

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>	<u>No 1</u>
Τάξη	: Β΄ Λυκείου
Μάθημα	: Μαθηματικά
Κεφάλαιο	: 1 ^ο
Διδακτική ενότητα	: 1η
Ημερομηνία	: 13-9-2018
Διδάσκων καθηγητής	: Ηλίας Ράιδος

« Η έννοια του διανύσματος »**« Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων »****ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο****1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ****Βασικές ερωτήσεις θεωρίας**

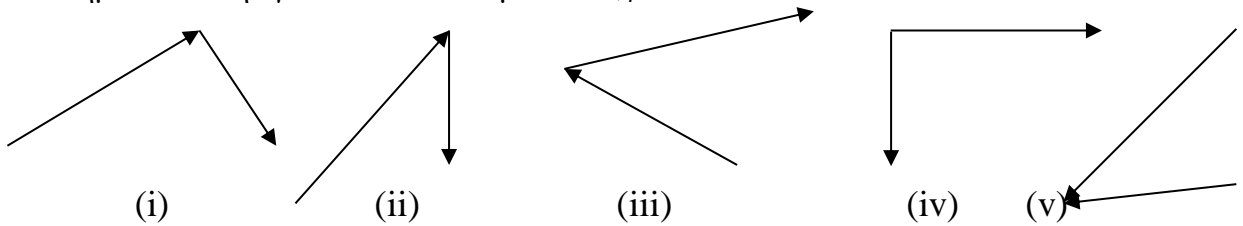
01. Ποιά μεγέθη χαρακτηρίζονται μονόμετρα και ποια διανυσματικά ;
02. Τι ονομάζεται διάνυσμα και ποια τα χαρακτηριστικά του;
03. Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό και ποιος είναι ο φορέας του ;.
04. Πότε ένα διάνυσμα θα είναι παράλληλο ως προς ευθεία ζ ;
05. Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται παράλληλα ή συγγραμμικά;
06. Πότε δυο διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση;
07. Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται ομόρροπα ;
08. Πότε δύο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση και πότε αντίθετη ;
09. Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται αντίρροπα ;
10. Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται ίσα και πότε αντίθετα ;
11. Τι γνωρίζεται για την γωνία δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$;
12. Ποια η γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{0}$;

13. Τι λέγεται άθροισμα ή συνισταμένη των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b}
14. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης;
15. Να αποδείξετε τις ιδιότητες της πρόσθεσης.
16. Τι γνωρίζεται για την αφαίρεση διανυσμάτων;
17. Τι είναι το διάνυσμα θέσης;
18. Ποια σχέση συνδέει το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων και με την διαφορά τους;

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

01. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Να διαπιστώσετε ποια διανύσματα του σχήματος είναι ίσα μεταξύ τους και ποια είναι ομόρροπα.
02. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ γράφουμε τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{BA}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{BE}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι το μέσο του ΔE . Πάνω στις πλευρές AB και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία M και N αντίστοιχα και γράφουμε τα διανύσματα $\vec{\Gamma E} = \vec{AM}$ και $\vec{AZ} = \vec{\Gamma N}$. Να αποδείξετε ότι το $ZMEN$ είναι παραλληλόγραμμο.
03. Να σημειώσετε την γωνία των διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} .



ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Για κάθε διάνυσμα \vec{a} ισχύει $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$
τότε $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Ισχύει $\vec{a} \uparrow\downarrow (-\vec{a})$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\uparrow -\vec{\gamma}$
τότε $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Αν $\vec{AB} = \vec{AG}$, τότε τα σημεία
B και Γ συμπίπτουν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η

Αν $\vec{AB} = \vec{0}$, τότε τα σημεία
B και Γ συμπίπτουν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η

Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow -\vec{\beta}$ τότε $-\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8η

Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$
τότε $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9η

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$
ισχύει $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (-\vec{a}, -\vec{\beta})$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 10η

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$
ισχύει $(-\vec{a}, \vec{\beta}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{\beta})$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 11η

Το μέτρο ενός διανύσματος είναι
πάντα θετικός αριθμός ενώ το
μέτρο του αντίθετου διανύσματος
πάντα αρνητικός αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 12η

Αν τα σημεία Α, Β και Γ που δεν
βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία,
έχουν ως προς κάποιο σημείο Ο
διανύσματα θέσης $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$
αντίστοιχα να εκφράσετε τα
 $\vec{BG}, \vec{AB}, \vec{GA}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}, \vec{\beta}$
και $\vec{\gamma}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 13η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα
σημείο του Μ, τέτοιο ώστε να ισχύει
 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = \vec{MD}$. Να
δικαιολογήσετε γιατί όταν το σημείο Μ
συμπέσει με το σημείο Β επαληθεύει την
παραπάνω ισότητα.

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Συμπλήρωση κενού :

- i) Το μέτρο του μη μηδενικού διανύσματος \vec{AB} φανερώνει το του ευθύγραμμου τμήματος..... ή την του σημείου από το
- ii) Όταν τα σημεία A, B και M δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, η ισότητα $|\vec{AM}| = |\vec{MB}|$ φανερώνει ότι το σημείο ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος..... Επομένως το σημείο βρίσκεται πάνω του ευθύγραμμου τμήματος
- iii) Όταν το O είναι σταθερό σημείο και το M μεταβλητό, έτσι ώστε $|\vec{OM}| = \rho$, $\rho > 0$, τότε το σημείο βρίσκεται πάνω σε που έχει το O ως και το ρ ως
- iv) Όταν δύο διανύσματα με είναι παράλληλα, τότε τα άκρα τους είναι σημεία συνευθειακά.
- v) Όταν $\vec{AB} = \vec{GB}$, τότε το $\vec{AG} = \dots\dots$ ή $\vec{AG} = \dots\dots$, επομένως τα σημεία A και Γ

Αντιστοίχιση

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.

Στήλη (Α)		Στήλη (Β)	
/	\vec{AG}	/	$-\vec{\alpha}$
/	\vec{GB}	/	$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
/	\vec{GD}	/	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
/	\vec{AD}	/	$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
/	\vec{BD}	/	$-\vec{\beta}$
/		/	$\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

3.1 Αν για τα μη παράλληλα διανύσματα \vec{AB} & \vec{GD} ισχύει $\vec{AB} = \vec{GD}$, τότε :

- A. Μόνο το $\vec{AB} = \vec{0}$
- B. Μόνο το $\vec{GD} = \vec{0}$
- Γ. $\vec{AB} = \vec{0}$ και $\vec{GD} = \vec{0}$
- Δ. Δεν προκύπτει συμπέρασμα.

3.2 Αν \vec{a} ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε

- A. Μόνο $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{0}$
- B. Μόνο $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{0}$
- Γ. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{0}$ και $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{0}$
- Δ. Κανένα από τα δύο.

3.3 Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά αντίθετα διανύσματα, τότε ισχύει :

- A. $\vec{a} = \vec{\beta}$
- B. $\vec{a} = -\vec{\beta}$
- Γ. $-\vec{a} = -\vec{\beta}$
- Δ. $\vec{a} = \vec{0}$ και $\vec{\beta} = \vec{0}$

3.4 Για τα μη συνεθειακά σημεία Α,Β,Γ ισχύει :

- A. $\vec{AB} + \vec{GB} = \vec{AG}$
- B. $\vec{BG} + \vec{AB} = \vec{AG}$
- Γ. $\vec{GA} - \vec{BG} = \vec{AB}$
- Δ. $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{BG}$

3.5 Αν Μ το μέσο του διανύσματος \vec{AB} τότε :

- Α. $\vec{MA} = \vec{MB}$ Β. $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$
 Γ. $\vec{AM} = \vec{BM}$ Δ. $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

3.6 Για τα μη συνεθιακά σημεία Ο,Α,Β ισχύει :

- Α. $\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{AB}$ Β. $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$
 Γ. $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{AB}$ Δ. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{AB}$

4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

1 Πότε δυο διανύσματα είναι αντίθετα;

Απάντηση

2 Πότε το μηδενικό διάνυσμα είναι κάθετο σε διάνυσμα \vec{a} ;

Απάντηση

3.Πότε ισχύει η σχέση $\vec{MA} + \vec{AB} = \vec{MB}$;

Απάντηση

4. Πότε ισχύει η σχέση $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$;

Απάντηση

5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει πάντα η σχέση : $\vec{AB} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B}$.
2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta}$.

101/21

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι :

$$\text{i) } 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma} \qquad \text{ii) } 2\vec{MN} = \vec{BA}$$

υπουρ/144

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι τα μέσα των $\vec{AB}, \vec{A'B'}$ να αποδείξετε ότι : $2\vec{MM'} = \vec{AA'} + \vec{BB'}$

υπουρ/144

5. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

υπουρ/144

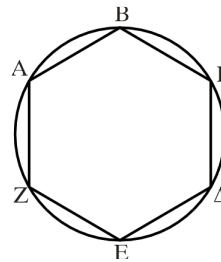
ΕΠΙΠΕΔΟ 3ο

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙΕρωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. | Σ | Λ |
| 2. Αν $ \vec{\alpha} = \vec{\beta} $, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. | Σ | Λ |
| 3. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 4. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 5. Τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι ίσα. | Σ | Λ |
| 6. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. | Σ | Λ |
| 6. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευσθύνσεως. | Σ | Λ |
| 7. Αν $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = 2\pi$. | Σ | Λ |
| 8. Αν το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. | Σ | Λ |
| 9. Αν $ \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} $, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. | Σ | Λ |
| 10. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:
$ \vec{\alpha} + \vec{\beta} \leq \vec{\alpha} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| 11. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:
$ \vec{\alpha} - \vec{\beta} \leq \vec{\alpha} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |
| Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:
$ \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} $. | Σ | Λ |

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣΗ

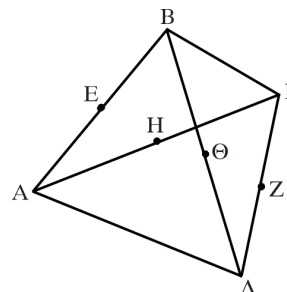
1. Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της αριστερής στήλης (Α) με το ίσο του της δεξιάς στήλης (Β).



στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{ΑΒ}$	$\overrightarrow{ΖΔ}$
$\overrightarrow{ΑΓ}$	$\overrightarrow{ΑΓ}$
$\overrightarrow{ΓΒ}$	$\overrightarrow{ΑΔ}$
$\overrightarrow{ΑΕ}$	$\overrightarrow{ΕΔ}$
	$\overrightarrow{ΕΖ}$
	$\overrightarrow{ΓΖ}$

2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο και τα Ε, Ζ, Η, Θ μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ και ΒΔ. Λανθασμένη είναι η σχέση:

- Α. $\overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΘ} + \overrightarrow{ΗΑ}$
- Β. $\overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΒΘ} + \overrightarrow{ΓΒ} + \overrightarrow{ΗΓ}$
- Γ. $\overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΗΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΘ}$
- Δ. $\overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔΘ} + \overrightarrow{ΓΗ}$
- Ε. $2\overrightarrow{ΗΘ} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ}$



Ερωτήσεις ανάπτυξης

Ορισμός Διανύσματος
Αντίθετα Διανύσματα
Γωνία Διανυσμάτων
Πρόσθεση & Αφαίρεση Διανυσμάτων

1. Για τα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδείξετε ότι:
 - α. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Gamma A}$
 - β. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta}$
2. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Αν $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$ για κάθε σημείο O, να αποδείξετε ότι το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, E ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, E είναι συνευθειακά.
4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και το μέσο M της AΓ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, A, Λ είναι συνευθειακά.
5. Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ. Να σημειώσετε:
 - α. δύο ζεύγη ίσων διανυσμάτων.
 - β. δύο κάθετα διανύσματα.
 - γ. δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, με ίσα μέτρα.
 - δ. δύο ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.
6. Σε τετράπλευρο ABΓΔ είναι $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta}$. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιές του AΓ και BΔ διχοτομούνται.
7. Τι συμπεραίνετε για τις διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ABΓΔ, στο οποίο ισχύει ότι: $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}|$ για κάθε σημείο O;
8. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τυχαίο σημείο P της πλευράς BΓ. Αν M είναι σημείο τέτοιο, ώστε: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG}$, να αποδείξετε ότι το ABMΓ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε σημείο Δ , ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{MA}$ για κάθε σημείο M .

10. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ του χώρου, για τα οποία ισχύει ότι: $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{BE}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

11. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο P του χώρου. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.

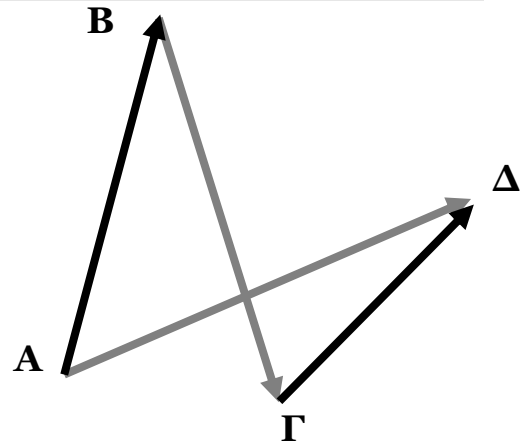
12. Εξωτερικά ενός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο $AB\Delta E, A\Lambda K\Gamma, B\Gamma N M$. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{E\Lambda} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$.

13. Με βάση το διπλανό σχήμα να εκφράσετε:

α. το διάνυσμα \overrightarrow{AB} συναρτήσει των $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β. το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma B}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{A\Delta}$, \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

γ. το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και \overrightarrow{BA} .



Α

Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας που λύνονται με τα διανύσματα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$$

$$\beta) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$

2. Δίνονται τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι μέσα των \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$$

3. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BG}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD})$$

$$\beta) 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB}$$

4. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγωνιοί του διχοτομούνται και αντιστρόφως: αν οι διαγωνιοί ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

5. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

6. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του και το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του διχοτομούνται.

7. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.