

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

---

#### § 6.1. Η έννοια της συνάρτησης

##### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Πρέπει  $x - 1 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 1$ . Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το:  $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .  
ii) Πρέπει  $x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  και  $x \neq 4$ .  
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το:  
$$\mathbb{R} - \{0, 4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty).$$
  
iii) Πρέπει  $x^2 + 1 \neq 0$  που ισχύει πάντοτε. Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το  $\mathbb{R}$ .  
iv) Πρέπει  $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$ .  
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο  $(0, +\infty)$ .
2. i) Πρέπει:  $x - 1 \geq 0$  και  $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ .  
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο  $[1, 2]$ .  
ii) Πρέπει  $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$  ή  $x \geq 2$   
αφού οι ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - 4$  είναι οι αριθμοί  $-2$  και  $2$ .  
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ .  
iii) Ομοίως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο  $[1, 3]$  αφού  
οι ρίζες του τριωνύμου και οι αριθμοί  $1$  και  $3$ .  
iv) Πρέπει  $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$  και  $x \neq 1$ .  
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο  
$$[0, +\infty) - \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty).$$
3. Είναι  
 $f(-5) = (-5)^3 = -125.$   
 $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$   
 $f(6) = 2 \cdot 6 + 3 = 15.$
4. i) Έστω  $x$  ο ζητούμενος φυσικός αριθμός. Τότε, ο τύπος της συνάρτησης  
θα προκύψει ως εξής:

$$x \xrightarrow{+1} x + 1 \xrightarrow{\cdot 4} (x + 1) \cdot 4 \xrightarrow{+x^2} (x + 1) 4 + x^2.$$

Επομένως, θα είναι  $f(x) = (x + 1)4 + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$   
 $\delta\eta\lambda\alpha\delta\eta f(x) = (x + 2)^2, x \in \mathbb{N}. \quad (1)$

Έτσι θα έχουμε  $f(0) = 2^2 = 4, f(1) = 3^2 = 9, f(2) = 4^2 = 16$  και  $f(3) = 5^2 = 25.$

ii) Επειδή  $x > 0$ , έχουμε:

- ✓  $f(x) = 36 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4.$
- ✓  $f(x) = 49 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = 5.$
- ✓  $f(x) = 100 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 8.$
- ✓  $f(x) = 144 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 12^2 \Leftrightarrow x = 10.$

5. i) Για  $x \neq 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = 7 &\Leftrightarrow \frac{4}{x-1} + 5 = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

ii) Για  $x \neq 0, 4$  έχουμε:

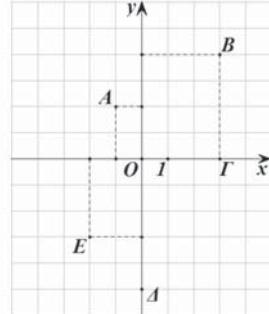
$$\begin{aligned} g(x) = 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x} = 2 \\ &\Leftrightarrow x+4 = 2x \Leftrightarrow x = 4, \text{ αδύνατη.} \end{aligned}$$

iii) Για  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$h(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

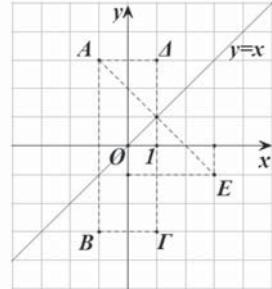
## § 6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα σημεία είναι αποτυπωμένα στο διπλανό σχήμα.



2. Πρέπει  $2 < x < 5$  και  $1 < y < 6$ .

3. Το συμμετρικό του  $A(-1, 3)$ ,
- ως προς τον άξονα  $x'$  είναι το  $B(-1, -3)$
  - ως προς τον άξονα  $y'$  είναι το  $\Delta(1, 3)$
  - ως προς τη διχοτόμο της γωνίας  $x \hat{O} y$  είναι το  $E(3, -1)$
  - ως προς την αρχή των αξόνων είναι το  $\Gamma(1, -3)$ .



4. Με βάση τον τύπο  $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  της απόστασης των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ , έχουμε
- $(OA) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .
  - $(AB) = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ .
  - $(AB) = \sqrt{(1+3)^2 + 0^2} = 4$ .
  - $(AB) = \sqrt{0^2 + (4+1)^2} = 5$ .

5. i) Είναι
- $$(AB) = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$
- $$(AG) = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$
- $$(BG) = \sqrt{(-3-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}.$$
- $\triangle$   
Αρα,  $(AB) = (AG)$ , οπότε το τρίγωνο  $ABG$  είναι ισοσκελές με κορυφή το  $A$ .

ii) Είναι

$$(AB) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ οπότε } (AB)^2 = 8.$$

$$(AG) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}, \text{ οπότε } (AG)^2 = 18.$$

$$(BG) = \sqrt{(4+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}, \text{ οπότε } (BG)^2 = 26.$$

Παρατηρούμε ότι  $(BG)^2 = (AB)^2 + (AG)^2$ . Αρα το τρίγωνο  $ABG$  είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την  $A$ .

6. Είναι

$$(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5.$$

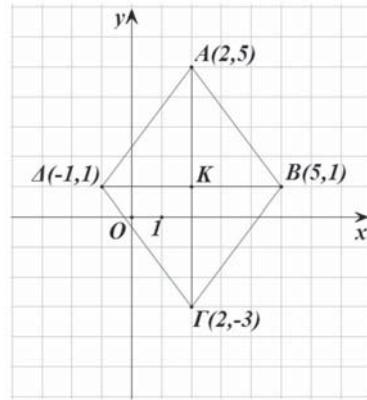
$$(B\Gamma) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = 5.$$

$$(\Gamma\Delta) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = 5.$$

$$(\Delta A) = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = 5.$$

Άρα το τετράπλευρο  $A\Gamma\Delta B$  έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

**Σχόλιο:** Άμεσα προκύπτει ότι το  $A\Gamma\Delta B$  είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.



7. Πρέπει

- i)  $f(2) = 6 \Leftrightarrow 2^2 + k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$
- ii)  $g(-2) = 8 \Leftrightarrow k(-2)^3 = 8 \Leftrightarrow k = -1.$
- iii)  $h(3) = 8 \Leftrightarrow k\sqrt{4} = 8 \Leftrightarrow k = 4.$

8. i) Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι όλο το  $\mathbb{R}$ .

- Για  $y = 0$  έχουμε  $x = 4$ , οπότε η  $y = f(x)$  τέμνει τον  $x'$  στο σημείο  $A(4, 0)$ .
- Για  $x = 0$  έχουμε  $y = -4$ , οπότε η  $y = f(x)$  τέμνει τον  $y'$  στο σημείο  $B(0, -4)$ .

Ομοίως

- ii) Η  $g$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$  και τέμνει
- τον  $x'$  στα σημεία  $A_1(2, 0)$  και  $A_2(3, 0)$  και
  - τον  $y'$  στα σημεία  $B(0, 6)$ .

- iii) Η  $h$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$  και

- έχει με τον  $x'$  κοινό σημείο το  $A(1, 0)$ .
- τέμνει τον  $y'$  στο σημείο  $B(0, 1)$ .

- iv) Η  $q$  έχει πεδίο ορισμού όλο το  $\mathbb{R}$  και

- δεν έχει κοινά σημεία με τον  $x'$ .
- τέμνει τον  $y'$  στο σημείο  $B(0, 1)$ .

- v) Η  $\varphi$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $[1, +\infty)$ , οπότε

- έχει με τον  $x'$  ένα μόνο κοινό σημείο το  $A(1, 0)$  και
- δεν έχει κοινά σημεία με τον  $y'$ .

- vi) Η  $\psi$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ , οπότε

- έχει με τον  $x'$  δύο κοινά σημεία, τα  $A_1(-2, 0)$  και  $A_2(2, 0)$ .
- δεν έχει κοινά σημεία με τον  $y'$ .

- 9.** i) Για  $x = 0$  έχουμε  $f(0) = -1$ . Άρα η  $C_f$  τέμνει τον γάλη στο σημείο  $A(0, -1)$ .

Για  $y = 0$  έχουμε  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1$ .

Άρα η  $C_f$  τέμνει τον γάλη στα σημεία  $B_1(-1, 0)$  και  $B_2(1, 0)$ .

$$\text{ii) } f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

- 10. i)**  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Άρα  $x = 5 \quad \text{ή} \quad x = 2$ .

Για  $x = 2$ ,  $g(2) = 4 - 6 = -2$ .

Για  $x = 5$ ,  $g(5) = 4$ .

Άρα τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$  είναι τα  $A(2, -2)$  και  $B(5, 4)$ .

$$\text{ii) } f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5.$$

### § 6.3. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

#### A' ΟΜΑΔΑΣ

- 1.** Όπως είναι γνωστό, για το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $y = ax + \beta$  ισχύει:  $a = \text{εφω}$ , όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η  $y = ax + \beta$  με τον άξονα γάλη. Επομένως, θα έχουμε

i)  $\text{εφω} = 1$ , οπότε  $\omega = 45^\circ$ .

ii)  $\text{εφω} = \sqrt{3}$ , οπότε  $\omega = 60^\circ$ .

iii)  $\text{εφω} = -1$ , οπότε  $\omega = 135^\circ$ .

iv)  $\text{εφω} = -\sqrt{3}$ , οπότε  $\omega = 120^\circ$ .

- 2.** Αν θέσουμε  $\Delta x = x_2 - x_1$  και  $\Delta y = y_2 - y_1$ , έχουμε:

i)  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1$ .

ii)  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$ .

iii)  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 1}{-1 - 2} = 0$ .

iv)  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$ .

- 3.** Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής  $y = ax + \beta$ .

i) Επειδή  $a = -1$  και  $\beta = 2$ , η εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = -x + 2$ .

ii) Επειδή  $a = \text{εφ } 45^\circ = 1$  και  $\beta = 1$ , η εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = x + 1$ .

iii) Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την  $y = 2x - 3$  θα έχει ίδια κλίση με αυτή, οπότε θα είναι  $\alpha = 2$ . Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:  $y = 2x + \beta$  και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$  θα ισχύει  $1 = 2 \cdot 1 + \beta$  οπότε θα έχουμε  $\beta = -1$ . Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι  $y = 2x - 1$ .

4. Όπως είδαμε στην άσκηση 2, σε όλες τις περιπτώσεις η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης, οπότε έχει εξίσωση της μορφής  $y = \alpha x + \beta$ .

i) Επειδή  $\alpha = 1$ , η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής  $y = x + \beta$  και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  θα ισχύει  $2 = 1 + \beta$  οπότε θα είναι  $\beta = 1$ . Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι  $y = x + 1$ .

ii) Επειδή  $\alpha = -1$ , η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής  $y = -x + \beta$  και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  θα ισχύει  $2 = -1 + \beta$  οπότε θα είναι  $\beta = 3$ . Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = -x + 3$ .

iii) Επειδή  $\alpha = 0$ , η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής  $y = \beta$  και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(2, 1)$ , η ζητούμενη εξίσωση είναι  $y = 1$ .

iv) Επειδή  $\alpha = -2$ , η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής  $y = -2x + \beta$  και επειδή διέρχεται από το σημείο  $A(1, 3)$  θα ισχύει  $3 = -2 + \beta$  οπότε θα είναι  $\beta = 5$ . Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = -2x + 5$ .

5. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής  $C = \alpha \cdot F + \beta$  επειδή το νερό παγώνει στους  $0^{\circ}\text{C}$  ή στους  $32^{\circ}\text{F}$ , θα ισχύει  $0 = \alpha \cdot 32 + \beta$ . (1)

Επειδή, επιπλέον, το νερό βράζει στους  $100^{\circ}\text{C}$  ή στους  $212^{\circ}\text{F}$ , θα ισχύει  $100 = \alpha \cdot 212 + \beta$ . (2)

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε  $100 = \alpha \cdot 180$ , οπότε

$$\alpha = \frac{5}{9} \text{ και επομένως } \beta = -\frac{5}{9} \cdot 32. \text{ Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι}$$

$$C = \frac{5}{9} F - \frac{5}{9} \cdot 32 \Leftrightarrow C = \frac{5}{9} (F - 32).$$

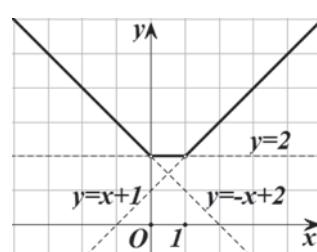
Αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον αριθμό  $T$ , τότε θα ισχύει

$$T = \frac{5}{9} (T - 32) \Leftrightarrow 9T = 5T - 5 \cdot 32 \Leftrightarrow 4T = -5 \cdot 32 \Leftrightarrow T = -40.$$

Άρα οι  $-40^{\circ}\text{F}$  αντιστοιχούν στους  $-40^{\circ}\text{C}$ .

6. Η γραφική παράσταση της  $f$  αποτελείται:

- ✓ Από το τμήμα της ευθείας  $y = -x + 2$  του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη  $x \in (-\infty, 0]$ .
- ✓ Από το τμήμα της ευθείας  $y = 2$  του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη  $x \in [0, 1]$  και



- ✓ Από το τμήμα της ευθείας  $y = x + 1$  του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη  $x \in [1, +\infty)$ .

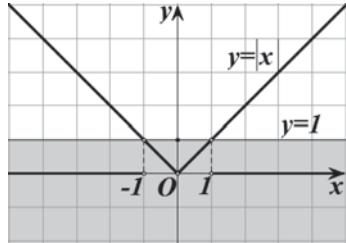
7. i) Οι ρίζες εξίσωσης  $f(x) = 1$  είναι οι τετμημένες κοινών σημείων της  $y = f(x)$  και της ευθείας  $y = 1$ , δηλαδή οι αριθμοί  $-1$  και  $1$ .

Οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = x$  είναι τετμημένες των κοινών σημείων της  $y = f(x)$  και της ευθείας  $y = x$ , δηλαδή οι αριθμοί  $-2, 0$  και  $1$ .

- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x) < 1$  είναι οι τετμημένες των σημείων της  $y = f(x)$  τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 1$ , δηλαδή οι αριθμοί  $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$ .

Οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \geq x$  είναι οι τετμημένες των σημείων της  $y = f(x)$  τα οποία βρίσκονται πάνω από την ευθεία  $y = x$  ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα σημεία  $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$ .

8. i) Οι γραφικές παραστάσεις των  $f(x) = |x|$  και  $g(x) = 1$  δίνονται στο διπλανό σχήμα.



- ✓ Οι λύσεις της ανίσωσης  $|x| \leq 1$  είναι οι τετμημένες των σημείων της  $y = |x|$  που βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 1$  ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα  $x \in [-1, 1]$ .

- ✓ Οι λύσεις ανίσωσης  $|x| > 1$  είναι οι τετμημένες των σημείων της  $y = |x|$  που βρίσκονται πάνω από την ευθεία  $y = 1$ , δηλαδή τα  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

- ii) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι για  $\rho > 0$  ισχύει

$$|x| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x \leq \rho.$$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho.$$

Επομένως

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1.$$

## B' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι

$$f(-6) = 1, f(-5) = \frac{1}{2}, f(-4) = 0, f(-3) = -\frac{1}{2}, f(-2) = -1, f(-1) = 0.$$

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 0, f(4) = -1, f(5) = -2.$$

- ii) Οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = a$  είναι οι τετμημένες του σημείου της  $C_f$  που έχουν τεταγμένη  $a$ . Επομένως

- ✓ Οι ρίζες της  $f(x) = 0$  είναι οι αριθμοί  $-4, -1$  και  $3$ .

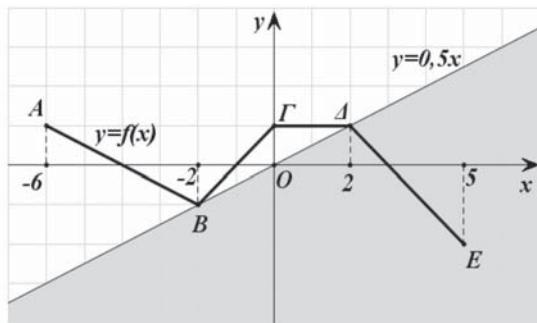
- ✓ Οι ρίζες της  $f(x) = -1$  είναι οι αριθμοί  $-2$  και  $4$ .

- ✓ Οι ρίζες της  $f(x) = 1$  είναι ο αριθμός  $-6$  και όλοι οι αριθμοί του κλειστού διαστήματος  $[0, 2]$ .

iii) Η ευθεία  $B\Delta$  είναι εξίσωση της μορφής  $y = ax + \beta$  και επειδή διέρχεται από τα σημεία  $B(-2, -1)$  και  $\Delta(2, 1)$  θα ισχύει  $-1 = a(-2) + \beta$  και  $1 = a \cdot 2 + \beta$ .

Οπότε, με πρόσθεση των εξισώσεων αυτών κατά μέλη, βρίσκουμε ότι  $\beta = 0$  και επομένως θα έχουμε  $a = 0,5$ .

Άρα η εξίσωση της ευθείας  $B\Delta$  θα είναι η  $y = 0,5x$ .

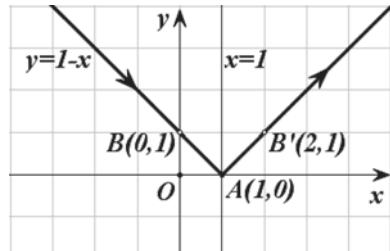


Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \leq 0,5x$  είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται κάτω από την ευθεία  $y = 0,5x$ , ή πάνω σ' αυτή. Είναι δηλαδή όλα τα  $x \in [2, 5] \cup \{-2\}$ .

2. Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο  $A(1, 0)$  και η ανακλωμένη είναι συμμετρική της ημιευθείας  $AB$  (σχ.) ως προς άξονα την ευθεία  $x = 1$ .

Επομένως, η ανακλώμενη θα είναι η ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 0)$  και  $B'(2, 1)$ , όπου  $A$  η αρχή της.

Αν  $y = ax + \beta$ ,  $x \geq 1$  είναι η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας, τότε αυτή θα επαλυθεύεται από τα ζεύγη  $(1, 0)$  και  $(2, 1)$ . Δηλαδή θα ισχύουν  $0 = a + \beta$  και  $1 = 2a + \beta$ , από τις οποίες βρίσκουμε  $a = 1$  και  $\beta = -1$ . Επομένως η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας είναι:  $y = x - 1$ ,  $x \geq 1$ .

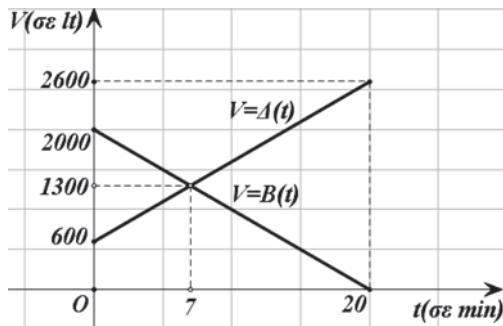


3. i) α) Αν  $B(t)$  είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στο βυτιοφόρο κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , τότε θα ισχύει  $B(t) = 2000 - 100t$  και επειδή πρέπει  $B(t) \geq 0$  θα ισχύει  $2000 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 20$ .

Επομένως, θα έχουμε  $B(t) = 2000 - 100t$ ,  $0 \leq t \leq 20$ .

- β) Αν  $\Delta(t)$  είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , τότε θα ισχύει  $\Delta(t) = 600 + 100t$ ,  $0 \leq t \leq 20$ .

- ii) Οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω συνάρτησης είναι τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος. Η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο ποσότητες είναι ίσες είναι η λύση της εξίσωσης  $B(t) = \Delta(t)$ , η οποία γράφεται  $2000 - 100t = 600 + 100t \Leftrightarrow 200t = 1400 \Leftrightarrow t = 7$ .  
Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η  $t = 7\text{min}$ .

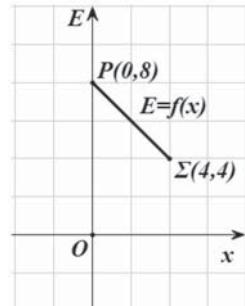


4. Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου  $\triangle MGD$  αφαιρούμε από το εμβαδόν του τραπεζίου  $ABG\Delta$  το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων τριγώνων  $\triangle AMD$  και  $\triangle BMG$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} E_{M\bar{G}\Delta} &= E_{ABG\Delta} - E_{AM\bar{D}} - E_{BM\bar{G}} \\ &= \frac{4+2}{2} \cdot 4 - \frac{x \cdot 4}{2} - \frac{(4-x) \cdot 2}{2} \\ &= 12 - 2x - (4-x) = -x + 8. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  
 $f(x) = -x + 8$ , με  $0 \leq x \leq 4$ .

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι το ευθυγράμμα με άκρα τα σημεία  $P(0, 8)$  και  $\Sigma(4, 4)$ .



5. i) Το ευθυγράμμα  $k_1$  έχει εξίσωση της μορφής  $h = \alpha t + \beta$  και επειδή διέρχεται από τα σημεία  $A(3, 0)$  και  $\Gamma(0, 20)$  θα ισχύει  $0 = 3\alpha + \beta$  και  $20 = \beta$ ,

οπότε θα είναι  $\alpha = -\frac{20}{3}$  και  $\beta = 20$ . Επομένως, το ευθυγράμμα  $k_1$  έχει εξίσωση

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Άρα η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού  $K_1$  είναι η

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20, \quad 0 \leq t \leq 3. \quad (1)$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού  $K_2$  είναι η

$$h_2(t) = -5t + 20, \quad 0 \leq t \leq 4. \quad (2)$$

ii) Το κερί  $k_2$  είχε διπλάσιο ύψος από το κερί  $k_1$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει  $h_2(t) = 2h_1(t)$ . Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} h_2(t) = 2h_1(t) &\Leftrightarrow -\frac{20}{4}t + 20 = 2 \left( -\frac{20}{3}t + 20 \right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2 \left( -\frac{1}{3}t + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = -\frac{2}{3}t + 2 \Leftrightarrow -3t + 12 = -8t + 24 \\ &\Leftrightarrow 5t = 12 \Leftrightarrow t = 2,4. \end{aligned}$$

Άρα, το  $k_2$  είχε το διπλάσιο ύψος από το  $k_1$  τη χρονική στιγμή  $t = 2,4$ h.

iii) Αν εργαστούμε όπως στο ερώτημα i) θα βρούμε ότι

$$h_1(t) = -\frac{v}{3}t + v, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

$$h_2(t) = -\frac{v}{4}t + v, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

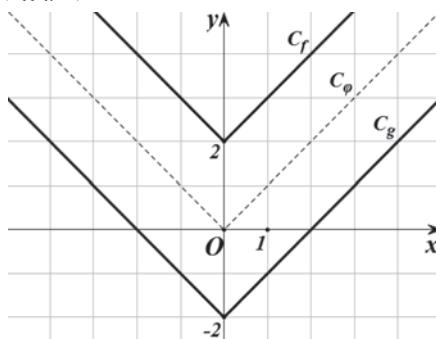
$$\begin{aligned} \text{οπότε, } h_2(t) = 2h_1(t) &\Leftrightarrow -\frac{v}{4}t + v = 2 \left( -\frac{v}{3}t + v \right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2 \left( -\frac{1}{3}t + 1 \right) \Leftrightarrow t = 2,4. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το  $k_2$  θα έχει διπλάσιο ύψος από το  $k_1$  τη χρονική στιγμή  $t = 2,4$ h, ανεξάρτητα του αρχικού ύψους υ των κεριών  $k_1$  και  $k_2$ .

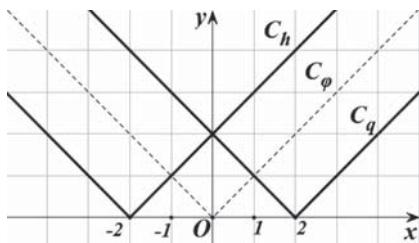
#### § 6.4. Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

##### A' ΟΜΑΔΑΣ

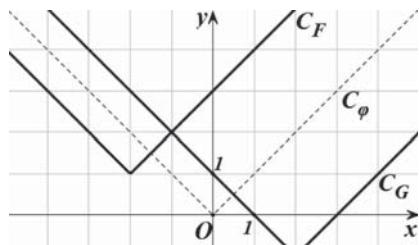
- Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της  $\varphi(x) = |x|$ , αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών  $x \hat{\wedge} Oy$  και  $x' \hat{\wedge} Oy$ . Η γραφική παράσταση της  $f(x) = |x| + 2$  προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της  $y = |x|$ , κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της  $f(x) = |x| - 2$  προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της  $y = |x|$ , κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της  $h(x) = |x + 2|$  προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της  $y = |x|$ , κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της  $q(x) = |x - 2|$  προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της  $y = |x|$ , κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).

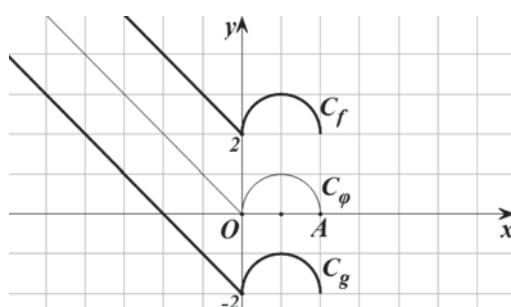


3. Αρχικά χαράσσουμε την  $y = |x + 2|$ , που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της  $y = |x|$  κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την  $y = |x + 2| + 1$ , που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $y = |x + 2|$  κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της  $F(x) = |x + 2| + 1$  προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της  $y = |x|$ , μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (σχήμα).

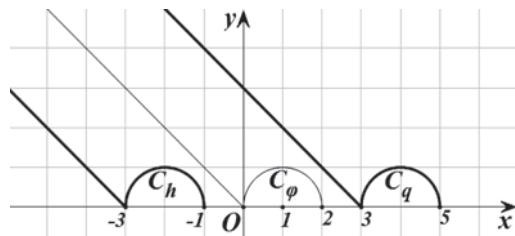


Ομοίως, η γραφική παράσταση της  $G(x) = |x - 2| - 1$ , προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της  $y = |x|$ , μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

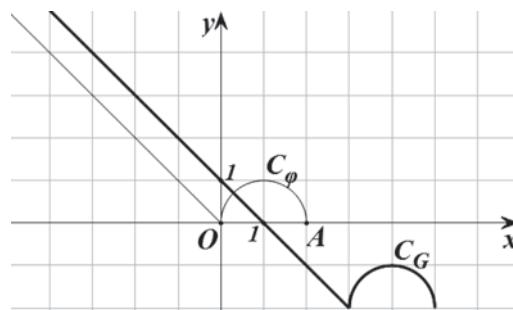
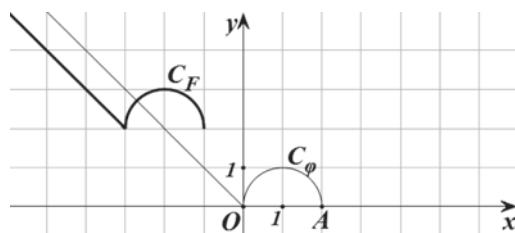
4. i)



ii)



iii)



5. i)  $f(x) = 2(x - 2)^2 - 1 + 1 = 2(x - 2)^2$ .  
 ii)  $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1 - 2 = 2(x - 3)^2 - 3$ .  
 iii)  $f(x) = 2(x + 2)^2 - 1 + 1 = 2(x + 2)^2$ .  
 iv)  $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1 - 2 = 2(x + 3)^2 - 3$ .

### § 6.5. Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης

#### A' ΟΜΑΔΑΣ

- H f είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .  
 • H g είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 2]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$ .  
 • H h είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, -1]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[-1, 0]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

2. • H f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = 1$ , το  $f(1) = -1$  και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.  
 • H g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.  
 • H h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = -1$  και για  $x = 1$  το  $h(-1) = h(1) = -2$ , ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
3. i) Αρκεί να δείξουμε τα  $f(x) \geq f(3)$ . Έχουμε  
 $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0$ , που ισχύει.
- ii) Αρκεί να δείξουμε ότι  $g(x) \leq g(1)$ . Έχουμε  
 $g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2$ , που ισχύει.
4. i) H  $f_1$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$ , άρα η  $f_1$  είναι άρτια.
- ii) H  $f_2$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$ , άρα η  $f_2$  είναι άρτια.
- iii) H  $f_3$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_3(-x) = |-x + 1|$ , οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού  
 $f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$ .
- iv) H  $f_4$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)$ , άρα η  $f_4$  περιττή.
- v) H  $f_5$  έχει πεδίο ορισμού το  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η  $f_5$  δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.  
 $f_5(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$ , άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.
- vi) H  $f_6$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f_6(x)$ , άρα  $f_6$  είναι περιττή.
5. i) H  $f_1$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  
 $f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x)$ .  
 Άρα η  $f_1$  είναι άρτια.
- ii) H  $f_2$  έχει πεδίο ορισμού το  $[2, +\infty)$  που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

- iii) Η  $f_3$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  
 $f_3(-x) = |-x - 1| - |-x + 1| = |x + 1| - |x - 1| = -f_3(x)$ .  
 Άρα η  $f_3$  είναι περιττή.

- iv) Η  $f_4$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^*$  και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

- v) Η  $f_5$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και είναι άρτια, διότι  $f_5(-x) = f_5(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

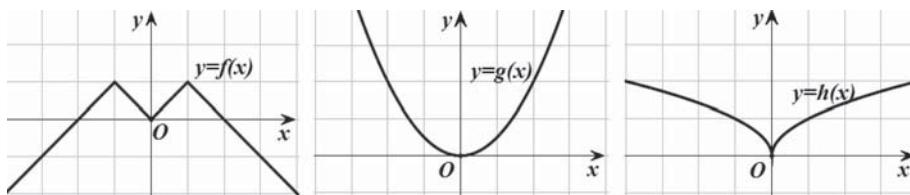
- vi) Η  $f_6$  έχει πεδίο ορισμού το  $[-1, 1]$  και είναι άρτια, διότι  $f_6(-x) = f_6(x)$ , για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .

6. i) Η  $C_f$  έχει κέντρο συμμετρίας το  $O(0, 0)$ . Άρα η  $f$  είναι περιττή.  
 ii) Η  $C_g$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'$ . Άρα η  $g$  είναι άρτια.  
 iii) Η  $C_h$  δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον  $y'$ , ούτε κέντρο συμμετρίας το  $O(0, 0)$ . Άρα η  $h$  δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

7. Ομοίως

- i) Η  $f$  είναι άρτια.  
 ii) Η  $g$  είναι περιττή.  
 iii) Η  $h$  δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. a) Παίρνουμε τις συμμετρικές των  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  ως προς την αρχή των ξενώνων.



- β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  ως προς την αρχή των ξενώνων.

