

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1. Ανισώσεις 1ου βαθμού Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x$
 $\Leftrightarrow 6x - 6 + 6x + 9 < 2x \Leftrightarrow 6x + 6x - 2x < 6 - 9$
 $\Leftrightarrow 10x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{10}$.

ii) $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x$
 $\Leftrightarrow 2x - 24 + 2x + 3 > 4x$
 $\Leftrightarrow 2x + 2x - 4x > 24 - 3 \Leftrightarrow 0x > 21$ αδύνατη.

iii) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4$
 $\Leftrightarrow 5x - 4x - x < 10 - 2 - 4$
 $\Leftrightarrow 0x < 4$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. • $3x - 1 < x + 5 \Leftrightarrow 3x - x < 1 + 5 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$.

• $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$.



Άρα $1 \leq x < 3$.

3. • $x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 2 \Leftrightarrow 2x - x > 1 + 2 \Leftrightarrow x > 3$.

• $x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq x - 3 \Leftrightarrow 3x - x \leq 1 - 3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1$.



Άρα δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις.

4. • $2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 16x - x - 8x > -1$

$$\Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}.$$

• $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow 2x + x < 8 - 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}.$$



Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-\frac{1}{7}, \frac{7}{3})$. Οι ακέραιες τιμές του x στο διάστημα αυτό είναι οι 0, 1, 2.

5. i) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Άρα $x \in (-3, 3)$.

ii) $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - 4 \leq x \leq 1 + 4$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5. \text{ Άρα } x \in [-3, 5].$$

iii) $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -5 - 1 < 2x < 5 - 1$

$$\Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2. \text{ Άρα } x \in (-3, 2).$$

6. i) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3$. Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

ii) $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow x - 1 < -4 \text{ ή } x - 1 > 4 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 5$.

$$\text{Άρα } x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty).$$

iii) $|2x + 1| \geq 5 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq -5 \text{ ή } 2x + 1 \geq 5 \Leftrightarrow 2x \leq -6 \text{ ή } 2x \geq 4$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2. \text{ Άρα } x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty).$$

7. i) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$.

Επομένως $|2x - 6| = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$.

ii) $|3x - 1| = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$.

8. i) $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3(|x-1|-4) + 10 < 2|x-1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3|x-1| - 12 + 10 < 2|x-1| \Leftrightarrow |x-1| < 2 \\ \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3. \text{ Άρα } x \in (-1, 3).$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3} &\Leftrightarrow 3(|x|+1) - 4|x| > 2(1-|x|) \\ &\Leftrightarrow 3|x| + 3 - 4|x| > 2 - 2|x| \\ &\Leftrightarrow 3|x| - 4|x| + 2|x| > 2 - 3 \\ &\Leftrightarrow |x| > -1 \text{ που αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow |x-3| \leq 5$
 $\Leftrightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Leftrightarrow 3-5 \leq x \leq 5+3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8.$

Αρα $x \in [-2, 8]$.

10. Το κέντρο του διαστήματος $(-7, 3)$ είναι το $\frac{-7+3}{2} = -2$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } x \in (-7, 3) &\Leftrightarrow -7 < x < 3 \Leftrightarrow -7 - (-2) < x - (-2) < 3 - (-2) \\ &\Leftrightarrow -7 + 2 < x + 2 < 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow -5 < x + 2 < 5 \Leftrightarrow |x + 2| < 5. \end{aligned}$$

11. $41 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 50 \Leftrightarrow 41 - 32 \leq \frac{9}{5}C \leq 50 - 32$
 $\Leftrightarrow 9 \leq \frac{9}{5}C \leq 18 \Leftrightarrow 5 \leq C \leq 10.$

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $3 \leq 4x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq 4x - 1$ και $4x - 1 \leq 6$. Ζητάμε επομένως τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $3 \leq 4x - 1$ και $4x - 1 \leq 6$.
- $3 \leq 4x - 1 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \Leftrightarrow 4x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 - $4x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 4x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$.



Αρα $x \in [1, \frac{7}{4}]$.

ii) $-4 \leq 2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -4 \leq 2 - 3x$ και $2 - 3x \leq -2$.

- $-4 \leq 2 - 3x \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.
- $2 - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -3x \leq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$.



Αρα $x \in [\frac{4}{3}, 2]$.

2. i) $2 \leq |x| \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \text{ και } |x| \leq 4.$

- $2 \leq |x| \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2.$

- $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$



Άρα $x \in [-4, -2] \cup [2, 4].$

ii) $2 \leq |x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq |x - 5| \text{ και } |x - 5| \leq 4.$

- $2 \leq |x - 5| \Leftrightarrow |x - 5| \geq 2 \Leftrightarrow x - 5 \leq -2 \text{ ή } x - 5 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 3 \text{ ή } x \geq 7.$

- $|x - 5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 5 - 4 \leq x \leq 5 + 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9.$

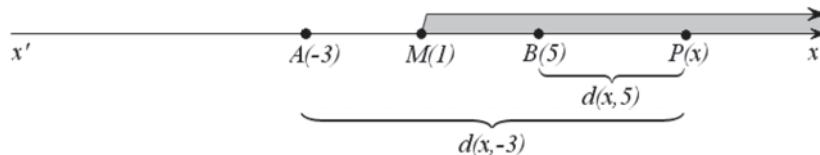


Άρα $x \in [1, 3] \cup [7, 9].$

3. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο M του AB είναι o:

$$x_0 = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

ii) Αν P είναι το σημείο του x' που αντιστοιχεί σε λύση της ανίσωσης, τότε:
 $|x - 5| \leq |x + 3| \Leftrightarrow d(x, 5) \leq d(x, -3) \Leftrightarrow PA \leq PB.$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P βρίσκεται προς τα δεξιά του μέσου M του AB. Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in [1, +\infty).$

iii) Έχουμε:

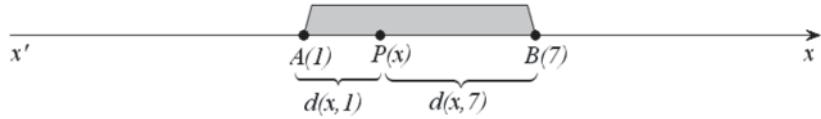
$$\begin{aligned} |x - 5| \leq |x + 3| &\Leftrightarrow |x - 5|^2 \leq |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq x^2 + 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow -16x \leq -16 \Leftrightarrow x \geq 1. \end{aligned}$$

4. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο M του AB είναι o:

$$x_0 = \frac{1 + 7}{2} = 4$$

ii) Αν P είναι το σημείο του x' που αντιστοιχεί στη λύση x της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow d(x, 1) + d(x, 7) = 6 \Leftrightarrow PA + PB = AB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο P είναι σημείο του τμήματος AB . Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x \in [1, 7]$.

iii) Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x - 1$	–	0	+	+
$x - 7$	–	–	0	+

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν $x \in (-\infty, 1)$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (1 - x) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow x = 1$, που απορρίπτεται διότι $1 \notin (-\infty, 1)$.

• Αν $x \in [1, 7)$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (7 - x) = 6 \Leftrightarrow 0x = 0$, που ισχύει για κάθε $x \in [1, 7)$.

• Αν $x \in [7, +\infty)$, τότε:

$|x - 1| + |x - 7| = 6 \Leftrightarrow (x - 1) + (x - 7) = 6 \Leftrightarrow x = 7$, που είναι δεκτή διότι $7 \in [7, +\infty)$. Επομένως, η εξίσωση αληθεύει για $x \in [1, 7]$.

§ 4.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού

A' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$\text{Έχουμε: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

$$\text{Άρα } x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

$$\text{ii) Έχουμε: } 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Επομένως

$$2x^2 - 3x - 2 = 2 \left(x + \frac{1}{2}\right) (x - 2) = (2x + 1)(x - 2).$$

2. i) Είναι: $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(2x + 1)(x - 2)} = \frac{x - 1}{2x + 1}, \quad x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$

ii) Έχουμε: $2x^2 + 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$
 $\Delta = 4^2 - 4(-21) = 100$, θα είναι

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \nearrow^3 \searrow_{-7}$$

Επομένως $2x^2 + 8x - 42 = 2(x+7)(x-3)$.

$$\text{Άρα: } \frac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49} = \frac{2(x+7)(x-3)}{(x+7)(x-7)} = \frac{2(x-3)}{x-7}, \quad x \neq \pm 7.$$

iii) • Για την εξίσωση $4x^2 - 12x + 9 = 0$, έχουμε

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ (διπλή).}$$

$$\text{Επομένως } 4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (2x-3)^2.$$

$$\bullet \text{ Για την } 2x^2 - 5x + 3 = 0, \quad \Delta = 25 - 24 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} \nearrow^1 \searrow_{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Επομένως } 2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-3)(x-1).$$

$$\text{Άρα } \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(x-1)} = \frac{2x-3}{x-1}, \quad x \neq 1, x \neq \frac{3}{2}$$

3. i) $x^2 - 2x - 15 = 0, \quad \Delta = 64, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \nearrow^5 \searrow_{-3}$

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	0

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$	+	0	+

iii) $x^2 - 4x + 13 = 0, \quad \Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 < 0, \quad \alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		+

4. i) Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει $\alpha = -1$ και ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \nearrow^3 \searrow_1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	—	0	+	0

ii) Έχουμε $-9x^2 + 6x - 1 = -(9x^2 - 6x + 1) = -(3x - 1)^2$. Επομένως

x	$-\infty$	1/3	$+\infty$
$-9x^2 + 6x - 1$	—	0	—

iii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$ έχει $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ και $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 2$	—	—

5. i) Είναι: $5x^2 \leq 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 4) \leq 0$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 20x$ έχει $a = 5 > 0$ και ρίζες $x_1 = 0, x_2 = 4$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$5x^2 - 20x$	+	0	—	0

Άρα $x \in [0, 4]$.

ii) Είναι: $x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1, x_2 = -4$.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$	+	0	—	0

Άρα $x \in [-4, 1]$.

6. i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	—	0

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ έχει $a = 2 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 5$	+	0	-	0

Άρα $x \in (-1, \frac{5}{2})$.

7. i) Είναι: $x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$.

ii) Είναι: $x^2 + 9 \leq 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

8. i) Το τριώνυμο $x^2 + 3x + 5$ έχει $a = 1 > 0$ και $\Delta = -11 < 0$. Άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ανίσωση $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ είναι αδύνατη.
- ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 20$ έχει $a = 2 > 0$ και $\Delta = -151 < 0$. Άρα η ανίσωση $2x^2 - 3x + 20 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Έχουμε $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1, x_2 = 3$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0

Άρα $x \in (1, 3)$.

10. Έχουμε $2x - 1 < x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4$ και $x^2 - 4 < 12$.

- Είναι: $2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3, x_2 = -1$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	0

Επομένως $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

- Είναι: $x^2 - 4 < 12 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 16$ έχει $a = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 4, x_2 = -4$.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
$x^2 - 16$	+	0	-	0

Επομένως $x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4)$.



Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-4, -1) \cup (3, 4)$.

11. Έχουμε $x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$ και

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$



Άρα $x \in (1, 2) \cup (3, 5)$.

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παράσταση $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = \alpha^2 + \beta \cdot \alpha - 2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-2\beta^2) = 9\beta^2 \geq 0 \text{ και } \text{ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm 3\beta}{2} \nearrow \begin{matrix} \beta \\ -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)$.

- Ομοίως η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha - 6\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1(-6\beta^2) = 25\beta^2 \text{ και } \text{ρίζες } \alpha_{3,4} = \frac{\beta \pm 5\beta}{2} \nearrow \begin{matrix} 3\beta \\ -2\beta \end{matrix}$$

Επομένως $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2 = (\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)$.

$$\text{ii) } \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2} = \frac{(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}, \alpha \neq 3\beta, \alpha \neq -2\beta.$$

2. $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\beta - \alpha)^2 - 4 \cdot 2(-\alpha\beta) = 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta \\ &= 4\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2 = (2\beta + \alpha)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Οι ρίζες της εξίσωσης είναι } x_{1,2} = \frac{-(2\beta - \alpha) \pm (2\beta + \alpha)}{4} \nearrow \begin{matrix} \frac{\alpha}{2} \\ -\beta \end{matrix}$$

Άρα $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 2(x - \frac{\alpha}{2})(x + \beta) = (2x - \alpha)(x + \beta)$.

3. • Έχουμε $x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta = x(x - \alpha) + \beta(x - \alpha) = (x - \alpha)(x + \beta)$.

- Το τριώνυμο $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2$ έχει ρίζες $x_1 = \alpha$ και $x_2 = 2\alpha$
οπότε $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = (x - \alpha)(x - 2\alpha)$. Επομένως

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2} = \frac{(x - \alpha)(x + \beta)}{(x - \alpha)(x - 2\alpha)} = \frac{x + \beta}{x - 2\alpha}, \text{ με } x \neq \alpha, x \neq 2\alpha.$$

4. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda + 5) = 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 5\lambda^2 - 20\lambda.$$

Η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή λ , $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 4$.

λ	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$	+	0	-	0 +

Επομένως η δοθείσα εξίσωση

i) έχει ρίζες ίσες, αν $\lambda = 4$, διότι $\lambda \neq 0$.

ii) έχει ρίζες άνισες αν $\lambda \neq -2$ με $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$.

iii) είναι αδύνατη αν $0 < \lambda < 4$.

5. Το τριώνυμο $x^2 + 3\lambda x + \lambda$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda$.

Για να είναι $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$.

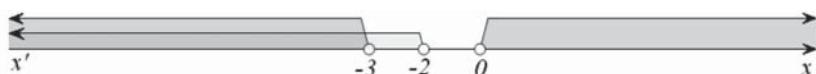
$$\text{Έχουμε } \Delta < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \frac{4}{9}).$$

6. i) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 3\lambda \cdot (\lambda + 2) = 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 + 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda > 0$$

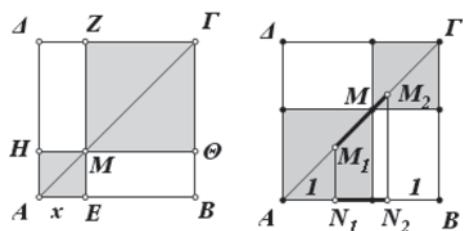
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -3 \text{ ή } \lambda > 0.$$

ii) Η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$ και $\lambda < -2$.



Άρα $\lambda < -3$.

7. Αν x είναι η πλευρά του ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του άλλου θα είναι $3 - x$ και άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων θα είναι ίσο με $x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.



Επομένως, για να είναι το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων μικρότερο από 5 θα πρέπει να ισχύει:

$$2x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Άρα το Μ θα πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία M_1 και M_2 , τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο $\Delta\Gamma$ σε τρία ίσα μέρη.

8. i) Η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α . Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$. Ο συντελεστής του α^2 είναι $1 > 0$. Άρα

$$\alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2 \geq 0, \text{ για όλα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}$. Επομένως

- Αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.

§ 4.3. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο

A' ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2$.
- $x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$).

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$2 - 3x$	+	+	0	-	-
$x^2 - x - 2$	+	0	-	-	0
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	-

2. Έχουμε:

- $-x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
- $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$.
- $x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = -3 < 0$).

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$-x^2 + 4$	—	0	+	+	0	—
$x^2 - 3x + 2$	+	+	0	—	0	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+	+	
$P(x)$	—	0	+	0	—	—

3. Έστω $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9)$. Έχουμε:

- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
 - $x^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
 - $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ñ} \quad x \geq 3$.

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$x-1$	—	—	0	+	+
x^2+2	+	+	+	+	+
x^2-9	+	0	—	—	0
$P(x)$	—	0	+	0	—

$$A \rho a (x-1)(x^2+2)(x^2-9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty).$$

4. Έστω $P(x) = (3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3)$. Έχουμε:

- $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
 - $2x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ñ} \quad x \geq 0$.
 - $x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$3-x$	+	+	+	0	-
$2x^2+6x$	+	0	-	0	+
x^2+3	+	+	+		+
$P(x)$	+	0	-	0	-

$$\text{Algebra } (3-x)(2x^2+6x)(x^2+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty).$$

5. Έστω $P(x) = (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1)$. Έχουμε:

- $2 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.
- $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$,
- οπότε $(x+1)^2 > 0$, για $x \neq -1$ και $(x+1)^2 = 0$ για $x = -1$.

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$2 - x - x^2$	—	0	+	—	0
$x^2 + 2x + 1$	+	—	0	+	+
$P(x)$	—	0	+	0	—

$$\text{Αρ} \alpha (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty).$$

6. Έστω $P(x) = (x-3)(2x^2+x-3)(x-1-2x^2) > 0$. Έχουμε:

- $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- $2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$ ή $x \geq 1$.
- $x - 1 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x - 1 \geq 0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$, $a = -2 < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	3	$+\infty$
$x - 3$	—	—	—	0	+
$2x^2 + x - 3$	+	0	—	+	+
$x - 1 - 2x^2$	—	—	—	—	—
$P(x)$	+	0	—	0	—

$$\text{Αρ} \alpha (x-3)(2x^2+x-3)(x-1-2x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, 3).$$

7. i) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \frac{2x+1}{x-3} \leq 0 &\Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0, \text{ με } x \neq 3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 3. \end{aligned}$$

8. $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-2)(x^2+x-2) \leq 0$, με $x^2+x-2 \neq 0$.

Έστω $P(x) = (x^2-x-2)(x^2+x-2)$. Έχουμε:

- $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

• $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 1.$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	+	0	-	-	0
$x^2 + x - 2$	+	0	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	+	+

Άρα $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup (1, 2].$

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{2x+3}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3 - 4x+4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{2}.$

ii) $\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2 - 12x-20}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{11x+22}{3x+5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x+2)(3x+5) \geq 0, \text{ με } x \neq -\frac{5}{3}$
 $\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x > -\frac{5}{3}.$

Άρα $x \in (-\infty, -2] \cup (-\frac{5}{3}, +\infty).$

2. $\frac{x^2 - 3x - 10}{x-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 10 + 2x - 2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x-1} \leq 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x-1) \leq 0, \text{ με } x \neq 1.$

Έστω $P(x) = (x^2 - x - 12)(x-1).$ Έχουμε:

- $x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 4.$
- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$	+	0	-	0	-
$x-1$	-	-	0	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	-

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4].$

$$\begin{aligned}
 3. \quad i) \quad & \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1) - 2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6x + 10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \\
 & \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2 - 7x + 10) \leq 0, \text{ με } x \neq 1, x \neq \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Έστω $P(x) = (3x-5)(x-1)(x^2 - 7x + 10)$. Έχουμε:

- $3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$.
- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \quad \text{ή} \quad x \geq 5$.

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	2	5	$+\infty$
$3x-5$	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	0	+	+	+	+
$x^2 - 7x + 10$	+	+	+	0	-	0
$P(x)$	+	0	-	0	-	0

$$\text{Αρ} \alpha \frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2 - 7x + 10) \leq 0,$$

$$x \neq 1, x \neq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x \in (1, \frac{5}{3}) \cup [2, 5].$$

$$\begin{aligned}
 ii) \quad & \frac{x}{2x-1} \geq \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1} - \frac{3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 6x + 3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(2x-1)(x+2)} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(2x-1)(x+2) \geq 0, \text{ με } x \neq -2, x \neq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Έστω $P(x) = (x^2 - 4x + 3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	+	+	0	-	0
$2x-1$	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	-	0

$$\text{Αρ} \alpha x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup [3, +\infty).$$

4. Έχουμε: $\left| \frac{x+1}{x} \right| > 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < -2 \quad \text{ή} \quad \frac{x+1}{x} > 2, x \neq 0.$

$$\bullet \frac{x+1}{x} < -2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 0.$$

$$\bullet \frac{x+1}{x} > 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

$$\text{Άρα } x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, 1).$$

5. Για να έχει η εταιρεία κέρδος πρέπει να έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος:

$$E > K \Leftrightarrow 5x - x^2 > 7 - x \Leftrightarrow 5x - x^2 - 7 + x > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 < 0.$$

Οι ρίζες των τριωνύμου είναι $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Επομένως

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}.$$

ή, προσεγγιστικά, $1,59 < x < 4,41$.

6. Έχουμε: $\frac{20t}{t^2 + 4} > 4 \Leftrightarrow \frac{20t}{t^2 + 4} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{20t - 4t^2 - 16}{t^2 + 4} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 20t - 16}{t^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 20t + 16}{t^2 + 4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 4(t^2 - 5t + 4)(t^2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 4.$$