ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 7.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = αx^2$

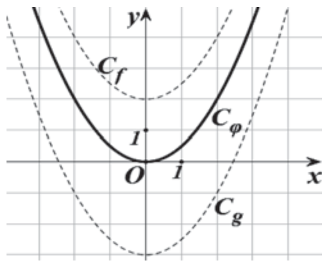
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = αx^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Άρα θα ισχύει $2 = α \cdot 1^2 \Leftrightarrow α = 2$.

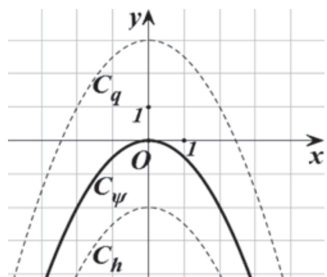
Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

2. i) Η γραφική παράσταση της $φ(x) = 0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ.).



Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 0,5x^2 + 2$ και $g(x) = 0,5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

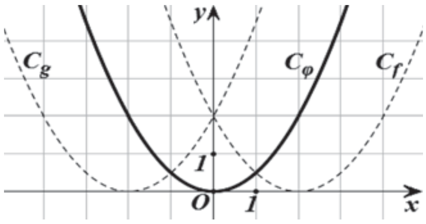
ii) Η γραφική παράσταση της $ψ(x) = –0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (σχ.).



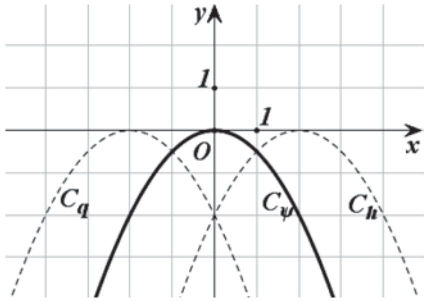
Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $h(x) = –0,5x^2 –2$ και $q(x) = –0,5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = –0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

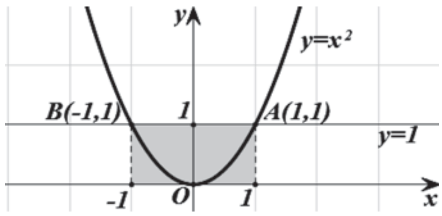
3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παράστασεις των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$ και $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.



ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0{,}5(x - 2)^2$ και $q(x) = -0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0{,}5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.



4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x) = x^2$ είναι η παραβολή $y = x^2$ του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία $y = 1$ του ίδιου σχήματος.



Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία A(1, 1) και B(–1, 1) που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

Επειδή

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $x^2 \leq 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. Επομένως, θα έχουμε

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

ii) Έχουμε

$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

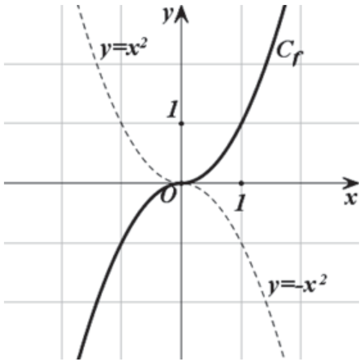
$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι

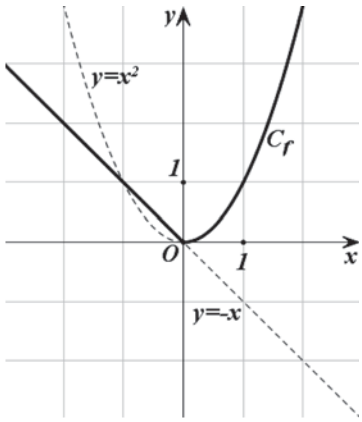
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y = -x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

2. Η γραφική παράστασης της

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y = -x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.
Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι
- ✓ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ✓ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι
α) Στο διάστημα $(0, 1)$ από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$. Επομένως, αν $x \in (0, 1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.
β) Στο διάστημα $(1, +\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο. Επομένως αν $x \in (1, +\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε
- ✓ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x - 1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.
- ✓ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

Άρα $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

- Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι η $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2), οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα $y'y$, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε
$(AB) = 2x$ και $(OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}$.

Επομένως, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$$(OA) = (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4$$
$$\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3,$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}, \text{ διότι } x > 0.$$

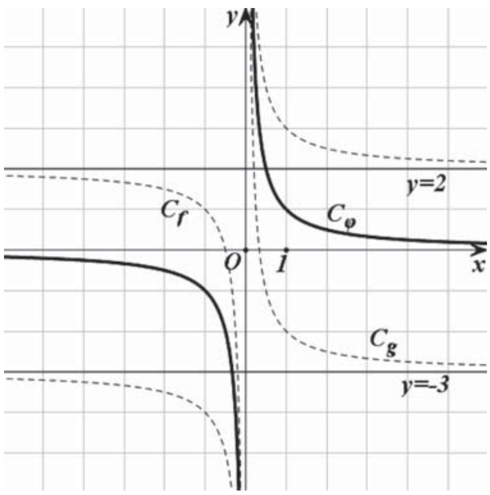
§ 7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2, 1), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως θα ισχύει $1 = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

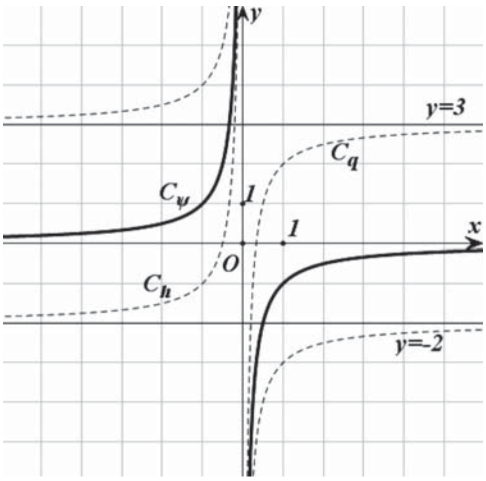
Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = \frac{2}{x}$.

2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 1^o και 3^o τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

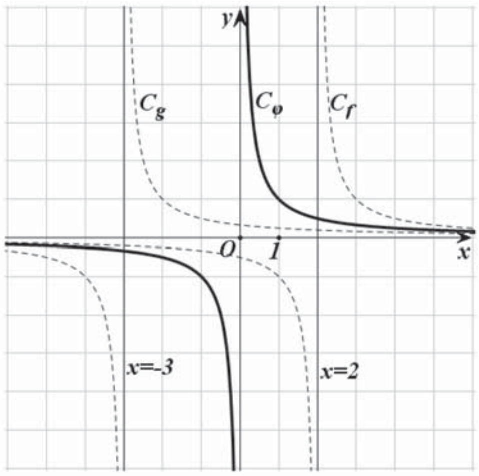
ii) Η γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 2^o και 4^o τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και $q(x) = -\frac{1}{x} + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες



μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x) = \frac{1}{x-2}$ και
$g(x) = \frac{1}{x+3}$, προκύπτουν
από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



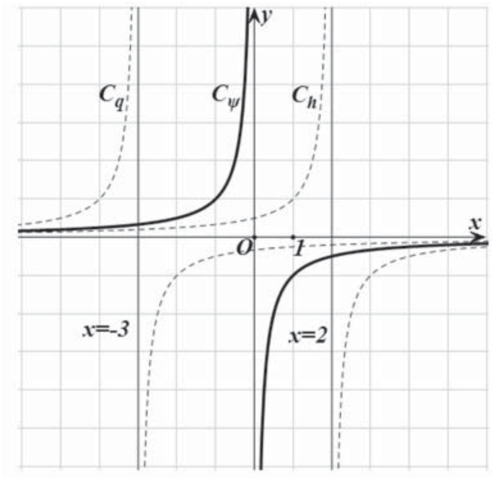
$y = \frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$h(x) = -\frac{1}{x-2}$ και

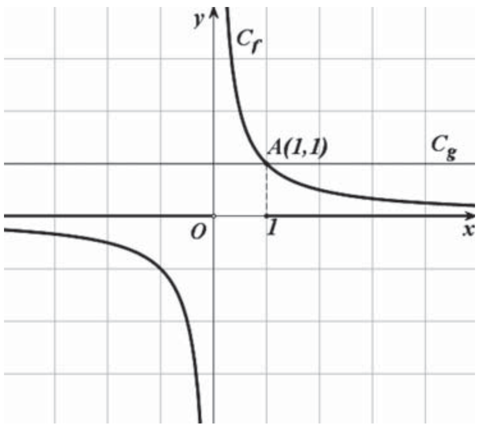
$q(x) = -\frac{1}{x+3}$

προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής



$y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

4. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 1)$. Επομένως:



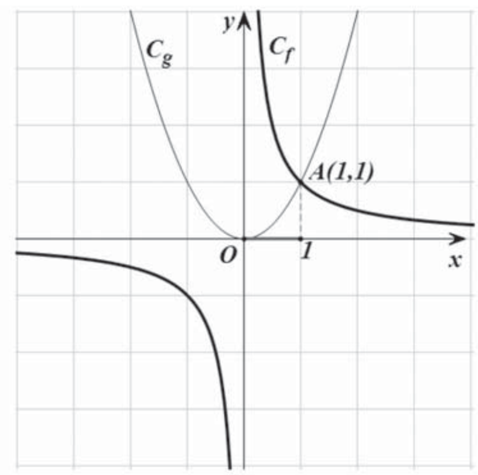
- $\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x < 0 \quad ή \quad x \geq 1$
- $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του διπλανού σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 1)$. Επειδή



$$\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) \text{ και}$$

$$\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $\frac{1}{x} \le x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $\frac{1}{x} > x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

Επομένως, θα έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$
- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

ii) Έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x} \le 0$

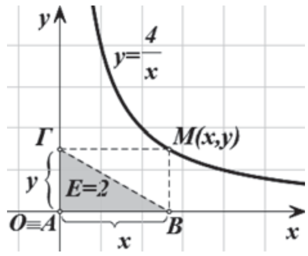
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0 \quad \text{και} \quad x \ne 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0 \quad \text{ή} \quad x \ge 1.$$

Επομένως

- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε ΑΒ = ΟΑ = x > 0 και ΑΓ = ΟΓ = y > 0. Τότε το εμβαδό Ε του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε

$$\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}, \quad (1).$$



Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.

§ 7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε
$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$.
Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε
$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1$.
Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

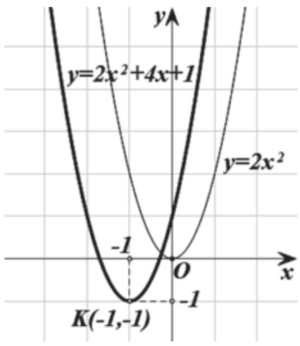
2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι α = 2 > 0, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ το } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}.$$

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$ είναι α = –3 < 0, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{β}{2α} = \frac{-5}{6}, \text{ το } g\left(\frac{-5}{6}\right) = -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $α = 2 > 0$, οπότε αυτή



✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για

$x = -\frac{β}{2α} = -1$, το $f(-1) = -1$.

✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και

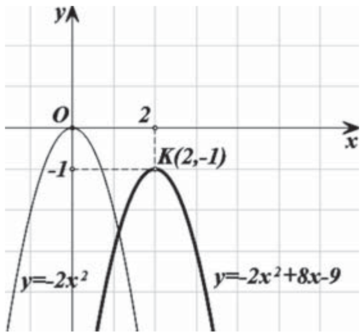
✓ έχει κορυφή το σημείο $K(-1, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,

✓ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

$$A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad \text{και} \quad B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα y΄y στο σημείο Γ(0, 1).

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $α = -2 < 0$, οπότε αυτή



✓ Παρουσιάζει μέγιστο για

$x = -\frac{β}{2α} = 2$, το $g(2) = -1$

✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και

✓ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,

✓ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0, -9)$ ενώ, δεν τέμνει τον άξονα x΄x, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

4. Γνωρίζουμε ότι

i) Όταν $α > 0$, τότε η παραβολή $y = αx^2 + βx + γ$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $α < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό α έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6, ενώ αρνητικό α έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7.

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = αx^2 + βx + γ$ με τον άξονα y΄y. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5, αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7, ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4.

iii) Η τεταγμένη της κορυφής Κ της παραβολής $y = αx^2 + βx + γ$ δίνεται από τον τύπο $x_K = \frac{-β}{2α}$, οπότε ισχύει $β = -2α \cdot x_K$. Επομένως

✓ για την f_2 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✓ για την f_3 που έχει $α > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β < 0$,
✓ για την f_4 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✓ για την f_5 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✓ για την f_6 που έχει $α > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $β > 0$, και
✓ για την f_7 που έχει $α < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $β < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
$α$	+	–	+	–	–	+	–
$β$	0	+	–	+	+	+	–
$γ$	+	–	–	0	+	–	–
Δ	–	0	+	+	+	+	–

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του x΄x μόνο αν είναι $Δ = 0$.

Δηλαδή $(k + 1)^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$

ii) Η παραβολή έχει τον y΄y άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y΄y, δηλαδή αν και μονο αν $\frac{-β}{2α} = 0$. Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$K\left(-\frac{β}{2α}, f\left(-\frac{β}{2α}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο $K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right)$.

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4$, που διαδοχικά γράφεται

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k = -4 \Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16$$
$$\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.
- Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
- Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $α < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία Α(1, 0) και Β(5, 0), το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $ρ_1 = 1$ και $ρ_2 = 5$.
Άρα είναι $Δ > 0$.

iii) Επειδή $ρ_1 + ρ_2 = \frac{-β}{α}$ και $β = 6$, θα έχουμε $1 + 5 = \frac{-6}{α}$, οπότε θα είναι $α = -1$.
Τέλος, επειδή $ρ_1 \cdot ρ_2 = \frac{γ}{α}$, θα έχουμε $1 \cdot 5 = \frac{γ}{-1}$, οπότε θα είναι $γ = -5$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $ρ_1 = 1$ και $ρ_2 = 5$, θα είναι της μορφής $ρ(x) = α(x - ρ_1)(x - ρ_2) = α(x - 1)(x - 5) = αx^2 - 6αx + 5α$.
Επομένως θα είναι $β = -6α$ και επειδή $β = 6$, θα έχουμε $α = -1$.
Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει $2(x + y) = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.
Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με

$$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο f(x). Αυτό συμβαίνει όταν $x = \frac{-β}{2α} = \frac{-10}{-2} = 5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x = 5$ είναι και $y = 5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με

$$f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25.$$

4. Αν θέσουμε (ΑΜ) = x, τότε θα είναι (ΜΒ) = 6 – x (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε.

$\upsilon_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$, οπότε $\upsilon_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

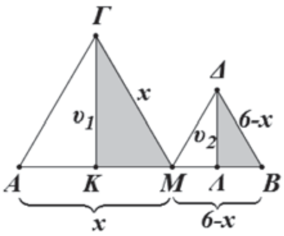
Ομοίως από το τρίγωνο ΛΔΒ παίρνουμε $\upsilon_2 = \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(AM)(K\Gamma) + \frac{1}{2}(MB)(\Lambda\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}x\,\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x)\,\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)$$



Άρα $E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18).$, με $0 \le x \le 6$. (1)

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν Ε είναι ελάχιστο για την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $\alpha = 1 > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3.$$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

5. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει

$$2x + 2x + 3y = 240 \Leftrightarrow 4x + 3y = 240 \Leftrightarrow y = \frac{240 - 4x}{3}. \qquad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E = 2xy = 2x\left(\frac{240 - 4x}{3}\right) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x. \qquad (2)$$

Για τη συνάρτηση $E(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 160x$ είναι $\alpha = -\frac{8}{3} < 0$, οπότε αυτή

παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-160}{\frac{-16}{3}} = 30$.

Τότε από την (1) παίρνουμε $y = \frac{240 - 4\cdot 30}{3} = 40$.

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι x = 30m και y = 40m.