

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 3.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42$
 $\Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow x = 5.$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

ii) $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow 20 \frac{1-4x}{5} - 20 \frac{x+1}{4} = 20 \frac{x-4}{20} + 20 \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-4x) - 5(x+1) = x-4 + 25 \Leftrightarrow 4 - 16x - 5x - 5 = x + 21$$

$$\Leftrightarrow -21x - x = 21 + 1 \Leftrightarrow -22x = 22 \Leftrightarrow x = -1.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -1$.

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60} \Leftrightarrow 60 \cdot \frac{x}{2} - 60 \cdot \frac{x}{3} = 60 \cdot \frac{x}{4} - 60 \cdot \frac{x}{5} - 60 \cdot \frac{49}{60}$

$$\Leftrightarrow 30x - 20x = 15x - 12x - 49 \Leftrightarrow 30x - 20x - 15x + 12x = -49$$

$$\Leftrightarrow 7x = -49 \Leftrightarrow x = -7.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = -7$.

iv) $1,2(x+1) - 2,5 + 1,5x = 8,6 \Leftrightarrow 12(x+1) - 25 + 15x = 86$

$$\Leftrightarrow 12x + 12 - 25 + 15x = 86 \Leftrightarrow 27x = 99 \Leftrightarrow x = \frac{99}{27} = \frac{11}{3}.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \frac{11}{3}$.

2. i) $2(3x-1) - 3(2x-1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 3.$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 2x - 3 \cdot \frac{5-x}{3} = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \cdot \frac{7x}{3}$

$$\Leftrightarrow 6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Άρα, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3. i) • Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1} = 1.$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

- ii) • Αν $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda}{\lambda - 2}.$$

- Αν $\lambda = 2$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

- iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

- Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda}.$$

- Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται $0x = -1$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

- iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda + 1)$.

- Αν $\lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda - 1)} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$$

- Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda = 1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.

4. Έστω $AM = x$, τότε $DM = 5 - x$, οπότε

$$E_1 = \frac{3(5 - x)}{2} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{x \cdot 5}{2}.$$

- i) Η ισότητα $E_1 + E_2 = E_3$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$E_1 + E_2 = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} \quad \text{από την οποία προκύπτει η εξίσωση}$$

$$\frac{3(5 - x)}{2} + \frac{5x}{2} = \frac{(5 + 3)5}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{15 - 3x}{2} + 4 \cdot \frac{5x}{2} = 4 \cdot \frac{40}{4}$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6x + 10x = 40 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Επομένως η θέση του M προσδιορίζεται από το μήκος $AM = 2,5$, είναι δηλαδή το μέσο του AD .

ii) Η ισότητα $E_1 = E_2$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2} = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 15 - 3x = 5x \Leftrightarrow 15 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}.$$

Επομένως η θέση του M προσδιορίζεται από το μήκος $AM = \frac{15}{8}$.

5. Αν το ποσό των x ευρώ κατατέθηκε προς 5%, τότε το υπόλοιπο ποσό των $(4000 - x)$ ευρώ κατατέθηκε προς 3%.

– Το ποσό των x ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{5}{100}x$ ευρώ

– Το ποσό των $(4000 - x)$ ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{3}{100}(4000 - x)$ ευρώ.

Η εξίσωση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα είναι

$$\frac{5}{100}x + \frac{3}{100}(4000 - x) = 175 \Leftrightarrow 5x + 3(4000 - x) = 100 \cdot 175$$

$$\Leftrightarrow 5x + 12.000 - 3x = 17.500 \Leftrightarrow 2x = 17.500 - 12.000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5.500 \Leftrightarrow x = 2.750 \text{ ευρώ.}$$

Επομένως τα 2.750 ευρώ τοκίστηκαν προς 5% και τα υπόλοιπα 1.250 ευρώ τοκίστηκαν προς 3%.

6. i) $v = v_0 + at \Leftrightarrow at = v - v_0 \Leftrightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$, αφού $a \neq 0$.

$$\text{ii) } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_2 - R}{R_2 R}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $R_2 - R \neq 0$, αφού το $\frac{1}{R_1} \neq 0$.

$$\text{Επομένως έχουμε } R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}.$$

7. i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και -1.

ii) $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (x - 2)(x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[(x - 2) + (x + 4)] = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και -1.

$$8. \text{ i) } x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - x^3 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 1.

$$\text{ii) } (x + 1)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 0.

$$9. \text{ i) } x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 1.

$$\text{ii) } (x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)[(x + 2) - (x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

$$10. \text{ i) } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2, 1 και -1.

$$\text{ii) } x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) - (2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

$$11. \text{ i) } \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} &\Leftrightarrow x^2(x-1) = x-1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ (αφού } x \neq 1). \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -1$.

$$\text{ii) } \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0.$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1+2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1, \end{aligned}$$

που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.

Επομένως και η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς του περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1) \frac{1}{x+1} &= (x-1)(x+1) \frac{2}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow x+1+x-1 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 2 \Leftrightarrow x=1, \text{ που απορρίπτεται, αφού } x \neq 1. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} &= \frac{x-4}{x^2+2x} \\ \Leftrightarrow x(x+2) \frac{3}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} &= x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \\ \Leftrightarrow 3x-2x-4 &= x-4 \Leftrightarrow 0x=0. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό εκτός από τους αριθμούς 0 και -2 .

iii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} \\ &\Leftrightarrow x-2 = x \Leftrightarrow 0x = 2, \text{ που είναι αδύνατη.} \end{aligned}$$

iv) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq -1$ και $x \neq 1$. Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1}, \end{aligned}$$

που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , με $x \neq \pm 1$.

13. Έστω $x-1$, x , $x+1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Ζητούμε ακέραιο x τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} (x-1) + x + (x+1) &= (x-1)x(x+1) \\ \Leftrightarrow 3x &= x(x^2-1) \\ \Leftrightarrow x(3-x^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(4-x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x &= -2. \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν τρεις τριάδες τέτοιων διαδοχικών αριθμών, οι εξής:

$$(-1, 0, 1), (1, 2, 3) \text{ και } (-3, -2, -1).$$

14. i) $|2x-3|=5 \Leftrightarrow 2x-3=5 \text{ ή } 2x-3=-5$

$$\Leftrightarrow 2x=8 \text{ ή } 2x=-2 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και -1 .

ii) $|2x-4|=|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=x-1 \text{ ή } 2x-4=-x+1$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } 3x=5 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=\frac{5}{3}.$$

iii) Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης $|x-2|=2x-1$ είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει

$$2x - 1 \geq 0 \quad (1)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |x - 2| = 2x - 1 &\Leftrightarrow x - 2 = 2x - 1 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 1 - 2x \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

iv) Ομοίως, για την εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$, πρέπει

$$x - 2 \geq 0 \quad (2)$$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 1| = x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2 \quad \text{ή} \quad 2x - 1 = 2 - x \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή, αφού καμία δεν επαληθεύει τον περιορισμό (2). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

15. i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{|x| + 4}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 15 \cdot \frac{|x| + 4}{3} - 15 \cdot \frac{|x| + 4}{5} = 15 \cdot \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow 5|x| + 20 - 3|x| - 12 = 10 \\ &\Leftrightarrow 2|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 1 .

$$\text{ii)} \quad \frac{2|x| + 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2|x| + 1}{3} - 6 \cdot \frac{|x| - 1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4|x| + 2 - 3|x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = -2, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

16. i) Η εξίσωση $\left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4$ ορίζεται για $x \neq -3$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\left| \frac{3-x}{3+x} \right| = 4 \Leftrightarrow |3-x| = 4 \cdot |3+x|$$

$$\Leftrightarrow 3-x = 4(x+3) \quad \text{ή} \quad 3-x = -4(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3-x = 4x+12 \quad \text{ή} \quad 3-x = -4x-12$$

$$\Leftrightarrow 5x = -9 \quad \text{ή} \quad 3x = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad x = -5.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -5 και $-\frac{9}{5}$.

- ii) $|x-1||x-2|=|x-1| \Leftrightarrow |x-1|(|x-2|-1)=0$
 $\Leftrightarrow |x-1|=0$ ή $|x-2|=1$
 $\Leftrightarrow x=1$ ή $x-2=1$ ή $x-2=-1$
 $\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ ή $x=1$.
 Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 3.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 - 2\beta x + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 + 2\beta x - \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta$
 $\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 $\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)^2$.
- Αν $\alpha + \beta \neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$.
 - Αν $\alpha + \beta = 0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- ii) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:
- $$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(x-\alpha) = \beta(x-\beta) \Leftrightarrow \alpha x - \alpha^2 = \beta x - \beta^2$$
- $$\Leftrightarrow \alpha x - \beta x = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta).$$
- Αν $\alpha - \beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta$.
 - Αν $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, οπότε είναι ταυτότητα.
2. i) Για $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ έχουμε:
- $$\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta x - \alpha x}{\alpha\beta} = 1 \Leftrightarrow (\beta - \alpha)x = \alpha\beta.$$
- Αν $\beta - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq \alpha$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}$.
 - Αν $\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = \alpha^2$ και είναι αδύνατη γιατί $\alpha \neq 0$.
- Επομένως η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$.

3. i) Στα 200 ml διάλυμα περιέχονται 30 ml καθαρό οινόπνευμα. Αν προσθέσουμε x ml καθαρό οινόπνευμα τότε το διάλυμα που θα προκύψει θα είναι $(200 + x)$ ml και θα περιέχει $(30 + x)$ ml καθαρό οινόπνευμα οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{30 + x}{200 + x} = \frac{32}{100} \Leftrightarrow 100(30 + x) = 32(200 + x) \cdot$$

$$\Leftrightarrow 3000 + 100x = 6400 + 32x \Leftrightarrow 68x = 3400$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3400}{68} \Leftrightarrow x = 50.$$

Επομένως ο φαρμακοποιός πρέπει να προσθέσει 50 ml καθαρό οινόπνευμα.

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι $100x$ ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι $120x$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$120x - 100x = 1 \Leftrightarrow 20x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{20} \text{ ώρες, οπότε } x = \frac{1}{20} \cdot 60 = 3 \text{ λεπτά.}$$

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

5. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq a$ και $x \neq -a$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x + a}{x - a} = \frac{x^2}{x^2 - a^2} \Leftrightarrow \frac{x + a}{x - a} = \frac{x^2}{(x + a)(x - a)}$$

$$\Leftrightarrow (x + a)^2 = x^2 \Leftrightarrow x + a = x \quad \text{ή} \quad x + a = -x$$

$$\Leftrightarrow 0x = a \quad \text{ή} \quad 2x = -a.$$

• Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση έχει ως λύση κάθε αριθμό $x \neq 0$.

• Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = \frac{-a}{2}$.

6. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq 2$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - \cancel{8} = \cancel{x^3} - 2x^2 + 4x - \cancel{8}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 0$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $x = 0$.

$$7. |2|x| - 1| = 3 \Leftrightarrow 2|x| - 1 = 3 \quad \text{ή} \quad 2|x| - 1 = -3 \\ \Leftrightarrow 2|x| = 4 \quad \text{ή} \quad 2|x| = -2.$$

Η δεύτερη είναι αδύνατη οπότε έχουμε

$$2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2 .

$$8. \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |3x - 5| \\ \Leftrightarrow |x - 1| = |3x - 5| \\ \Leftrightarrow x - 1 = 3x - 5 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -3x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x = 4 \quad \text{ή} \quad 4x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3}{2}.$$

§ 3.2. Η εξίσωση $x^y = a$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

$$1. \text{ i) } x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\text{ii) } x^5 - 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 3^5 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{iii) } x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$2. \text{ i) } x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = (-5)^3 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$\text{ii) } x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = (-3)^5 \Leftrightarrow x = -3.$$

$$\text{iii) } x^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = (-1)^7 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$3. \text{ i) } x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = -8 \quad \text{ή} \quad x = 8.$$

$$\text{ii) } x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{81} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3.$$

$$\text{iii) } x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{64} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2.$$

$$4. \text{ i) } x^5 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και 2 .

$$\text{ii) } x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και -1 .

$$\text{iii) } x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^4 = -16 \Leftrightarrow x = 0$$

αφού η $x^4 = -16$ είναι αδύνατη.
Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

5. Για το x έχουμε την εξίσωση
 $x \cdot x \cdot 3x = 81$, με $x > 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 81 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$.
 Άρα, οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι $3m$, $3m$ και $9m$.

6. i) $(x + 1)^3 = 64 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

ii) $1 + 125x^3 = 0 \Leftrightarrow (5x)^3 = -1 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

iii) $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^3 - 27] = 0$
 $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x - 1)^3 = 27$
 $\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x - 1 = 3$
 $\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 4$.

§ 3.3. Εξισώσεις 2ου βαθμού

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x_1 = \frac{5+1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{5-1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

ii) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την

$$x = \frac{6}{2} = 3.$$

iii) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. i) $x^2 - 1,69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,69 \Leftrightarrow x = 1,3 \quad \text{ή} \quad x = -1,3$

ii) $0,5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0,5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad 0,5x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 2$.

iii) $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$, που είναι αδύνατη.

3. i) Έχουμε $\Delta = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$
 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Έχουμε $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Επειδή

$$\Delta = 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1,$$

οι τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει διπλή ρίζα είναι οι αριθμοί 1 και -1 .

5. Έχουμε $\Delta = 4(\alpha + \beta)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + \beta^2) = 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 8\alpha\beta - 8\alpha^2 - 8\beta^2$
 $= -4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8\alpha\beta = -4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$
 $= -4(\alpha - \beta)^2 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = \beta \neq 0$, ισχύει $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

Αν είναι $\alpha = \beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2 = 0$ και είναι αδύνατη.

6. i) $S = 2 + 3 = 5$ και $P = 2 \cdot 3 = 6$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 5x + 6 = 0$.

ii) $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ και $P = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

iii) $S = (5 - 2\sqrt{6}) + (5 + 2\sqrt{6}) = 10$ και

$$P = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) = 25 - 4 \cdot 6 = 1 \text{ οπότε η εξίσωση είναι η:}$$

$$x^2 - 10x + 1 = 0.$$

7. i) Είναι $S = 2$ και $P = -15$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 15 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 4 - 4(-15) = 64$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2 - 8}{2} = -3.$$

ii) Είναι $S = 9$ και $P = 10$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 9x + 10 = 0$, η οποία έχει $\Delta = 81 - 4 \cdot 10 = 41$. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{9 - \sqrt{41}}{2}.$$

8. 1ος τρόπος:

i) Για να λύσουμε την εξίσωση αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ και γινόμενο $\sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι προφανώς οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ που είναι και οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

2ος τρόπος:

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Delta &= (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{15} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 > 0. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \sqrt{5} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

ii) Είναι $\Delta = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = -\sqrt{2}.$$

9. 1ος τρόπος:

$$\begin{aligned} x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x &\Leftrightarrow x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \alpha)^2 - \beta^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \alpha + \beta)(x + \alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha - \beta \quad \text{ή} \quad x = \beta - \alpha. \end{aligned}$$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$.

Είναι $\Delta = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2) = 4\beta^2$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{-2\alpha - 2\beta}{2} = -(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-2\alpha + 2\beta}{2} = \beta - \alpha.$$

10. Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου. Τότε έχουμε

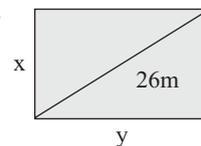
$$2x + 2y = 68 \Leftrightarrow x + y = 34 \Leftrightarrow y = 34 - x \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι

$$x^2 + y^2 = 26^2, \text{ οπότε λόγω της (1) έχουμε}$$

$$x^2 + (34 - x)^2 = 26^2 \Leftrightarrow x^2 + 34^2 - 68x + x^2 = 26^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 34^2 - 26^2 = 0$$



$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + (34 - 26)(34 + 26) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 8 \cdot 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 4 \cdot 60 = 0.$$

Είναι $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 60 = 196$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{34 + 14}{2} = 24 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{34 - 14}{2} = 10.$$

Οι ρίζες αυτές λόγω και της (1) είναι οι ζητούμενες πλευρές του ορθογώνιου.

11. i) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$ και έχει ρίζες $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 4$ που είναι δεκτές και οι δύο, οπότε έχουμε $|x| = 3$ ή $|x| = 4$, που σημαίνει ότι $x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 4$ ή $x = -4$. Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3, -3, 4 και -4.

ii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 35 = 0.$$

Είναι $\Delta = 144$.

Η εξίσωση έχει ρίζες 5 και -7. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 5$, που σημαίνει $x = 5$ ή $x = -5$.

- iii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε $x^2 - 8|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 12 = 0$, αφού $x^2 = |x|^2$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 6 και 2, που είναι δεκτές και οι δύο. Επομένως $|x| = 6$ ή $|x| = 2$ που σημαίνει ότι $x = 6$ ή $x = -6$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

12. Θέτουμε $|x - 1| = \omega$, οπότε έχουμε

$$(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 4\omega - 5 = 0, \text{ αφού } (x - 1)^2 = |x - 1|^2.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς -5 και 1. Δεκτή είναι μόνο η θετική $\omega = 1$ αφού $\omega = |x - 1| \geq 0$. Επομένως,

$$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 2.

13. Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = \omega$ οπότε η εξίσωση γράφεται $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες του αριθμούς 2 και 3, οπότε έχουμε

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{ή} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

και έχει το 1 διπλή ρίζα.

Η δεύτερη γράφεται

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

και έχει ως ρίζες του αριθμούς

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

14. i) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1) \frac{x}{x+1} + 6x(x+1) \frac{x+1}{x} = 6x(x+1) \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6(x+1)^2 = 13x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -3.

- ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) \frac{2}{x} + x(x-2) \frac{2x-3}{x-2} + x(x-2) \frac{2-x^2}{x(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 + 2x^2 - 3x + 2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1, οπότε λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x = -1$.

15. i) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $y^2 + 6y - 40 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -10$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$, οπότε έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2.

ii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $4y^2 + 11y - 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = \frac{1}{4}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ δεκτή είναι μόνο η $y_2 = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε $x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

iii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $2y^2 + 7y + 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$ καμία από αυτές δεν είναι δεκτή. Επομένως η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Σχόλιο: Είναι προφανές ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $2x^4 + 7x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\alpha^2(\alpha^4 - 1) = 4\alpha^6 - 4\alpha^6 + 4\alpha^2 = 4\alpha^2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. i) Είναι

$$\Delta = (5 - \sqrt{2})^2 - 4(6 - 3\sqrt{2}) = 25 - 10\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 24 + 12\sqrt{2} =$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}{2} = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3 \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

3. i) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 0$.

$$\text{Είναι } \Delta = (\alpha - 9)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4) = \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32$$

$$= -7\alpha^2 - 42\alpha + 49, \text{ οπότε}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 42\alpha - 49 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1.$$

Επομένως για $\alpha = -7$ ή $\alpha = 1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

4. Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.

Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta \frac{1}{\rho} + \gamma \frac{1}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0.$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. i) 1ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \alpha + \frac{x - \alpha}{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) \left(1 + \frac{1}{\alpha x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \alpha) \left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\alpha} &= \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}\right)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha x^2 - \alpha + (1 - \alpha^2)x = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \Delta = (\alpha^2 - 1)^2 - 4\alpha(-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha}.$$

ii) 1ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$ Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (x - \beta) = \alpha \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} (x - \beta) = \alpha \left(\frac{x - \beta}{\beta x}\right) \Leftrightarrow (x - \beta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta x}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\beta x} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha \beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha \beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2 \beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - \beta^2 x + \alpha^2 \beta - \alpha^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta x(x - \beta) + \alpha^2(\beta - x) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)(\beta x - \alpha^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad \beta x = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

3ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \beta x \frac{x}{\alpha} + \alpha \beta x \frac{\alpha}{x} = \alpha \beta x \frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta x \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2 + \alpha^2 \beta = \alpha^2 x + \beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 \beta = 0.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 \\ &= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 \end{aligned}$$

• Αν $\alpha \neq \pm\beta$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{και}$$

$$x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\beta^2}{2\beta} = \beta.$$

• Αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{(\pm\beta)^2}{\beta} = \beta.$$

6. i) Έχουμε

$\Delta = 4\lambda^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2 = x_1^2$. Από τους τύπους Vieta έχουμε

$$\bullet x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = -2\lambda \quad \text{και}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -2, \text{ οπότε } x_2 = (-2)^2 = 4.$$

Τότε έχουμε

$$-2 + 4 = -2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

7. Έστω $x - 1, x, x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει

$$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4, \text{ αφού } x \neq 0 \text{ ως πλευρά τριγώνου.}$$

Η λύση $x = 4$ της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μία μόνο τριάδα διαδοχικών ακεραίων που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Οι ακέραιοι αυτοί είναι οι 3, 4 και 5.

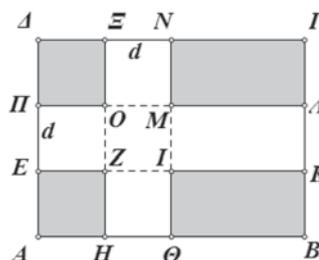
8. Το εμβαδόν E_1 του σταυρού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των δύο λευκών λωρίδων της σημαίας από το οποίο όμως πρέπει να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού τετραγώνου (OMIZ) πλευράς d . Είναι δηλαδή

$$E_1 = 3 \cdot d + 4 \cdot d - d^2 = 7d - d^2$$

Έστω E_2 το εμβαδόν του υπόλοιπου μερών της σημαίας. Θα ισχύει $E_1 = E_2$ αν και μόνο αν το E_1 είναι ίσο με το μισό του εμβαδού ολόκληρης της σημαίας. Επομένως έχουμε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 7d - d^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 1 \quad \text{ή} \quad d = 6.$$

Όμως για το d έχουμε τον περιορισμό $0 < d < 3$, οπότε $d = 1$.



9. Αν το μηχάνημα Α χρειάζεται x ώρες για να τελειώσει το έργο, όταν εργάζεται μόνο του, τότε το Β θα χρειάζεται $x + 12$ ώρες για το ίδιο έργο. Σε μία ώρα το Α εκτελεί τότε το $\frac{1}{x}$ μέρος του έργου ενώ το Β εκτελεί το $\frac{1}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν τα δύο μηχανήματα εργαστούν μαζί για 8 ώρες, τότε το Α εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ μέρος του έργου, ενώ το Β εκτελεί το $8 \cdot \frac{1}{x + 12} = \frac{8}{x + 12}$ μέρος του έργου. Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μέρη

του έργου θα έχουμε ολόκληρο το έργο δηλαδή το 1 έργο. Έτσι έχουμε την εξίσωση του προβλήματος

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1 \Leftrightarrow 8(x+12) + 8x = x(x+12)$$

$$\Leftrightarrow 8x + 96 + 8x = x^2 + 12x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0.$$

Είναι $\Delta = 16 - 4(-96) = 400$, οπότε

$$x = \frac{4+20}{2} = 12 \quad \text{ή} \quad x = \frac{4-20}{2} = -8.$$

Είναι δηλαδή $x = 12$, αφού $x > 0$. Επομένως το μηχάνημα Α χρειάζεται 12 ώρες για να τελειώσει το έργο μόνο του, ενώ το Β χρειάζεται 24 ώρες.

- 10.** Ο αριθμός 1 είναι ρίζα αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωση δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$1^4 - 10 \cdot 1^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

Για $\alpha = 9$ η εξίσωση γίνεται

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται

$$y^2 - 10y + 9 = 0.$$

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 9 και 1 οπότε έχουμε

$$x^2 = 9 \quad \text{ή} \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3, -3, 1, -1.