5 ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Η έννοια της ακολουθίας

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 10000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με επιτόκιο 2%. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο οι τόκοι που θα αποδώσει το κεφάλαιο προστίθενται σε αυτό και το ποσό που προκύπτει ξανατοκίζεται για τον επόμενο χρόνο με το ίδιο επιτόκιο. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί όσα χρόνια θέλουμε. Επομένως, το κεφάλαιο των 10000 ευρώ θα γίνει:

Σε 1 χρόνο:
$10000 + 0{,}02 \cdot 10000 = 10000(1 + 0{,}02) = 10200$ ευρώ.

Σε 2 χρόνια:
$$10000 \cdot 1{,}02 + 0{,}02 \cdot (\, 10000 \cdot 1{,}02) = 10000\ 1{,}02 \cdot (1+0{,}02) = 10000 \cdot (1{,}02)^2 = 10404 \text{ ευρώ.}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το ποσό των 10000 ευρώ θα γίνει:
Σε 3 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^3$ ευρώ, σε 4 χρόνια $10000 \cdot (1{,}02)^4$ ευρώ κτλ. και σε ν χρόνια θα γίνει $10000 \cdot (1{,}02\,)^\nu$ ευρώ.
Έτσι έχουμε τον πίνακα:

Χρόνια: ν	1	2	3	...	ν	...
Κεφάλαιο σε ν χρόνια	$10000 \cdot 1{,}02$	$10000 \cdot (1{,}02)^2$	$10000 \cdot (1{,}02)^3$	...	$10000 \cdot (\,1{,}02)^\nu$	...

Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός ακέραιος ν αντιστοιχίζεται στον πραγματικό αριθμό $10000 \cdot (1{,}02)^\nu$.
Η παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,...,ν,... στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$.

Δηλαδή, $1\rightarrow \alpha_1$, $2 \rightarrow \alpha_2$, $3 \rightarrow \alpha_3$, ..., $\nu\rightarrow\alpha_\nu$, ... Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν). Παραδείγματα.

i) Η αντιστοίχιση $1\rightarrow 1^2$, $2\rightarrow 2^2$, ... $\nu\rightarrow\nu^2$, ... είναι η ακολουθία (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1^2$, δεύτερο όρο $\alpha_2=2^2$ κλπ. και γενικό όρο $\alpha_\nu = \nu^2$.

ii) Η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ έχει όρους: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3= -1$,...

iii) Η ακολουθία (α_ν) με ν-οστό όρο $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ έχει όρους: $\alpha_1 =1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}$, ...

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Στην ακολουθία $1^2, 2^2, 3^2, ..., \nu^2, ...$ ο γενικός της όρος $\alpha_\nu = \nu^2$ μας επιτρέπει να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της. Είναι π.χ. $\alpha_{20} = 20^2 = 400$, $\alpha_{100} = 100^2 = 10000$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και ακολουθίες που για το γενικό τους όρο είναι δύσκολο να βρεθεί ένας μαθηματικός τύπος.

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία (α_ν), της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 1, ο δεύτερος όρος είναι επίσης το 1 και κάθε άλλος όρος, από τον τρίτο και μετά, είναι ίσος με το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2=1, \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$$

Έχουμε:

$$\alpha_3 = 1 + 1 = 2, \quad \alpha_4 = 2 + 1 = 3, \quad \alpha_5 = 3 + 2 = 5, \quad \alpha_6 = 5 + 3 = 8, \quad \text{κτλ.}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρούμε τον οποιονδήποτε όρο της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (α_ν) είναι τελείως ορισμένη.

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$ λέγεται **αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

(i) Τον αναδρομικό της τύπο και

(ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

ΣΧΟΛΙΟ:

Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε έναν τύπο για το γενικό τους όρο ούτε έναν αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία εί-ναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο **Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους και τους 20ους όρους των ακολουθιών:**

i) $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 3$ **ii)** $\beta_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{2\nu - 1}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\alpha_1 = 2\cdot 1^2 - 3 = -1,\quad \alpha_2 = 2\cdot 2^2 - 3 = 5$

$\alpha_3 = 2\cdot 3^2 - 3 = 15,\quad \alpha_4 = 2\cdot 4^2 - 3 = 29$

και $\alpha_{20} = 2\cdot 20^2 - 3 = 797$

ii) Έχουμε $\beta_1 = \dfrac{(-1)^1}{2\cdot 1 - 1} = -1,\quad \beta_2 = \dfrac{(-1)^2}{2\cdot 2 - 1} = \dfrac{1}{3}$

$$\beta_3 = \frac{(-1)^3}{2\cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5},\quad \beta_4 = \frac{(-1)^4}{2\cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$$

και $\beta_{20} = \dfrac{(-1)^{20}}{2\cdot 20 - 1} = \dfrac{1}{39}$

2ο **Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$. Να βρεθούν οι πρώτοι τέσσερις όροι της ακολουθίας.**

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$\alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$
$$\alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 677$$

3º Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu+5$. Να οριστεί η ακολουθία αυτή και αναδρομικά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε
$$\begin{aligned}\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu &= [3(\nu+1)+5] - (3\nu+5)\\ &= 3\nu + 3 + 5 - 3\nu - 5\\ &= 3\end{aligned}$$

Άρα $\alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu$ που είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας.

Επειδή $\alpha_1 = 3\cdot 1 + 5 = 8$, η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\alpha_1 = 8 \quad \text{και} \quad \alpha_{\nu+1} = 3 + \alpha_\nu$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_\nu = 2\nu+1$ ii) $\alpha_\nu = 2^\nu$ iii) $\alpha_\nu = \nu^2+\nu$ iv) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2-1}{\nu+1}$

v) $\alpha_\nu = \left(-\frac{1}{10}\right)^{\nu-1}$ vi) $\alpha_\nu = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$ vii) $\alpha_\nu = |5-\nu|$ vii) $\alpha_\nu = \eta\mu\,\frac{\nu\pi}{4}$

ix) $\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu^2}$ x) $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{\nu}$ xi) $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$

2. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 2,\ \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{\alpha_\nu}$ ii) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 + 1$ iii) $\alpha_1 = 3,\ \alpha_{\nu+1} = 2(\alpha_\nu - 1)$

3. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:

i) $\alpha_\nu = \nu+5$ ii) $\alpha_\nu = 2^\nu$ iii) $\alpha_\nu = 2^\nu - 1$ iv) $\alpha_\nu = 5\nu+3$

4. Να βρείτε το $\nu^{\underline{o}}$ όρο των ακολουθιών:

i) $\alpha_1 = 1,\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$ ii) $\alpha_1 = 3,\ \alpha_{\nu+1} = 5\alpha_\nu$

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

— Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7,... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2**.

— Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, –5, –10,... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού –5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά –5**.

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.

Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν τον $\nu^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, ω και ν ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.
Επομένως

> Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
> $$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9, ..., η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 5 - 3 = 2$, ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1) \cdot 2$. Επομένως ο $20^{\text{ός}}$ όρος της είναι $\alpha_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$, ο $100^{\text{ός}}$ όρος της είναι $\alpha_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$ κτλ.

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega, \qquad \text{επομένως} \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta \quad \text{ή} \quad \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \qquad \text{ή} \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta,$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
> αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4,... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της

$$S_{100} = 1+2+3+...+98+99+100$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:
Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$\begin{array}{rl} S_{100} &= 1+2+3+...+98+99+100 \\ S_{100} &= 100+99+98+...+3+2+1 \\ \hline 2S_{100} &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1) \end{array}$$

ή $2S_{100} = 101+101+101+...+101+101+101$

ή $2S_{100} = 100 \cdot 101$, άρα $S_{100} = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι
> $$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Έχουμε: $S_\nu = \alpha_1+(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+2\omega) + ... + [\alpha_1+(\nu-2)\omega]+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

και $S_\nu = \alpha_\nu+(\alpha_\nu-\omega)+(\alpha_\nu-2\omega) + ... + [\alpha_\nu-(\nu-2)\omega]+[\alpha_\nu-(\nu-1)\omega]$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu) + ... + (\alpha_\nu+\alpha_1)+(\alpha_\nu+\alpha_1)$$

ή $2S_\nu = \nu(\alpha_1+\alpha_\nu)$. Άρα $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$

Επειδή $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, ο τύπος $S_\nu = \dfrac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ γράφεται:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να βρεθεί το άθροισμα 7+10+13 + ... + 157

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = 157$ και $\omega = 3$. Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος ν των προσθετέων. Από τον τύπο του $\nu^{\text{ου}}$ όρου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε

$$157 = 7+(\nu-1)3 \Leftrightarrow 7+(\nu-1)3 = 157$$
$$\Leftrightarrow 7+3\nu-3 = 157$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 153$$
$$\Leftrightarrow \nu = 51$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7 + 157) = 4182$$

2° Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου 52, 47, 42,... έχουν άθροισμα ίσο με 90;

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_1 = 52$, $\omega = 47 - 52 = -5$ και $S_\nu = 90$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$, έχουμε

$$90 = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 52 + (\nu - 1)(-5)] \Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(109 - 5\nu)$$
$$\Leftrightarrow 5\nu^2 - 109\nu + 180 = 0$$
$$\Leftrightarrow \nu = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad \nu = 20$$

Επειδή όμως $\nu \in \mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι $\nu = 20$. Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

3° Ο $10^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο $19^{\text{ος}}$ όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε $42 = \alpha_1 + \omega$ και $87 = \alpha_1 + 18\omega$.

Επομένως οι $α_1$ και ω είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} α_1 + 9ω = 42 \\ α_1 + 18ω = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι $α_1 = -3$ και $ω = 5$.

Επομένως

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{100}{2}[2(-3) + 99 \cdot 5] \\ &= 50(-6 + 495) \\ &= 24450 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $ν^{ο}$ όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13,... ii) 11, 13, 15,... iii) 5, 2, -1,...

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3,... v) – 6, – 9, – 12,...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον $α_{15}$ της – 2, 3, 8... ii) Τον $α_{20}$ της 11, 18, 25,... iii) Τον $α_{30}$ της 4, 15, 26,...

iv) Τον $α_{35}$ της 17, 25, 33,... v) Τον $α_{50}$ της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$,...

vi) Τον $α_{47}$ της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2,...

3. i) Αν ο $6^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο $10^{ος}$ όρος είναι 16, να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $α_5 = 14$ και $α_{12} = 42$

iii) Ομοίως, αν είναι $α_3 = 20$ και $α_7 = 32$.

4. i) Ο $5^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι –5 και ο $15^{ος}$ όρος της είναι –2. Να βρείτε τον $50^{ο}$ όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

5. i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;

6. i) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x + 1$ και 11 είναι ο $3x - 2$.

7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.

8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 9, 11,... ii) 0, 2, 4,.... iii) 6, 10, 14,...
iv) $-7, -2, +3,...$

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) $2, -1, -4,...$ ii) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, ...$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
i) $1+5+9+...+197$ ii) $9+12+15+...+90$ iii) $-7-10-13-...-109$

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;

i) 4, 8, 12,... ii) 5, 10, 15,...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12-4\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω.

2. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών, ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199,

ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:

i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = 5\nu-4$,

ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = -5\nu-3$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7,... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα α_1 ω, ν, α_ν και S_ν ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
120	–10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	–8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων].**

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-3}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}$

11. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: Το 1° μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

— Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2**.

— Στην ακολουθία 27, –9, 3, –1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί $-\frac{1}{3}$. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=-\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** $-\frac{1}{3}$.

Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος,** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\boldsymbol{\alpha_\nu \neq 0}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda}$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και το λόγο της λ, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το $\nu^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, λ και ν ως εξής:

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1\lambda \\
\alpha_3 &= \alpha_2\lambda \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2}\lambda \\
\alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1}\lambda
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

Επομένως

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, –6, 12, –24,... η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{-6}{3} = -2$, ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 \cdot (-2)^{\nu-1}$. Επομένως ο $5^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_5 = 3(-2)^4 = 48$, ο δέκατος όρος της είναι $\alpha_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$ κτλ.

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta}=\lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \beta^2=\alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, $\gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27,... στην οποία είναι $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 3$, και ας βρούμε το άθροισμα S_7 των 7 πρώτων όρων της.
Έχουμε

$$S_7 = 1+3+9+27+81+243+729 \qquad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμα τους ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ=3 και έχουμε

$$3S_7 = 3+9+27+81+243+729+2187 \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\begin{aligned} 3S_7 - S_7 &= 2187-1 \\ 2S_7 &= 2186 \\ S_7 &= 1093 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι
> $$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \bullet\bullet\bullet + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$

ή $$(\lambda-1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι λ=1, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο **Να βρεθεί ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $4^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{3}{4}$ και ο $9^{\text{ος}}$ όρος της είναι $-\frac{3}{128}$**

ΛΥΣΗ

Έστω α_1 ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της. Τότε έχουμε:

$$\alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_1\lambda^{9-1} = \alpha_1\lambda^8 = -\frac{3}{128}$$

Επομένως

$$\frac{\alpha_1\lambda^8}{\alpha_1\lambda^3} = \left(-\frac{3}{128}\right):\frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην $\alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$ και έχουμε

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4} \quad ή \quad \alpha_1=-6$$

Άρα ο $ν^{ος}$ όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$, είναι $\alpha_\nu=(-6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$

2ο Να υπολογιστεί το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{256}$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\lambda=\frac{1}{2}$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $S_\nu=\alpha_1\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$, πρέπει να ξέρουμε το πλήθος ν των όρων.

Από τον τύπο όμως του $ν^{ου}$ όρου $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε:

$\frac{1}{256}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ και επομένως $\nu-1=8$ ή $\nu=9$.

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_9=1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}}=\frac{1022}{512}=\frac{511}{256}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $ν^{ο}$ όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) 3, 6, 12, ...	ii) $\frac{2}{3}$, 2, 6,...	iii) 9, 27, 81, ...
iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$	v) 16', 8, 4, ...	vi) 18, 6, 2, ...
vii) 1, 0,4, 0,16, ...	vii) –2, 4, –8, ...	ix) –3, 9, –27, ...

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ ii) Τον α_7 της $2, 6, 18, \ldots$

iii) Τον α_8 της $729, 243, \ldots$ iv) Τον α_{10} της $1 -2, 4, \ldots$

v) Τον α_9 της $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \ldots$

3. i) Να βρείτε τον $1^{\underline{o}}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $5^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο $4^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $3^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι 12 και ο $6^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο $2^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{\underline{o\varsigma}}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$

5. Να βρείτε:

i) τον α_{14} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

ii) τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12,.... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. i) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16,... που υπερβαίνει το 2000.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32,..., που είναι μικρότερος του 0,25.

8. i) Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί x–4, x+1, x–19 να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4,... ii) 3, 9, 27,... iii) –4, 8, –16,...

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $2+8+32+\cdots+8192$ ii) $4+2+1+\cdots+\frac{1}{512}$

iii) $1+(-2)+4+\cdots+256$.

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο ν$^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

2. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $α_2 + α_6 = 34$ και $α_3 + α_7 = 68$.

6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν $α_ν$ είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας $(α_ν)$.

- Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν $I_ν$ είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας $(I_ν)$.

- Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o; [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C' έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C'' έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C' και C'' υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C' και C'' 13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i) το λόγο της προόδου,

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 lt νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 lt του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ. Αν $D_ν$ είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε:

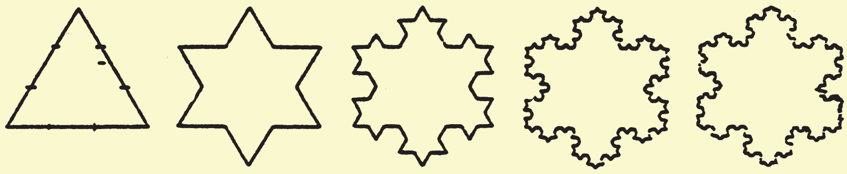
i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας $(D_ν)$.

ii) Την ποσότητα του αντιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.

Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο $\frac{1}{3}$ κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.



i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (S_ν) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.

ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (U_ν) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.

5.4 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ - ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Με τη βοήθεια των γεωμετρικών προόδων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως, που συχνά παρουσιάζονται στις συναλλαγές με πιστωτικούς οργανισμούς.

Ανατοκισμός

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για ν χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του $\nu^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου.**

(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού).

ΛΥΣΗ

Στο τέλος του $1^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου το κεφάλαιο α θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1=\alpha+\frac{\varepsilon}{100}\alpha=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του $2^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου το κεφάλαιο α_1 θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha_1$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\varepsilon}{100}\alpha_1=\alpha_1\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του $3^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου το κεφάλαιο α_2 μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3=\alpha_2\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\text{ κτλ.}$$

και γενικά στο τέλος του $\nu^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει

$$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,...,$ αν είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$ και $\lambda=1+\frac{\varepsilon}{100}$.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του $\nu^{\underline{\text{ου}}}$ όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του $\nu^{\underline{\text{ου}}}$ χρόνου το κεφάλαιο α μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$$

ή $$\alpha_\nu = \alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu}$$

Αν θέσουμε $\frac{\varepsilon}{100}=\tau$, που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha\,(1+\tau)^\nu}$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Καταθέτουμε με ανατοκισμό κεφάλαιο 10000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 2%. Να βρεθεί τι ποσό θα εισπράξουμε ύστερα από 10 χρόνια.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu$, ύστερα από 10 χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$$\begin{aligned}\alpha_{10} = 10000 \cdot (1+0{,}02)^{10} &= 10000 \cdot (1{,}02)^{10}\\ &= 10000 \cdot 1{,}218994\\ &= 12189{,}94 \text{ ευρώ.}\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Τη δύναμη $(1{,}02)^{10}$ την υπολογίζουμε με τη βοήθεια πινάκων ή με έναν υπολογιστή τσέπης.

Ίσες καταθέσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Καταθέτουμε σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α ευρώ με ανατοκισμό και επιτόκιο ε%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από ν χρόνια;**

(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα των ίσων καταθέσεων)

ΛΥΣΗ

Η 1η κατάθεση θα ανατοκιστεί για ν χρόνια και επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του ανατοκισμού, θα γίνει $\alpha(1+\tau)^\nu$, όπου $\tau=\frac{\varepsilon}{100}$.

Η 2η κατάθεση θα ανατοκιστεί να ν–1 χρόνια και επομένως θα γίνει $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κτλ. και η νη κατάθεση θα τοκιστεί για 1 χρόνο και θα γίνει $\alpha(1+\tau)$. Συνεπώς ύστερα από ν χρόνια θα πάρουμε το ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= \alpha(1+\tau)^{\nu}+\alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \dots + \alpha(1+\tau)\\ &= \alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2 + \dots + \alpha(1+\tau)^{\nu}\\ &= \alpha(1+\tau)[1+(1+\tau)+(1+\tau)^2 + \dots + (1+\tau)^{\nu-1}]\\ &= \alpha(1+\tau)\bullet\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{(1+\tau)-1}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\Sigma = \alpha(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος των ίσων καταθέσεων**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην αρχή κάθε χρόνου καταθέτουμε στην τράπεζα ποσό 10000 ευρώ με ανατοκισμό και με επιτόκιο 2%. Τι ποσό θα πάρουμε ύστερα από 10 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ύστερα από 10 χρόνια θα πάρουμε ποσό

$$\begin{aligned}\Sigma &= 10000\cdot(1+0{,}02)\cdot\frac{(1+0{,}02)^{10}-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 1{,}02\cdot\frac{(1{,}02)^{10}-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 1{,}02\cdot\frac{1{,}218994-1}{0{,}02}\\ &= 10000\cdot 11{,}168694 = \mathbf{111686{,}94}\ \text{ευρώ}.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για την επίλυση των ασκήσεων να χρησιμοποιηθεί υπολογιστής τσέπης

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δανείζει κάποιος 5000 ευρώ με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ύστερα από 5 χρόνια;

2. Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3% για να πάρει ύστερα από 10 χρόνια συνολικά 50.000 ευρώ;

3. Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο, κεφάλαιο 10.000 ευρώ, ανατοκιζόμενο ανά έτος, γίνεται ύστερα από 5 χρόνια 12.762 ευρώ;

4. Στην αρχή κάθε χρόνου και για 5 συνεχή χρόνια καταθέτουμε 5.000 ευρώ με ανατοκισμό ανά έτος και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Τι ποσό θα πάρουμε στο τέλος του $5^{ου}$ έτους;