ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

Ανισώσεις
πρώτου
Βαθμού.

Το

10ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x+\beta>0$ ή $\alpha x+\beta<0$

1ος τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2ος τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	- ∞	x_1	+ ∞
αx+β	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Να λυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x+18\ge 0$

Λύση: 1ος $-3x+18\ge 0 \Leftrightarrow -3x\ge -18 \Leftrightarrow x\le 6$ ή $x\in(-\infty,6]$

Λύση: 2ος Έχω $-3x+18=0 \Leftrightarrow -3x=-18 \Leftrightarrow x=6$

x	- ∞	6	+ ∞
-3x+18	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x+18\ge 0$ τότε $x\in(-\infty,6]$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 :</u> Για να βρούμε τις κοινές δυο (ή περισσοτέρων) ανισώσεων, τις λύνουμε ξεχωριστά και παριστάνουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα αριθμών.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 :</u> Για να λύσουμε μια διπλή ανίσωση $A(x)\le B(x)\le \Gamma(x)$, λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις $A(x)\le B(x)$ και $B(x)\le\Gamma(x)$ και βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ</u> <u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

1. (Άσκηση 1 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6}$

ii. $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x$

iii. $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5}$

<u>Λύση :</u>

i. $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6} \overset{\text{ΕΚΠ}=12}{\Longleftrightarrow} 12\frac{x-1}{2}+12\frac{2x+3}{4}<12\frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1)+3(2x+3)<2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-6+6x+9<2x \Leftrightarrow 12x-2x<-3 \Leftrightarrow 10x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{10}$ ή $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{10}\right)$

ii. $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x \overset{\text{ΕΚΠ}=4}{\Longleftrightarrow} 4\frac{x-12}{2}+4\frac{x}{2}+4\frac{3}{4}>4x \Leftrightarrow 2(x-12)+2x+3>4x \Leftrightarrow$

$2x-24+2x+3>4x \Leftrightarrow 0x>21$ αδύνατη

iii. $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5} \overset{\text{ΕΚΠ}=10}{\Longleftrightarrow} 10\frac{x-2}{2}+10\frac{1-2x}{5}<10\frac{x}{10}-10\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$5(x-2)+2(1-2x)<x-4 \Leftrightarrow 5x-10+2-4x<x-4 \Leftrightarrow 0x<4$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$

2. (Άσκηση 2 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$3x-1<x+5 \quad \text{και} \quad 2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$$

<u>Λύση :</u>

Έχω : $3x-1<x+5 \Leftrightarrow 3x-x<5+1 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3$ (1)

Επίσης : $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-2\frac{x}{2}\le 2x+2\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3}\ge\frac{-3}{-3} \Leftrightarrow x\ge 1$ (2)

Άρα $1\le x<3$ ή $x\in[1,3)$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u> :

3. Να λύσετε τις ανισώσεις :
   i. $2x-1<-x+3-3(x-2)$
   ii. $2\frac{x+1}{3}-\frac{2x+1}{2}\le 2x+\frac{6x+1}{6}$
   iii. $\frac{x+3}{3}-\frac{x+1}{2}<\frac{x+19}{6}$
   iv. $\frac{x+10}{5}-2<\frac{3(x+1)-(x-3)}{10}$

4. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\Re$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :
   i. $\frac{7x-18}{5}>4\frac{2x-5}{5}-1$ και $x+\frac{3}{2}+\frac{2x}{5}>\frac{27}{5}+\frac{6x-1}{20}$
   ii. $\frac{x-3}{3}-\frac{x+4}{6}<\frac{x-6}{2}+2$ και $\frac{x+6}{4}-\frac{-x+8}{4}\ge\frac{6x-8}{5}-x+2$
   iii. $-6(x-6)<7(3x+1)+2$ και $-\frac{4}{5}\left(\frac{x}{3}-1\right)\ge 2x+\frac{x-9}{3}-4$

5. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\Re$ για τις οποίες ισχύει :
   i. $-6<-x-1<3$
   ii. $-x<-5x-4<-5x$
   iii. $2+\frac{8-3x}{4}<5-\frac{x}{4}\le\frac{4+x}{4}+3$
   iv. $x+\frac{5}{2}\le 2x+\frac{11}{2}<2+\frac{3(x+2)}{2}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια παραμετρική ανίσωση, εργάζομαι ως εξής : <u>Βήμα 1 :</u> Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή : $\alpha\cdot x<\beta$ ή $\alpha\cdot x>\beta$

<u>Βήμα 2 :</u> Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το α, μια $\alpha>0$, μια $\alpha<0$ και μια $\alpha=0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. Να λύσετε την ανίσωση : $\lambda(2x-\lambda) \le \lambda x - 2\lambda + 2x$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

Λύση :

Έχω : $\lambda(2x-\lambda) \le \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda^2 \le \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow \lambda x - 2x \le \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)x \le \lambda(\lambda - 2)$ (1)

- αν $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ τότε : (1): $(\lambda-2)x \le \lambda(\lambda-2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda-2)x}{\lambda-2} \le \frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-2} \Leftrightarrow x \le \lambda$
- αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ τότε : (1): $(\lambda-2)x \le \lambda(\lambda-2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda-2)x}{\lambda-2} \ge \frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-2} \Leftrightarrow x \ge \lambda$
- αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε : (1): $(2-2)x \le 2(2-2) \Leftrightarrow 0x \le 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ
   i. $\lambda(x+5) < \lambda^2 + 2x + 6$
   ii. $\lambda(x-4) \ge (\lambda-2)(\lambda+2) - 4(x-1)$
   iii. $\frac{(\lambda-2)x}{3} < 1 - \frac{x-2}{3}$
   iv. $\frac{\lambda x - \lambda}{3} \ge \frac{x-\lambda}{4} - \frac{x+4}{6}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

1) $x < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$ (α>0)

2) $x > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha$ ή $x < -\alpha$ (α>0)

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $2x - 5 < 6$

Λύση: $2x - 5 < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x - 5 < 6 \Leftrightarrow -1 < 2x < 11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $3x + 7 > 2$

Λύση: $3x + 7 > 2 \Leftrightarrow 3x + 7 > 2 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x + 7 < -2 \Leftrightarrow 3x < -9 \Leftrightarrow x < -3$ (2)

Αν συναληθευσω της (1) και (2) $x \in (-\infty,-3) \cup \left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $3x + 2 \ge 3\, x - 1$

<u>Λύση:</u> $3x+2 \ge 3\,x-1 \Leftrightarrow 3x+2^{2} \ge 9\,x-1^{2} \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 4 \ge 9x^2 - 18x + 9 \Leftrightarrow$

$30x \ge 5 \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{30} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{6}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x < 3$

ii. $x - 1 \le 4$

iii. $2x + 1 < 5$

Λύση :

i. $x < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ ή $x \in (-3,3)$

ii. $x - 1 \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x - 1 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le x \le 5$ ή $x \in [-3,5]$

iii. $2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ ή $x \in (-3,2)$

9. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x \ge 3 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \ge 3 \\ ή \\ x \le -3 \end{matrix}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$

ii. $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x - 1 > 4 \\ ή \\ x - 1 < -4 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{matrix} x > 5 \\ ή \\ x < -3 \end{matrix} \right.$ ή αλλιώς $x \in (-\infty,-3) \cup (5,+\infty)$

iii. $|2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x+1 \geq 5 \\ ή \\ 2x+1 \leq -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x \geq 4 \\ ή \\ 2x \leq -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x \geq 2 \\ ή \\ x \leq -3 \end{array} \right.$ ή αλλιώς $x \in (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ (ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ)

- **<u>ΜΟΡΦΗ :</u>** $|Α(x)| > Β(x)$ ή $|Α(x)| < Β(x)$ εδώ θα πρέπει πρώτα να βγάλουμε το απόλυτο διακρίνοντας δυο περιπτώσεις $Α(x) \geq 0$ και $Α(x) < 0$. Έπειτα συναληθεύουν τις λύσεις με τον αντίστοιχο περιορισμό.
- **<u>ΜΟΡΦΗ :</u>** $|Α(x)| > |Β(x)|$ ή $|Α(x)| < |Β(x)|$ εδώ υψώνω και τα δυο μέλη στο τετράγωνο και σύμφωνα με την ιδιότητα $|\alpha|^2 = \alpha^2$, φεύγουν τα απόλυτα και λύνω κανονικά την ανίσωση.
- **<u>ΜΟΡΦΗ :</u>** $\kappa|Α(x)| + \lambda|Β(x)| > Γ(x)$ ή $\kappa|Α(x)| + \lambda|Β(x)| < Γ(x)$ εδώ πρέπει να κάνουμε απαλοιφή των απολύτων, σχηματίζοντας πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις $Α(x)$ και $Β(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x+3 > 2x-5$

ii. $2x-1 \geq 2x-2$

iii. $-3x+2 + x-1 < x-3$

Λύση:

i. $x+3 > 2x-5$ (1)

- Αν $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ τότε η (1) γίνεται : $x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$

  Άρα $x \geq -3$ και $x < 8$ δηλ.

  Άρα τελικά $x \in [-3,8)$

- Αν $x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ τότε η (1) γίνεται : $x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow -x-3 > 2x-5 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$

  Άρα $x \leq -3$ και $x < \frac{2}{3}$ δηλ.

  Άρα τελικά $x \in (-\infty,-3)$

ii. $|2x-1| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow |2x-1|^2 \geq (2|x-2|)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 4(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4x^2 - 16x + 16 \Leftrightarrow 12x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$

iii. $-3|x+2| + |x-1| < x-3$ (1)

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x\in(-\infty,-2)$ η (1) γίνεται : $3(x+2)-(x-1)<x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1<x-3 \Leftrightarrow x<-10$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in(-\infty,-2)$ παίρνουμε $x\in(-\infty,-10)$
- Αν $x\in[-2,1)$ η (1) γίνεται :

  $-3(x+2)-(x-1)<x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1<x-3 \Leftrightarrow -5x<2 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{5}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in[-2,1)$ παίρνουμε $x\in\left(-\frac{2}{5},1\right)$
- Αν $x\in[1,+\infty)$ η (1) γίνεται :

  $-3(x+2)+x-1<x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1<x-3 \Leftrightarrow -3x<4 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{3}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x\in[1,+\infty)$ παίρνουμε $x\in[1,+\infty)$. Άρα οι λύσεις της ανισώσεις είναι $x\in(-\infty,-10)$ ή $x\in\left(-\frac{2}{5},1\right)$ ή $x\in[1,+\infty)$ δηλ. $x\in(-\infty,-10)$ ή $x\in\left(-\frac{2}{5},+\infty\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

11. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x-3>2x+1$

ii. $4-x-2\geq 3x$

iii. $3-\frac{x-3}{2}\leq x+2$

iv. $x-3\geq x+2$

M_5: Για να επιλύσουμε μια ανίσωση ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία όπως και στην εξίσωση μέχρι να καταλήξουμε στη μορφή αx>β ή αx<β. Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση που ο α είναι θετικός ή αρνητικός έτσι ώστε επιλύοντας ως προς τον άγνωστο x να διατηρήσουμε ή να αλλάξουμε τη μορφή της ανίσωσης.

Παράδειγμα
Να επιλύσετε την ανίσωση

$\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>2x$ **(1)**

Επίλυση
Η (1) γράφεται $4\frac{x-12}{2}+4\frac{x}{2}+4\frac{3}{4}>4.2x$
2(χ-12)+2χ +3> 8χ
2χ-24+2χ+3> 8χ
4χ-8χ > 24-3
-4χ>21
$\chi<\frac{-21}{4}$

<u>**Εφαρμογή 9η από τον μαθητή**</u>

$\frac{5x}{3}-\frac{1}{9}>(x-3)\frac{5}{9}$

M_6: Για να συναληθεύσουμε ή για να επιλύσουμε ένα σύστημα δύο ή περισσότερων ανισώσεων:
α) Επιλύουμε την κάθε ανίσωση ξεχωριστά.
β) Παριστάνουμε τις λύσεις τους πάνω στον ίδιο άξονα.
γ) Βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.
δ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα
Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις
3χ-1 < χ+5 (1) και 2- $\frac{\chi}{2}\le\chi+\frac{1}{2}$ (2)

Επίλυση
Η (1) γράφεται 3χ-χ<5+1 $\Leftrightarrow$ 2χ < 6 $\Leftrightarrow$ χ<3
Η (2) γράφεται 2.**2-2** $\frac{\chi}{2}\le 2\chi+2\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ 4-χ ≤2χ+1 $\Leftrightarrow$ -χ-2χ ≤1-4 $\Leftrightarrow$ -3χ ≤ -3 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ χ ≥1
Αρα 1 ≤χ < 3

<u>Εφαρμογή 10η από τον μαθητή</u>

Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$\frac{\chi+2}{3}-\frac{\chi}{2}\leq 0$ και $\frac{\chi}{4}-\frac{\chi-3}{5}>\frac{\chi}{10}$

M_7: Για να επιλύσουμε μια παραμετρική ανίσωση ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1) Μετατρέπουμε την αρχική εξίσωση στη μορφή αx>β ή αx<β, όπου α, β παραστάσεις της παραμέτρου.

2) Παραγοντοποιούμε τις παραστάσεις α, β και ονομάζουμε (1) τη σχέση που καταλήξαμε.

3) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν α>0 (εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου ισχύει το παραπάνω), τότε η (1) γίνεται x>$\frac{\beta}{\alpha}$ ή x<$\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή η (1) διατηρεί τη φορά ανίσωσης της.

β) Αν α<0 (εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου ισχύει το παραπάνω), τότε η (1) γίνεται x<$\frac{\beta}{\alpha}$ ή x>$\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή η (1) αλλάζει τη φορά ανίσωσης της.

γ) Αν α=0, τότε παίρνουμε τις τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν την παράσταση, τις αντικαθιστούμε στην (1) και συμπεραίνουμε αν η εξίσωση είναι αδύνατη ή αόριστη.

Παράδειγμα

Να επιλυθεί η ανίσωση 5(χ-κ)+6κ(3χ-2) < 2κ-3χ (1)

Επίλυση

Η ανίσωση γράφεται **5(χ-κ)+6κ(3χ-2) < 2κ-3χ** $\Leftrightarrow$ 5χ-5κ+18κχ-12κ < 2κ-3χ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 18κχ+5χ+3χ<2κ+12κ+5κ $\Leftrightarrow$ 2(9κ+4)χ < 19κ (1)

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις

α) Για 2(9κ+4) > 0 $\Leftrightarrow$ 9κ+4 > 0 $\Leftrightarrow$ 9κ> -4 $\Leftrightarrow$ κ > - $\frac{4}{9}$ η (1) δίνει $\chi<\frac{19\kappa}{2(9\kappa+4)}$

β) Για 2(9κ+4) < 0 $\Leftrightarrow$ 9κ+4 < 0 $\Leftrightarrow$ 9κ< -4 $\Leftrightarrow$ κ < - $\frac{4}{9}$ η (1) δίνει $\chi>\frac{19\kappa}{2(9\kappa+4)}$

γ) Για 2(9κ+4) = 0 $\Leftrightarrow$ 9κ+4 = 0 $\Leftrightarrow$ 9κ= -4 $\Leftrightarrow$ κ = - $\frac{4}{9}$ η (1) δίνει

$0\,\chi<-\frac{76}{9}$ αδύνατη.

<u>Εφαρμογή 11η από τον μαθητή</u>

Αν $\kappa\geq 0$, να επιλυθεί η ανίσωση

(κχ+4)κ-(κ-χ)-2(3χ+2) > 0

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.i)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

Λύση

$\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x$

$6x - 6 + 6x + 9 < 2x$

$10x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{10}$

1.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

Λύση

$\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-12) + 2x + 3 > 4x$

$2x - 24 + 2x + 3 > 4x$

$0x > 21 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 21$ αδύνατη

1.iii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση

$\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4$

$5x - 10 + 2 - 4x < x - 4$

$0x < 4$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

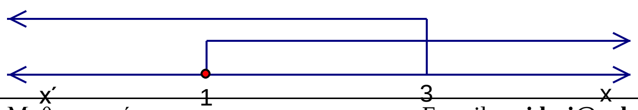
$$3x - 1 < x + 5 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2}$$

Λύση

$3x - 1 < x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$

$2 - \frac{x}{2} \le x + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x \le 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 1$

Συναλήθευση $1 \le x < 3$



3.

Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις :

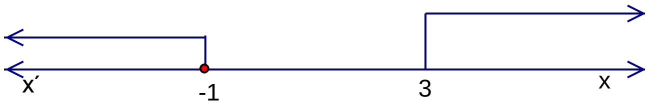
$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1$ και $x - \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} - 1$

Λύση

$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \iff 2x - 1 > x + 2 \iff x > 3$

$x - \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} - 1 \iff 3x - 1 \le x - 3 \iff 2x \le -2 \iff x \le -1$

Οι ανισώσεις δε συναληθεύουν



4.

Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$2x - \frac{x-1}{8} > x$ και $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0$

Λύση

$2x - \frac{x-1}{8} > x \iff 16x - x + 1 > 8x \iff 7x > -1 \iff x > -\frac{1}{7}$

$x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \iff 2x - 8 + x + 1 < 0 \iff 3x < 7 \iff x < \frac{7}{3}$

Συναλήθευση $-\frac{1}{7} < x < \frac{7}{3}$

Οι ακέραιοι που ανήκουν στο διάστημα $\left(-\frac{1}{7},\ \frac{7}{3}\right)$ είναι οι $0,\ 1,\ 2.$

5.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|x| < 3$ **ii)** $|x-1| \le 4$ **iii)** $|2x+1| < 5$

Λύση

> Από τα απόλυτα θυμόμαστε
> $|x - x_0| < \rho \iff x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$
> $|x| < \rho \iff -\rho < x < \rho$

i)

$|x| < 3 \iff -3 < x < 3$

ii)

$|x-1| \le 4 \iff 1 - 4 \le x \le 1 + 4$

$-3 \le x \le 5$

iii)

$|2x+1| < 5 \iff -5 < 2x + 1 < 5$

$-5 - 1 < 2x < 5 - 1$

$$-6 < 2x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 2$$

6.

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|x| \geq 3$ **ii)** $|x-1| > 4$ **iii)** $|2x+1| \geq 5$

Λύση

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$|x-x_0| > \rho \quad \Leftrightarrow \quad x < x_0-\rho$ ή $x > x_0+\rho$

$|x| > \rho \quad \Leftrightarrow \quad x < -\rho$ ή $x > \rho$

i)

$|x| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -3$ ή $x \geq 3$

ii)

$|x-1| > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 < -4$ ή $x-1 > 4$

$x < -3$ ή $x > 5$

iii)

$|2x+1| \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+1 \leq -5$ ή $2x+1 \geq 5$

$2x \leq -6$ ή $2x \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -3$ ή $x \geq 2$

7.

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $|2x-6| = 2x-6$ **ii)** $|3x-1| = 1-3x$

Λύση

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$|\alpha| = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq 0$

i)

$|2x-6| = 2x-6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-6 \geq 0$

$2x \geq 6$

$x \geq 3$

ii)

$|3x-1| = 1-3x \quad \Leftrightarrow \quad |3x-1| = -(3x-1)$

$3x-1 \leq 0$

$3x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{3}$

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$|\alpha| = -\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 0$

8.i)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$

Σαν άγνωστο βλέπουμε το $|x-1|$

Λύση

$$\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\big(|x-1|-4\big) + 10 < 2|x-1|$$

$$3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1|$$

$$3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1|$$
$$|x-1| < 2$$
$$-2 < x-1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 3$$

8.ii)

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3}$

Σαν άγνωστο βλέπουμε το $|x|$

Λύση

$$\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|)$$
$$3|x| + 3 - 4|x| > 2 - 2|x|$$
$$|x| > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

9.

Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-6x+9} \le 5$

Λύση

Θυμόμαστε $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

$$\sqrt{x^2-6x+9} \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2} \le 5$$
$$|x-3| \le 5$$
$$-5 \le x-3 \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le x \le 8$$

10.

Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x-x_0| < \rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7,\ 3)$.

Λύση

$$x \in (-7,\ 3) \quad \Leftrightarrow \quad -7 < x < 3 \quad \textbf{(1)}$$
$$|x-x_0| < \rho \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) θα πρέπει $\begin{cases} x_0 - \rho = -7 \\ x_0 + \rho = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (+):\ 2x_0 = -4 \\ (-):\ 2\rho = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ \rho = 5 \end{cases}$$

Η $|x-x_0| < \rho$ γίνεται $|x-(-2)| < 5$

$$|x+2| < 5$$

11.

Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου $\left({}^{o}C\right)$ με τους βαθμούς Φαρενάϊτ $\left({}^{o}F\right)$ είναι η $F = \frac{9}{5}C + 32$. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41^{o} F μέχρι 50^{o} F. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^{o}C.

Λύση

Από τις υποθέσεις δίνεται $41 \le F < 50 \Rightarrow$

$$41 \le \frac{9}{5}C + 32 \le 50$$

$$41 - 32 \le \frac{9}{5}C \le 50 - 32$$

$$9 \le \frac{9}{5}C \le 18$$

$$5 \le C \le 10$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

i) $3 \le 4x - 1 \le 6$ **ii)** $-4 \le 2 - 3x \le -2$

Λύση

i)

$3 \le 4x - 1 \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 1 \le 4x \le 6 + 1$

$$4 \le 4x \le 7$$

$$1 \le x \le \frac{7}{4}$$

ii)

$-4 \le 2 - 3x \le -2 \quad \Leftrightarrow \quad -4 - 2 \le -3x \le -2 - 2$

$$-6 \le -3x \le -4$$

$$2 \ge x \ge \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} \le x \le 2$$

Η διαίρεση με αρνητικό αριθμό αλλάζει τη φορά της ανίσωσης

2.

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει :

i) $2 \le |x| \le 4$ **ii)** $2 \le |x - 5| \le 4$

Λύση

Από τα απόλυτα θυμόμαστε

$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$

$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$

i)

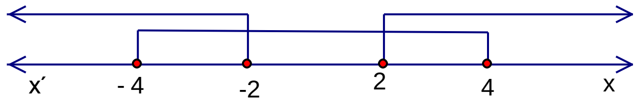
$2 \le |x| \quad \Leftrightarrow \quad |x| \ge 2$

$x \le -2$ ή $x \ge 2$ **(1)**

$|x| \le 4 \iff -4 \le x \le 4$ **(2)**

Συναλήθευση των (1), (2)

$-4 \le x \le -2$ ή $2 \le x \le 4$



ii)

$2 \le |x-5| \iff |x-5| \ge 2$

$x-5 \le -2$ ή $x-5 \ge 2$

$x \le 3$ ή $x \ge 7$ **(3)**

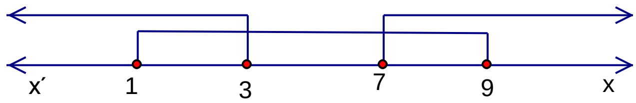
$|x-5| \le 4 \iff -4 \le x-5 \le 4$

$-4+5 \le x \le 4+5$

$1 \le x \le 9$ **(4)**

Συναλήθευση των (3), (4)

$1 \le x \le 3$ ή $7 \le x \le 9$



3.

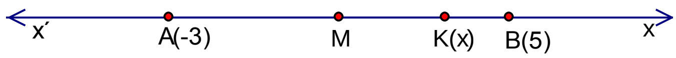
Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-5| \le |x+3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

Λύση



i)

Στο μέσο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός $\dfrac{-3+5}{2} = 1$

ii)

Έστω K(x) το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της ανίσωσης

$|x-5| \le |x-3| \iff d(x,\ 5) \le d(x,\ -3)$

$(KB) \le (KA)$

το Κ βρίσκεται δεξιά του μέσου Μ

$x \ge 1$

$\boxed{|\alpha-\beta| = d(\alpha,\ \beta)}$

iii)

$|x-5| \le |x+3| \iff |x-5|^2 \le |x+3|^2$

$(x-5)^2 \le (x+3)^2$

$x^2 - 10x + 25 \le x^2 + 6x + 9$

$-16x \le -16 \iff x \ge 1$

$\boxed{|\alpha|^2 = \alpha^2}$

Η διαίρεση με αρνητικό αριθμό αλλάζει τη φορά της ανίσωσης

4.

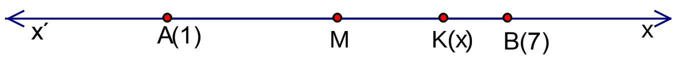
Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x-1| + |x-7| = 6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

Λύση



i)

Στο μέσο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός $\dfrac{1+7}{2} = 4$

ii)

Έστω Κ(x) το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί η τυχαία λύση της εξίσωσης

$\boxed{|\alpha-\beta| = d(\alpha,\ \beta)}$

$$|x-1| + |x-7| = 6 \iff d(x,\ 1) + d(x,\ 7) = 6$$

$(KA) + (KB) = 6 \qquad \big(\text{αλλά } (AB) = 7 - 1 = 6\big)$

$(KA) + (KB) = (AB)$

το Κ ανήκει στο τμήμα ΑΒ

$1 \le x \le 7$

iii)

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	

- Όταν $x < -1$

  $|x-1| + |x-7| = 6 \iff -(x-1) + [-(x-7)] = 6$

  $-x + 1 - x + 7 = 6$

  $-2x = -2 \iff x = 1$ άτοπο, αφού $x < -1$

- Όταν $1 \le x < 7$

  $|x-1| + |x-7| = 6 \iff (x-1) + [-(x-7)] = 6$

  $x - 1 - x + 7 = 6$

  $6 = 6$, που ισχύει για κάθε $1 \le x < 7$

- Όταν $x \ge 7$

  $|x-1| + |x-7| = 6 \iff (x-1) + (x-7) = 6$

  $x - 1 + x - 7 = 6$

  $2x = 14 \iff x = 7$, που ισχύει για $x = 7$

Τελικά $1 \le x \le 7$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Πως γίνεται η συναλήθευση δύο ή περισσοτέρων ανισώσεων;

ΕΡΩΤΗΣΗ 7η

Ποιες πράξεις δεν γίνονται και ποιες είναι καλό να αποφεύγονται όταν έχουμε ανισότητες;

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Αν α,β ομόσημοι	1 λύση
Για κάθε α ε IR	α > γ
Η αχ+β=0 , α $\neq$ 0 έχει	χε [α,β]
α $\leq$ χ $\leq$ β	α.β >0 και α / β >0
α< χ < β	άπειρες λύσεις
Αν α>β και β > γ τότε	χε(α,β)
Η αόριστη εξίσωση	$\alpha^2 \geq 0$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Αν α,β,χ ε IR , τότε η εξίσωση β.χ = α έχει μοναδική λύση όταν

Α		α = 0 και β = 0.
Β		α = 0 και β $\neq$ 0.
Γ		β $\neq$ 0

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Αν το γινόμενο δύο αριθμών χ και ψ είναι αρνητικό, τότε συμπεραίνουμε ότι οι χ,ψ είναι

Α		αρνητικοί.
Β		ομόσημοι.
Γ		ετερόσημοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει για κάθε χ,ψ,ζ ε IR;

Α		$\chi > \psi$ και $\psi > \zeta \Leftrightarrow \chi \geq \zeta$.
Β		$\chi \geq \psi$ και $\psi \geq \zeta \Rightarrow \chi \geq \zeta$.
Γ		$\chi > \psi$ και $\psi \geq \zeta \Rightarrow \chi \geq \zeta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με αριθμό $\alpha > 0$, τότε

Α		προκύπτει ανισότητα με αλλαγμένη φορά.
Β		προκύπτει ανισότητα με ίδια φορά.
Γ		δεν έχει νόημα ο πολλαπλασιασμός.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ανίσωση $\alpha.\chi > \beta$ είναι ταυτότητα αν $\alpha = 0$ και

Α		$\beta > 0$.
Β		$\beta < 0$.
Γ		$\beta = 0$.

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ......ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε......	με όταν...

Ερώτηση α)

.... μια εξίσωση αχ+β=0 έχει μια λύση;

Ερώτηση β)

.... μια εξίσωση αχ+β=0 είναι αδύνατη;

Ερώτηση γ)

.... μια εξίσωση αχ+β=0 είναι αόριστη ή ταυτότητα;

Ερώτηση δ)

..........αλλάζει η φορά μιας ανισότητας;

Ερώτηση ε)

.... η ανίσωση αχ+β > 0 είναι αδύνατη;

Ερώτηση στ)

.... η λύση μιας ανίσωσης είναι κλειστό διάστημα;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να επιλυθεί η ανίσωση

$$\frac{\lambda(\chi-2)}{2} - \frac{2\chi-\lambda}{5} < \frac{\chi}{10} - \frac{2}{5}$$

2. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι) $\lambda(\chi-1) > \lambda^2$

ιι) $\frac{\lambda\chi-\lambda}{2} + 1 > \frac{\chi}{2}$

3. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι) $\lambda\chi > \chi+2$

ιι) $\frac{\chi-\lambda}{2} + \frac{2\chi+3}{4} > \frac{\lambda\chi}{6}$

3.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν $\theta > 0$ τότε $|\chi| > \theta \Leftrightarrow \chi < -\theta$ ή $\chi < \theta$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η: Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν $\theta > 0$ τότε $|\chi| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \chi < \theta$.

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

1.Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι) $|\chi\text{-}1| \leq 4$

ιι) $|\chi+1| \geq 2$

ιιι) $\frac{|\chi\text{-}1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|\chi\text{-}1|}{3}$

2.Να λυθεί η εξίσωση $3.|\chi\text{-}1| = 2\chi\text{-}1$

2. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

ι)$3(|\chi| - 1) + 2(|\chi| - 2) > 2$

ιι) $\frac{2|\chi|-3}{4} < \frac{|\chi|+1}{3}$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Ποια είναι αληθής από τις παρακάτω ισότητες;

(Α) $|\chi\text{-}1| = \begin{cases} \chi\text{-}1 \ , \ \chi \geq 0 \\ 1\text{-}\chi, \ \chi < 0 \end{cases}$ (Β) $|\chi\text{-}1| = \begin{cases} \chi\text{-}1 \ , \ \chi \geq 1 \\ 1\text{-}\chi, \ \chi < 1 \end{cases}$ (Γ) $|\chi\text{-}1| = \chi\text{-}1$.

Α	Β	Γ	Δ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Πότε ισχύει η σχέση $|\chi+\psi| \leq |\chi| + |\psi|$ ισχύει ως ισότητα; Όταν χ, ψ μόνο

Α	

θετικοί.

Β	

ετερόσημοι.

Γ	

ομόσημοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

Α	

$|\chi.\psi| = |\chi| + |\psi|$, όταν χ,ψ ομόσημοι.

Β	

$|\chi.\psi| = |\chi| . |\psi|$, όταν χ,ψ ε IR.

Γ	

$|\chi.\psi| = |\chi| - |\psi|$, όταν χ,ψ ετερόσημοι.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Η συνέχεια της επίλυσης της εξίσωσης $|\chi-2| = -5$ είναι

Α	

$\chi-2 = +5$ ή $\chi-2 = -5$ κ.λ.π

Β	

$(\chi-2)^2 = (-5)^2$ κ.λ.π

Γ	

αδύνατη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η ανισότητα $|\chi| + |\psi| < 10$ ισχύει όταν

Α	

$\chi = 5$, $\psi = -5$

Β	

$\chi = 8$, $\psi = 0$

Γ	

$\chi = 12$, $\psi = -4$.

1. Να επιλυθεί η ανίσωση $\frac{|\chi|+1}{2} - \frac{2|\chi|}{3} > \frac{1-|\chi|}{3}$

2.Να επιλυθεί η ανίσωση $2|\chi-1| > \chi + 11$.

3.Να επιλυθεί η εξίσωση $2|2\chi+1| +3\left|\frac{1}{2}-\chi\right| -5\frac{|\chi+2|}{2} +3\chi < 0$.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. $\frac{2x-1}{3}-\frac{2x+2}{3}>1+\frac{x+1}{4}$

β. $\frac{x+1}{2}>x-\frac{2x+3}{4}$

γ. $\frac{(1-2x)(x-3)}{2}+2x>-(x+1)^2$

δ. $\frac{2x-1}{3}+1\leq 2-\frac{3-2x}{2}$

2. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$3(x-1)+2x<x+1 \quad \text{και} \quad 2(x+3)-x\geq 2$$

3. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x+1)^2}{8}>\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}$$

$$(x-1)(x+1)<(x-4)^2-25$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λυθούν οι ανισώσεις :

α. $\lambda(x-1)>\lambda^2$

β. $\lambda x>x+2$

γ. $\frac{x-\lambda}{2}+\frac{2x+3}{4}>\frac{\lambda x}{6}$

δ. $\frac{\lambda(x-2)}{2}-\frac{2x-\lambda}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5}$

5. Να λυθεί η ανίσωση : $\lambda(x+\lambda)+\mu(x-\mu)<2\lambda x+2\mu x$.

6. Αν $\alpha>0$ να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x-1}{\alpha}-x>\frac{1}{\alpha}$.

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

α. $|x-3|\le 1$ **β.** $3|2-5x|<9$

γ. $3+|x-3| > 9$ **δ.** $1\le|2x-5|\le 4$

ε. $\frac{5|x|-7}{2}-\frac{3|x|+1}{4}<|x|+5$ **στ.** $|2x-1|\ge 3x-2$

ζ. $2|x-1| + x < 3 + 2x$ **η.** $|x+8|-1>\frac{x+1}{2}$

θ/ $\frac{2|x-1|}{3}-\frac{|1-x|}{4}>\frac{|3x-3|}{2}+1$

8. Να λύσετε την καθεμία από τις παρακάτω ανισώσεις :

$$|2x-3|<7 \quad \text{και} \quad |x|\ge 1$$

κι έπειτα να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες αληθεύουν ταυτόχρονα.

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $||x|-5|<2$ **β.** $|x|^3-2x^2-5|x|+6>0$

10. Να λυθεί η ανίσωση : $|x^2-1| \le 2x^2 + 2$.

11. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}\ge 0$.

12. Να λυθεί η ανίσωση : $|x^3-1| \le x^2 + x + 1$.

13. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $|x|\ge 3$ και $|2x-1|<13$.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ

14. Αν $α < β$ να αποδείξετε ότι η λύση της εξίσωσης $2x - α - β = 0$ ανήκει στο διάστημα $(α, β)$.

15. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

16. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{5x-2} = 2\sqrt{1-x}$.