ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 5.1. Ακολουθίες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) 3, 5, 7, 9, 11 ii) 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30 iv) 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, –0,1, 0,01, –0,001, 0,0001 vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}$

vii) 4, 3, 2, 1, 0 viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) 2, 1, $\frac{8}{9}$, 1, $\frac{32}{25}$ x) 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

xi) 1, –1, 1, –1, 1.

2. i) 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2 ii) 0, 1, 2, 5, 26

iii) 3, 4, 6, 10, 18.

3. i) Έχουμε $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (\nu + 1) + 5 - \nu - 5 = 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu. \end{cases}$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu. \end{cases}$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 1 = 2 \cdot 2^\nu - 1 = 2 \cdot (1 + \alpha_\nu) - 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1. \end{cases}$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) + 3 - 5\nu - 3 = 5$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu \end{cases}$

4. i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = \alpha_1 + 2$
$\alpha_3 = \alpha_2 + 2$
....
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2$

Προσθέτουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:

$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)2$ ή $\alpha_\nu = 2\nu - 1$.

ii) $\alpha_1 = 3$
$\alpha_2 = 5\alpha_1$
$\alpha_3 = 5\alpha_2$
....
$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1}$.

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:
$\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§ 5.2. Αριθμητική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 7 + (\nu - 1) \cdot 3 = 3\nu + 4$ ii) $\alpha_\nu = 11 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 9$ iii) $\alpha_\nu = 5 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$ v) $\alpha_\nu = -6 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu - 3$.

2. i) $\alpha_{15} = -2 + (15 - 1) \cdot 5 = 68$ ii) $\alpha_{20} = 11 + (20 - 1) \cdot 7 = 144$ iii) $\alpha_{30} = 4 + (30 - 1) \cdot 11 = 323$

iv) $\alpha_{35} = 17 + (35 - 1) . 8 = 289$ v) $\alpha_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{101}{3}$ vi) $\alpha_{47} = \frac{1}{2} + (47 - 1) \cdot \frac{3}{4} = 35$.

3. i) Έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega$, επομένως $\alpha_1 + 5\omega = 12$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$, επομένως $\alpha_1 + 9\omega = 16$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases}$

βρίσκουμε $\boldsymbol{\omega = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha_1 = 7}$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 4} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = -2}.$$

iii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\omega = 3} \text{ και } \boldsymbol{\alpha_1 = 14}.$$

4. i) Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega = -2 \end{cases}$

από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε ότι

$$\omega = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{ και } \alpha_1 = -6{,}2$$

Άρα $\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\omega = -6{,}2 + 49 \cdot 0{,}3 = 8{,}5$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega = 145 \end{cases}$

οπότε $\omega = 6$ και $\alpha_1 = 19$

Άρα $\alpha_{18} = \alpha_1 + 17\omega = 19 + 17 \cdot 6 = \mathbf{121}$.

5. i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$97 = 2 + (\nu - 1)5 \iff 2 + (\nu - 1)5 = 97$$
$$\iff 5\nu = 100 \iff \nu = 20.$$

Επομένως ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}, δηλαδή ο 20ος.

ii) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$-97 = 80 + (\nu - 1)(-3) \iff 80 + (\nu - 1)(-3) = -97$$
$$\iff -3\nu = -180 \iff \nu = 60$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο $\boldsymbol{\alpha_{60}}$.

6. i) $\dfrac{10 - 40}{2} = \dfrac{-30}{2} = \mathbf{-15}$

ii) $\dfrac{(5x + 1) + 11}{2} = 3x - 2 \iff 5x + 12 = 6x - 4 \iff -x = -16 \iff \mathbf{x = 16}$.

7. Αν είναι x ο μεγαλύτερος αριθμός και y ο μικρότερος τότε ισχύει:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \dfrac{x + y}{2} = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι **x = 30** και **y = 20**.

8. i) Έχουμε $\alpha_1 = 7$, $\omega = 9 - 7 = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 7 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 92 = \mathbf{1840}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 0$, $\omega = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 0 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 78 = \mathbf{1560}$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 6$, $\omega = 4$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 6 + (40 - 1) \cdot 4] = 20 \cdot 168 = \mathbf{3360}$$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = 5$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot (-7) + (40 - 1) \cdot 5] = 20 \cdot 181 = \mathbf{3620}.$$

9. i) Έχουμε $\alpha_1 = 2$, $\omega = -3$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot 2 + (80 - 1)(-3)] = 40 \cdot (-233) = \mathbf{-9320}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (80 - 1) \cdot \frac{2}{3}] = 40 \cdot 52 = \mathbf{2080}.$$

10. Καθένα από τα αθροίσματα είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.

i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_\nu = 197$ και $\omega = 4$.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ οπότε $197 = 1 + (\nu - 1) \cdot 4$ ή $\nu = 50$.

Επομένως

$$S = \frac{\nu}{2} (\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{50}{2} (1 + 197) = \mathbf{4950}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 9$, $\omega = 3$, $\alpha_\nu = 90$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $90 = 9 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 28$.

Επομένως

$$S_{28} = \frac{28}{2} (9 + 90) = 14 \cdot 99 = \mathbf{1386}.$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = -3$, και $\alpha_\nu = -109$. Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $-109 = -7 + (\nu - 1)(-3)$ ή $\nu = 35$.

Επομένως

$$S_{35} = \frac{35}{2} (-7 - 109) = \frac{35}{2} . (-116) = \mathbf{-2030}.$$

11. i) Έχουμε $\alpha_1 = 4$, $\omega = 4$ και $S_\nu = 180$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$, έχουμε

$$\begin{aligned} 180 = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 4 + (\nu - 1) \cdot 4] \quad &\Leftrightarrow \quad 180 = \frac{\nu}{2}(4\nu + 4) \\ &\Leftrightarrow \quad 4\nu^2 + 4\nu = 360 \\ &\Leftrightarrow \quad \nu^2 + \nu - 90 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \nu = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{N}^*$, έπεται ότι $\mathbf{\nu = 9}$. Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $S_\nu = 180$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $\mathbf{\nu = 8}$.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 53$, $\omega = -2$ και $\nu = 15$.

Επομένως $\alpha_{15} = 53 + (15 - 1)(-2) = 53 - 28 = \mathbf{25}$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(25 + 53) = \frac{15}{2} \cdot 78 = \mathbf{585}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 12 - 4(\nu + 1) - 12 + 4\nu$
$= 12 - 4\nu - 4 - 12 + 4\nu = -4$.

Επομένως $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 4$ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\mathbf{-4}$ και $\alpha_1 = 12 - 4 \cdot 1 = \mathbf{8}$.

2. i) Οι περιττοί αριθμοί είναι οι 1, 3, 5, 7 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.

Έχουμε $\alpha_{200} = 1 + (200 - 1) \cdot 2 = 399$, οπότε

$$S_{200} - \frac{200}{2} \cdot (1 + 399) = 100 \cdot 400 = \mathbf{40000}.$$

ii) Οι άρτιοι αριθμοί είναι οι 2, 4, 6, 8 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$.

Έχουμε $\alpha_{300} = 2 + (300 - 1)2 = 600$, οπότε

$$S_{300} - \frac{300}{2} \cdot (2 + 600) = 150 \cdot 602 = \mathbf{90300}.$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το 17 + 19 + ... + 379 και οι προσθετέοι του, με τη σειρά που είναι γραμμένοι, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 17$, $\omega = 2$ και $\alpha_\nu = 379$.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε $379 = 17 + (\nu - 1)2$ ή $\nu = 182$.
Επομένως

$$S_{182} - \frac{182}{2}(17 + 379) = 91 \cdot 396 = \mathbf{36036}.$$

3. i) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $5 + 10 + 15 + ... + 195$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $\alpha_\nu = 195$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $195 = 5 + (\nu - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow \nu = 39$.
Επομένως

$$S_{39} = \frac{39}{2}(5 + 195) = 39 \cdot 100 = \mathbf{39000}.$$

ii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $12 + 15 + ... + 198$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 12$, $\omega = 3$ και $\alpha_\nu = 198$.
Από το τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε $198 = 12 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 63$.
Επομένως

$$S_{63} = \frac{63}{2}(12 + 198) = \frac{63}{2} \cdot 210 = 63 \cdot 105 = \mathbf{6615}.$$

4. i) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) - 4 - 5\nu + 4 = 5$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$, $\omega = 5$ και $\alpha_{30} = 5 \cdot 30 - 4 = 146$, οπότε

$$S_{30} = \frac{30}{2}(1 + 146) = 15 \cdot 147 = \mathbf{2205}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5(\nu + 1) - 3 + 5\nu + 3$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5$.
Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5 \cdot 1 - 3 = -8$, $\omega = -5$ και $\alpha_{40} = -5 \cdot 40 - 3 = -203$, οπότε

$$S_{40} = \frac{40}{2}(-8 - 203) = 20 \cdot (-201) = \mathbf{-4220}.$$

5. Πρέπει από το άθροισμα $1 + 2 + 3 + ... + 200$ να αφαιρέσουμε το άθροισμα $4 + 8 + 12 + ... + 200$ των πολλαπλασίων του 4 και το άθροισμα $9 + 18 + 27 + ... + 198$ των πολλαπλασίων του 9.
Όμως στα πολλαπλάσια του 4 και του 9 περιέχονται και τα πολλαπλάσια του 36 που, με αυτόν τον τρόπο, αφαιρούνται δυο φορές. Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε μια φορά τα πολλαπλάσια του 36 για να βρούμε το πραγματικό άθροισμα. Επομένως
$S = (1 + 2 + 3 + ... + 200)(4 + 8 + 12 + ... + 200) - (9 + 18 + 27 + ... + 198 +$
$+ (36 + 72 + ... + 180)$.

Κατά τα γνωστά έχουμε:

$$1 + 2 + 3 + ... + 200 = \frac{200}{2}(1 + 200) = 100 \cdot 201 = 20100$$

$$4 + 8 + 12 + ... + 200 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 25 \cdot 204 = 5100$$

$$9 + 18 + ... + 198 = \frac{22}{2}(9 + 198) = 11 \cdot 207 = 2277$$

$$36 + 72 + ... + 180 = \frac{5}{2}(36 + 180) = \frac{5}{2} \cdot 216 = 5 \cdot 108 = 540$$

Άρα $S = 20100 - 5100 - 2277 + 540 = \mathbf{13263}$.

6. Το άθροισμα ν όρων της ακολουθίας είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \quad ή \quad S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2].$$

Πρέπει $S_\nu > 400 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] > 400$

$\Leftrightarrow \nu^2 > 400$

$\Leftrightarrow \nu > 20.$

7. Για την 1η γραμμή του πίνακα έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (12 - 1)(-10) = 120 - 110 = \mathbf{10}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{12}{2}(120 + 10) = 6 \cdot 130 = \mathbf{780}$.

Για την 2η γραμμή έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $109 = 5 + (27 - 1)\omega$ ή $\boldsymbol{\omega = 4}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{27}{2}(5 + 109) = \frac{27}{2} \cdot 114 = \mathbf{1539}$.

Για την 3η γραμμή έχουμε:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$ ή $210 = \frac{12}{2}[2\alpha_1 + 11 \cdot 3]$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = 1}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $\alpha_\nu = 1 + 11 \cdot 3$ ή $\boldsymbol{\alpha_\nu = 34}$.

Για την 4η γραμμή έχουμε:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $-8 = \alpha_1 + 15 \cdot 2$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -38}$.

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ ή $S_\nu = \frac{16}{2}(-38 - 8) = 8 \cdot (-46) = \mathbf{-368}$.

8. Τις πρώτες 12 ώρες το πλήθος των κτύπων είναι

$1 + 2 + 3 + ... + 12 = \frac{12}{2}(1 + 12) = 6 \cdot 13 = 78$, άρα συνολικά ακούγονται $2 \cdot 78 = 156$ κτυπήματα.

9. Το πλήθος των θέσεων κάθε σειράς καθισμάτων σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με $α_1 = 800$ και $α_{33} = 4160$. Επομένως, λόγω της $α_ν = α_1 + (ν - 1)ω$, είναι $4160 = 800 + (33 - 1) \cdot ω$ ή $ω = 105$. Το στάδιο έχει συνολικά:

$$S_{33} = \frac{33}{2}(800 + 4160) = \frac{33}{2} \cdot 4960 = 33 \cdot 2480 = \mathbf{81840} \text{ θέσεις.}$$

Η μεσαία σειρά, δηλαδή η 17η σειρά έχει

$$α_{17} = 800 + (17 - 1) \cdot 105 = 800 + 16 \cdot 105 = \mathbf{2480} \text{ θέσεις.}$$

10. Οι όροι της ακολουθίας διαδοχικά θα είναι

$$3, x_1, x_2, ..., x_{10}, 80$$

συνολικά 12 όροι.

Ισχύει $α_ν = α_1 + (ν - 1)ω$ ή $80 = 3 + 11ω$ ή $ω = 7$, οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73.

11. Έχουμε

$$1 + \frac{ν-1}{ν} + \frac{ν-2}{ν} + \frac{ν-3}{ν} + ... + \frac{1}{ν} = \frac{ν + (ν-1) + (ν-2) + ... + 1}{ν} =$$

$$= \frac{\frac{ν(ν+1)}{2}}{ν} = \mathbf{\frac{ν+1}{2}}.$$

12. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20€.

Το 2ο μέτρο θα κοστίσει 25€.

Το 3ο μέτρο θα κοστίσει 30€. κ.τ.λ.

Αν λοιπόν η γεώτρηση πάει ν μέτρα βάθος, τότε το συνολικό κόστος, σύμφωνα με τον τύπο $S_ν = \frac{(2α_1 + (ν-1)ω)ν}{2}$, θα είναι ίσο με:

$$S_ν = \frac{ν}{2}[2 \cdot 20 + (ν-1)5].$$

Πρέπει επομένως

$$\begin{aligned} \frac{ν}{2}[2 \cdot 20 + (ν-1)5] \leq 4.700 &\Leftrightarrow 20ν + 2{,}5ν(ν-1) \leq 4.700 \\ &\Leftrightarrow 8ν + ν(ν-1) \leq 1880 \\ &\Leftrightarrow ν^2 + 7ν - 1880 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (ν-40)(ν+47) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -47 \leq ν \leq 40 \end{aligned}$$

Άρα η γεώτρηση μπορεί να πάει 40m βάθος.

§ 5.3. Γεωμετρική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$, ii) $\alpha_\nu = \frac{2}{3} \cdot 3^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-2}$, iii) $\alpha_\nu = 9 \cdot 3^{\nu-1} = 3^{\nu+1}$,

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$, v) $\alpha_\nu = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{2^{\nu-5}}$,

vi) $\alpha_\nu = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{\nu-1}} = \frac{2}{3^{\nu-3}}$, vii) $\alpha_\nu = 1 \cdot (0{,}4)^{\nu-1} = 0{,}4^{\nu-1}$,

viii) $\alpha_\nu = (-2) \cdot (-2)^{\nu-1} = (-2)^\nu$, ix) $\alpha_\nu = (-3) \cdot (-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$.

2. i) $\alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^8 = 64$, ii) $\alpha_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458$, iii) $\alpha_8 = 729 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3}$,

iv) $\alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^9 = -512$, v) $\alpha_9 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^8}{2^8} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$.

3. i) $\frac{32}{3} = \alpha_1 \cdot 2^5$ ή $\alpha_1 = \frac{32}{3 \cdot 2^5} = \frac{1}{3}$,

ii) $\frac{27}{128} = \alpha_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ ή $\frac{3^3}{2^7} = \alpha_1 \cdot \frac{3^3}{2^6}$, άρα $\alpha_1 = \frac{1}{2}$.

4. i) $\begin{cases} 12 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \\ 96 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^5}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{96}{12}$ ή $\lambda^3 = 8$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

ii) $\begin{cases} \frac{8}{3} = \alpha_1 \cdot \lambda \\ \frac{64}{81} = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ή $\lambda^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, άρα $\boldsymbol{\lambda = \frac{2}{3}}$.

5. i) $\begin{cases} 125 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \\ \frac{125}{64} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^9}{\alpha_1\lambda^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, ή $\lambda^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, άρα $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε $125 = \alpha_1 \cdot \frac{1}{2^3}$ ή $\alpha_1 = 125 \cdot 2^3 = 1000$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{14} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1000}{8192}$.

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

ii) $\begin{cases} \sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12} \\ 32\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{22} \end{cases}$, άρα $\frac{\alpha_1\lambda^{22}}{\alpha_1\lambda^{12}} = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ή $\lambda^{10} = 2^5$ ή $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Για $\lambda = \sqrt{2}$ έχουμε $\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot 2^6$ ή $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2^6}$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2^6} \cdot 2^{10} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Για $\lambda = -\sqrt{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

6. Έστω α_ν ο όρος που ισούται με 768. Τότε $768 = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ ή $2^{\nu-1} = 256$ ή $2^{\nu-1} = 2^8$, οπότε $\nu - 1 = 8$, άρα $\boldsymbol{\nu = 9}$.

7. i) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 4 \cdot 2^{\nu-1}$.
Αν $4 \cdot 2^{\nu-1} > 2000$, τότε $2^{\nu+1} > 2000$. Έχουμε $2^{10} = 1024$ και $2^{11} = 2048$.
Άρα πρέπει $\nu + 1 > 10$ ή $\nu > 9$.
Επομένως ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 2000 είναι ο 10ος όρος.

ii) Ο νος όρος της προόδου είναι αν $= 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$.

Αν $128 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} < 0{,}25$, τότε $2^{\nu-1} > \frac{128}{0{,}25}$ ή $2^{\nu-1} > 512$.
Έχουμε $2^8 = 256$ και $2^9 = 512$.
Άρα πρέπει $\nu - 1 > 9$ ή $\nu > 10$.
Επομένως ο πρώτος όρος που είναι μικρότερος του 512 είναι ο 11ος.

8. i) $\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = \mathbf{10}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$.

ii) Ισχύει

$$(x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 23x + 76$$
$$\Leftrightarrow 25x = 75$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 3}.$$

9. i) $S_{10} = 1 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \mathbf{1023}$.

ii) $S_{10} = 3 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \dfrac{59048}{2} = 3 \cdot 29524 = \mathbf{88572}$.

iii) $S_{10} = -4 \cdot \dfrac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = -4 \cdot \dfrac{1023}{-3} = 4 \cdot 341 = \mathbf{1364}$.

10. i) Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε $8192 = 2 \cdot 4^{\nu-1}$ ή $4^{\nu-1} = 4096 = 4^6$, άρα $\nu - 1 = 6$ ή $\nu = 7$.

Επομένως $S_7 = 2 \cdot \dfrac{4^7 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \dfrac{16383}{3} = 2 \cdot 5461 = \mathbf{10922}$.

ii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε $\dfrac{1}{512} = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ ή

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \dfrac{1}{2048} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11}$, άρα $\nu - 1 = 11$ ή $\nu = 12$.

Επομένως

$$S_{12} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4096} - 1}{-\frac{1}{2}} \; 4 \cdot \frac{\frac{4095}{4096}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4095}{4096} = \frac{4095}{512} \approx 8.$$

iii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε $256 = 1 \cdot (-2)^{\nu-1}$ ή $(-2)^8 = (-2)^{\nu-1}$, άρα $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Επομένως

$$S_9 = 1 \cdot \frac{(-2)^9 - 1}{-2 - 1} = \frac{-513}{-3} = \mathbf{171}.$$

11. Έχουμε $\alpha_1 = 3$ και,

σε 1 ώρα	$\alpha_2 = 3 \cdot 2$
σε 2 ώρες	$\alpha_3 = 3 \cdot 2^2$
σε 3 ώρες	$\alpha_4 = 3 \cdot 2^3$ κτλ. και,
σε 12 ώρες	$\alpha_{13} = 3 \cdot 2^{12} = \mathbf{12288}$ βακτηρίδια.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 60$ και,

μετά την 1η αναπήδηση $\alpha_2 = 60 \cdot \dfrac{1}{3}$

μετά την 2η αναπήδηση $\alpha_3 = 60 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

μετά την 3η αναπήδηση $\alpha_4 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

μετά την 4η αναπήδηση $\alpha_5 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{81} = \frac{20}{27} \approx 0{,}74$m.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\frac{2^\nu}{3^{\nu+1}}} = \frac{2^{\nu+1} \cdot 3^{\nu+1}}{2^\nu \cdot 3^{\nu+2}} = \frac{2}{3}$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \frac{2}{3}$.

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \mathbf{\frac{2}{3}}$ και $\alpha_1 = \mathbf{\frac{2}{9}}$.

2. Πρέπει

$$\left(\sqrt[4]{10\nu+4}\right)^2 = \sqrt{\nu-5} \cdot \sqrt{\nu+2} \Leftrightarrow \sqrt{10\nu+4} = \sqrt{(\nu-5)(\nu+2)}$$
$$\Leftrightarrow (\nu-5)(\nu+2) = 10\nu+4$$
$$\Leftrightarrow \nu^2 - 13\nu - 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{13 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{13 \pm 15}{2} = \begin{cases} 14 \\ -1 \end{cases}$$

Με δοκιμή βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή **ν = 14** είναι δεκτή.

3. i) Έστω μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ. Τότε οι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1, \quad \alpha_1\lambda, \quad \alpha_1\lambda^2, \quad \alpha_1\lambda^3, \quad ..., \quad \alpha_1\lambda^\nu, \quad ...$$

και τα τετράγωνα των όρων αυτών είναι:

$$\alpha_1^2, \quad \alpha_1^2\lambda^2, \quad \alpha_1^2\lambda^4, \quad \alpha_1^2\lambda^6, \quad ... \quad \alpha_1^2\lambda^{2\nu}.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^2 και λόγο λ^2.

ii) Αν υψώσουμε τους όρους της προόδου στην k έχουμε:

$$\alpha_1^k, \quad \alpha_1^k\lambda^k, \quad \alpha_1^k\lambda^{2k}, \quad \alpha_1^k\lambda^{3k}, \quad ... \quad \alpha_1^k\lambda^{\nu k}$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^k και λόγο λ^k.

4. i) Έχουμε $\alpha_1 + \alpha_1\lambda = 3 + \sqrt{3}$ (1) και $\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 4(3 + \sqrt{3})$ (2).

Οι (1) και (2) σχηματίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda+1) = 3+\sqrt{3} \\ \alpha_1(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1) = 4(3+\sqrt{3}). \end{cases}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος προκύπτει

$$\begin{aligned} \lambda^3+\lambda^2-3\lambda-3=0 &\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda+1)-3(\lambda+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2-3)=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=\sqrt{3} \text{ ή } \lambda=-\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές του λ στην (1) και έχουμε

Για $\lambda=-1$, $\quad \alpha_1\cdot 0 = 3+\sqrt{3}$ (αδύνατο)

Για $\lambda=\sqrt{3}$, $\quad \alpha_1(\sqrt{3}+1) = 3+\sqrt{3}$ ή $\alpha_1=\sqrt{3}$

Για $\lambda=-\sqrt{3}$, $\quad \alpha_1(1-\sqrt{3}) = 3+\sqrt{3}$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -(3+2\sqrt{3})}$.

5. Έχουμε $\alpha_1\lambda+\alpha_1\lambda^5 = 34 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda(\lambda^4+1)=34$ (1)

και $\alpha_1\lambda^2+\alpha_1\lambda^6 = 68 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2(\lambda^4+1)=68$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $\lambda=2$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha_1=1$.

Άρα $$S_{10} = 1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1} = 1024-1 = \mathbf{1023}.$$

6. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια από σήμερα, τότε τον επόμενο χρόνο, δηλαδή ύστερα από ν + 1 χρόνια από σήμερα, θα είναι (σε εκατομμύρια).

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \frac{2}{100}\cdot\alpha_\nu = 1{,}02\cdot\alpha_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = 1{,}02\cdot\alpha_\nu}.$$

Επειδή $\alpha_1 = 90\cdot 1{,}02$ και $\alpha_{\nu+1} = 1{,}02\cdot\alpha_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $\alpha_1 = 90\cdot1{,}02$ και λόγο $\lambda = 1{,}02$, επομένως

$$\alpha_\nu = 90\cdot1{,}02\cdot1{,}02^{\nu-1} \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_\nu = 90\cdot1{,}02^\nu}.$$

Ύστερα από 10 χρόνια ο πλυθυσμός της χώρας θα είναι

$$\alpha_{10} = 90\cdot1{,}02^{10} \approx 90\cdot1{,}22 \text{ ή } 109800000 \text{ κάτοικοι.}$$

7. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός αφού διέλθει μέσα από ν φίλτρα, τότε η έντασή του αφού διέλθει και μέσα από το επόμενο φίλτρο, δηλαδή αφού διέλθει συνολικά μέσα από ν + 1 φίλτρα θα είναι

$$I_{\nu+1} = I_\nu - \frac{10}{100}I_\nu = 0{,}9I_\nu.$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$$I_{\nu+1} = 0{,}9\cdot I_\nu.$$

Επειδή $I_1 = I_0 \cdot 0{,}9$ και $I_{\nu+1} = 0{,}9 \cdot I_\nu$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $I_0 \cdot 0{,}9$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$ ή

$$\mathbf{I_\nu = I_0 \cdot 0{,}9^\nu}.$$

Για $\nu = 10$ έχουμε $I_{10} = I_0 \cdot 0{,}9^{10} \approx 0{,}35 \cdot I_0$.

8. i) Οι 11 ενδιάμεσοι τόνοι με τους δύο ακραίους C΄ και **C″** θα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 261$ και $\alpha_{13} = 522$.

Επειδή $\alpha_{13} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12}$ έχουμε $522 = 261 \cdot \lambda^{12}$ και επομένως $\boldsymbol{\lambda = \sqrt[12]{2}}$.

ii) Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 261 \cdot \boldsymbol{\sqrt[12]{2^5}}$.

9. i) Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμόσουμε τη διαδικασία ν φορές, τότε η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία μια ακόμα φορά, δηλαδή ν + 1 συνολικά φορές θα είναι

$$D_{\nu+1} = D_\nu - \frac{D_\nu}{40} \cdot 4 = D_\nu - 0{,}1 \cdot D_\nu = (1 - 0{,}1)D_\nu = 0{,}9D_\nu.$$

Επομένως $D_{\nu+1} = 0{,}9D_\nu$ και $D_1 = 36$ όσο το νερό που μένει την 1η φορά. Βλέπουμε ότι η ακολουθία D_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με $D_1 = 36$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $D_\nu = 36 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$.

ii) $D_7 = 36 \cdot 0{,}9^6 \approx 19{,}13$, οπότε η ποσότητα του αντιπυκτικού είναι περίπου $40 - 19{,}13 = \mathbf{20{,}87\ell}$.

10. Αφού διπλασιάζουμε κάθε φορά τον ρυθμό των κόκκων του ρυζιού έχουμε $\alpha_{\nu+1} = 2 \cdot \alpha_\nu$.
Επειδή στο 1ο τετραγωνάκι βάζουμε 1 κόκκο ρύζι έχουμε $\alpha_1 = 1$.
Επομένως η ακολουθία αν, είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$, άρα

$$\alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1} \quad \text{ή} \quad \alpha_\nu = 2^{\nu-1}.$$

Συνολικά σε όλα τα τετραγωνάκια πρέπει να μπουν

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \text{ κόκκοι ρύζι.}$$

Το ρύζι αυτό είναι περίπου σε κιλά

$$\frac{2^{64} - 1}{20000} \cong \frac{1{,}8447 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^4} = 0{,}9223 \cdot 10^{15} = 9{,}223 \cdot 10^{14} \text{ κιλα} = 9{,}223 \cdot 10^{11} \text{ τόνοι.}$$

11. i) Έχουμε $S_1 = 3$
$S_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$S_3 = 12 \cdot 4 = 48$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος προκύπτει από το πλήθος των πλευρών του προηγούμενου σχήματος με πολλαπλασιασμό επί 4. Επομένως $S_{\nu+1} = 4 \cdot S_\nu$, οπότε

$S_1 = 3$
$S_2 = 4S_1$
$S_3 = 4S_2$
....
$S_\nu = 4S_{\nu-1}$

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και έχουμε $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$

ii) Έχουμε $U_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$$U_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$U_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$U_{\nu+1} = U_\nu \cdot \frac{4}{3}.$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$.

§ 5.4. Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

1. $\alpha_5 = 5.000(1 + \frac{20}{100})^5 = 5.000 \cdot (1{,}05)^5 = 5.000 \cdot 1{,}27628 = 6381{,}4€.$

2. $\alpha_{10} = \alpha(1+\tau)^{10} \Leftrightarrow 50.000 = \alpha(1 + \frac{3}{100})^{10}$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}03^{10} = 50.000$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}34391 = 50.000$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{50}{1{,}34391} = 37.204{,}87€.$

3. $\alpha_5 = (1+\tau)^5 \Leftrightarrow 12.762 = 10.000(1+\tau)^5$

$\Leftrightarrow (1+\tau)^5 = \frac{12.762}{10.000}$

$\Leftrightarrow (1+\tau)^5 = 1{,}2762$

$\Leftrightarrow 1 + \tau = 1{,}05$

$\Leftrightarrow \tau = 0{,}05 = 5\%.$

4. $\sum = 5.000(1 + \frac{3}{100}) \cdot \frac{(1 + (3/100))^5 - 1}{3/100}$

$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{3/100}$

$= 5.000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{0{,}159274}{0{,}03} \approx 27.342{,}05€.$