. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$ **β.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{x^2-9}$

γ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}$

ε. $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+1}$

19. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1-\eta\mu^2 x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

γ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-1-\sqrt{x+5}}{x-4}$

ε. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{2\sqrt{x+6}-3\sqrt{x+1}}$

20. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x+2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^4-16}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-x^2}}$

21. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+x+2}-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2+3x-3}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x^2-6x+5}$

22. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-4\sqrt{x}+3}$

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{\sqrt{x+5}-5}{\sqrt{x-4}-4}$

ε. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x-3}}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

23. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

γ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{2-\sqrt{2x}}$

24. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$

25. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}-2}$

γ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-x+1}$

ε. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+8}}{2x^2-7x-4}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

26. Ομοίως:

α. $\lim\limits_{x\to\sqrt{7}}\dfrac{x^2-\sqrt{7}x}{x^2-7}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-\sqrt{2x}}$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

ε. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^2-9}$ **στ.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{2\left(\sqrt{x+4}-3\right)}$

27. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{16-x^2}{4-x} & , x\neq 4\\ \alpha^2-2\alpha & , x=4\end{cases}$ τότε:

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 4.