ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

(i) $A = \dfrac{(xy^3)^4}{(x^2y^3)^2} : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \dfrac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = (x\,y)^9$

(ii) Για $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$ έχουμε $x\,y = 1$ οπότε

$A = 1^9 = 1$.

2. Έχουμε $A = \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 : \dfrac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\dfrac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = (x^5 \cdot y^5)^2 = (xy)^{10}$

Για $x = 0{,}4$ και $y = -2{,}5$ είναι $xy = -1$ οπότε $A = (-1)^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)\,(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 = 4.000$.

ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)\,(100 + 1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9.999$.

iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46} = \dfrac{(7{,}23 + 4{,}23)(7{,}23 - 4{,}23)}{11{,}46} = \dfrac{11{,}46 \cdot 3}{11{,}46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)\\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta\end{aligned}$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4\,\frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) = \alpha^2 - \alpha^2 + 1 = 1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για $\alpha = 1{,}3265$ η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω ν και ν + 1 δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:
Τότε έχουμε

$$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1 - \nu)(\nu + 1 + \nu) = (\nu + 1) + \nu$$

7. Ισχύει

$$2^\nu + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2} = 2^\nu (1 + 2 + 2^2) = 2^\nu \cdot 7$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

i) $$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

ii) $$\frac{\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

2. Έχουμε

i) $$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3}$$

$$= \frac{(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2$$

ii) $$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

3. Έχουμε

i) $$(x + y)^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{y + x}{xy}\right)^{-2} = (x + y)^2\left(\frac{xy}{x + y}\right)^2 = (xy)^2 = x^2y^2$$

ii) $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{\frac{y+x}{xy}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$$

4. Έχουμε

$$\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)=\frac{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{(x-y)\,(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=1$$

5. i) <u>α΄ τρόπος:</u> Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>β΄ τρόπος:</u> Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\quad \beta=k\gamma\quad \text{και}\quad \gamma=k\alpha \tag{1}$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k=1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

<u>γ΄ τρόπος:</u> Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε

$\alpha\beta\gamma=k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k=1$.

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>Σχόλιο:</u> Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ii) α΄ τρόπος: Έχουμε $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ (1) και $\alpha-\beta=\gamma-\alpha$ (2), οπότε, αν προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\alpha-2\beta=\beta-\alpha \Rightarrow 3\alpha=3\beta \Rightarrow \alpha=\beta$$

Έτσι, από την ισότητα (1) βρίσκουμε ότι και $\beta=\gamma$. Άρα $\alpha=\beta=\gamma$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha-\beta=k, \quad \beta-\gamma=k \text{ και } \gamma-\alpha=k \qquad (2)$$

Αν τώρα προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (2), βρίσκουμε ότι $k=0$, οπότε, λόγω των ισοτήτων αυτών, είναι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

6. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε θα ισχύει

$$L=2x+2y \quad \text{και} \quad E=xy$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα έχουμε

$$2x+2y=4\alpha \quad \text{και} \quad xy=\alpha^2$$

και άρα

$$y=2\alpha-x \;\; (1) \quad \text{και} \quad xy=\alpha^2 \;\; (2)$$

Λόγω της (1), η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$x(2\alpha-x)=\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha x-x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$$

Έτσι από την (1) έχουμε ότι και $y=\alpha$ και άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha+\beta=\gamma\in\mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta=\gamma-\alpha\in\mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.

ii) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\beta=\gamma\in\mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta=\dfrac{\gamma}{\alpha}\in\mathbb{Q}$ (ως πηλίκο ρητών), που είναι άτοπο.

§ 2.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $\alpha^2+9\geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-6\alpha+9\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-3)^2\geq 0$ που ισχύει.

ii) Είναι $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2\geq\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

2. Έχουμε $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει.
Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

3. i) Ισχύει $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ και $y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ και $y = -1$.

ii) Έχουμε $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ και $y + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ και $y = -2$.

4. i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες

$$4{,}5 < x < 4{,}6 \quad \text{και} \quad 5{,}3 < y < 5{,}4$$

οπότε έχουμε

$$4{,}5 + 5{,}3 < x + y < 4{,}6 + 5{,}4$$

δηλαδή $9{,}8 < x + y < 10$.

ii) Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει

$$-5{,}4 < -y < -5{,}3$$

και προσθέτουμε κατά μέλη με την $4{,}5 < x < 4{,}6$
οπότε έχουμε

$$4{,}5 - 5{,}4 < x - y < 4{,}6 - 5{,}3 \Leftrightarrow -0{,}9 < x - y < -0{,}7.$$

iii) Ισχύει $5{,}3 < y < 5{,}4$ οπότε

$$\frac{1}{5{,}3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5{,}4} \Leftrightarrow \frac{1}{5{,}4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5{,}3}$$

και άρα $4{,}5 \cdot \dfrac{1}{5{,}4} < x \cdot \dfrac{1}{y} < 4{,}6 \cdot \dfrac{1}{5{,}3} \Leftrightarrow \dfrac{45}{54} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{46}{53}$

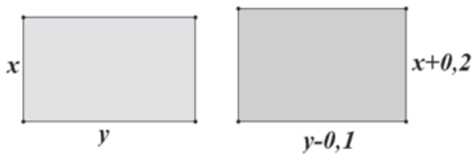
iv) Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο οπότε έχουμε

$$(4{,}5)^2 < x^2 < (4{,}6)^2 \Leftrightarrow 20{,}25 < x^2 < 21{,}16 \text{ και}$$
$$(5{,}3)^2 < y^2 < (5{,}4)^2 \Leftrightarrow 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$$

προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$$20{,}25 + 28{,}09 < x^2 + y^2 < 21{,}16 + 29{,}16 \Leftrightarrow 48{,}34 < x^2 + y^2 < 50{,}32.$$

5.



Για το x έχουμε:

$$2 + 0,2 < x + 0,2 < 3 + 0,2 \Leftrightarrow 2,2 < x + 0,2 < 3,2, \quad (1)$$

Για το y έχουμε:

$$3 - 0,1 < y - 0,1 < 5 - 0,1 \Leftrightarrow 2,9 < y - 0,1 < 4,9, \quad (2)$$

(i) Η περίμετρος τότε γίνεται

$$\Pi = 2(x + 0,2) + 2(y - 0,1) = 2(x + y + 0,1)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $5,1 < x + y + 0,1 < 8,1$ οπότε

$$2 \cdot 5,1 < 2(x + y + 0,1) < 2 \cdot 8,1 \Leftrightarrow 10,2 < \Pi < 16,2.$$

(ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται

$$E = (x + 0,2)(y - 0,1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε

$$2,2 \cdot 2,9 < (x + 0,2)(y - 0,1) < 3,2 \cdot 4,9 \Leftrightarrow 6,38 < E < 15,68.$$

6. Επειδή $(1 + \alpha)(1 + \beta) > 0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)(1+\beta) < \frac{\beta}{1+\beta}(1+\alpha)(1+\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad \text{που ισχύει.}$$

7. Ισχύει $5 - x < 0$ οπότε κατά την απλοποίησή του η ανισότητα αλλάζει φορά. Έτσι το σωστό είναι

$x(5 - x) > (5 + x)(5 - x) \Leftrightarrow x < 5 + x \Leftrightarrow 0 < 5$, που ισχύει.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή οι α, β, γ είναι θετικοί, έχουμε

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta > \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma > \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad \text{που ισχύει.}$$

ii) Ομοίως

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)\beta < \alpha(\beta + \gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma < \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma < \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta < \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 1, \text{ που ισχύει.}$$

2. Ισχύει $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - \alpha\beta - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \alpha(1 - \beta) - (1 - \beta) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(1 - \beta) > 0, \text{ που ισχύει, αφού } \alpha > 1 \text{ και } \beta < 1.$$

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

4. i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

§ 2.3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $|\pi - 3| = \pi - 3$, αφού $\pi > 3$.
ii) $|\pi - 4| = 4 - \pi$, αφού $\pi < 4$.
iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi| = \pi - 3 + 4 - \pi = 1$.
iv) $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 0$

2. Είναι $|x - 3| = x - 3$, αφού $x > 3$ και $|x - 4| = 4 - x$, αφού $x < 4$
οπότε $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 + 4 - x = 1$.

3. i) Αν $x < 3$, τότε ισχύει και $x < 4$, οπότε $x - 3 < 0$ και $4 - x > 0$.
Άρα είναι $|x - 3| - |4 - x| = (3 - x) - (4 - x) = 3 - x - 4 + x = -1$.

ii) Αν $x > 4$, τότε είναι και $x > 3$, οπότε $x - 4 > 0$ και $x - 3 > 0$.
Άρα έχουμε $|x - 3| - |4 - x| = x - 3 + (4 - x) = 1$.

4. Είναι $\dfrac{|\alpha - \beta|}{|\beta - \alpha|} = \dfrac{|\beta - \alpha|}{|\beta - \alpha|} = 1$.

5. • Αν $x > 0$ και $y > 0$, τότε $A = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1 + 1 = 2$

• Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε $A = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 1 - 1 = 0$

• Αν $x < 0$ και $y < 0$, τότε $A = \frac{-x}{x} - \frac{y}{y} = -1 - 1 = -2$

• Αν $x < 0$ και $y > 0$, τότε $A = \frac{-x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0$.

6. i) Ισχύει $d(2{,}37, D) \le 0{,}005$ (1)

ii) Ισχύει (1) $\Leftrightarrow |2{,}37 - D| \le 0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}37 - 0{,}005 \le D \le 2{,}37 + 0{,}005$
$\Leftrightarrow 2{,}365 \le D \le 2{,}375$.

7.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-4\| \le 2$	$d(x,4) \le 2$	$[2, 6]$
$\|x+3\| < 4$	$d(x,-3) < 4$	$(-7, 1)$
$\|x-4\| > 2$	$d(x,4) > 2$	$(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
$\|x+3\| \ge 4$	$d(x,-3) \ge 4$	$(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-5\| < 1$	$d(x,5) < 1$	$(4, 6)$
$\|x+1\| > 2$	$d(x,-1) > 2$	$(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
$\|x-5\| \ge 1$	$d(x,5) \ge 1$	$(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$
$\|x+1\| \le 2$	$d(x,-1) \le 2$	$[-3, 1]$

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x\| < 2$	$d(x,0) < 2$	$(-2, 2)$
$\|x+2\| \le 3$	$d(x,-2) \le 3$	$[-5, 1]$
$\|x\| \ge 2$	$d(x,0) \ge 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
$\|x+2\| > 3$	$d(x,-2) > 3$	$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε
$|\alpha - \beta| = |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \le |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και άρα $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ οπότε έχουμε:

i) $\dfrac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$ και

ii) $\dfrac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \dfrac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \dfrac{2\beta}{2} = \beta$.

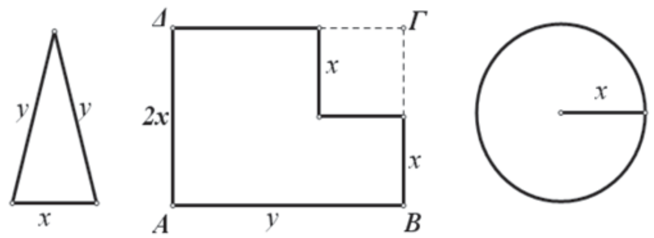
3. Επειδή $|x| \ge 0$ και $|y| \ge 0$, έχουμε:
$$|x| + |y| \ge 0$$
Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $|x| = 0$ και $|y| = 0$, δηλαδή $x = 0$ και $y = 0$. Διαφορετικά ισχύει η ανισότητα. Επομένως:
i) $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0$.
ii) $|x| + |y| > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$ ή $y \ne 0$.

4. i) Από $0 < \alpha < \beta$ προκύπτει ότι $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$ και $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$. Είναι δηλαδή $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1 < \dfrac{\beta}{\alpha}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right| < \left|1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right|$ ή, ισοδύναμα, ότι $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\beta}{\alpha} - 1$.

Επειδή $\alpha\beta > 0$ η ανισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα
$$\begin{aligned}\alpha\beta - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha\beta < \frac{\beta}{\alpha}\alpha\beta - \alpha\beta &\Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha^2 < \beta^2 - \alpha\beta \\ &\Leftrightarrow 0 < \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \\ &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 > 0, \text{ που ισχύει αφού } \alpha \ne \beta.\end{aligned}$$

5. Είναι $|x - 2| < 0{,}1 \Leftrightarrow 1{,}9 < x < 2{,}1$ (1) και
$|y - 4| < 0{,}2 \Leftrightarrow 3{,}8 < y < 4{,}2$ (2)



i) Η περίμετρος P_1 του τριγώνου είναι $P_1 = x + 2y$. Από την ανισότητα (2) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 2y < 8{,}4 \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3), έχουμε:

$1{,}9 + 7{,}6 < x + 2y < 2{,}1 + 8{,}4 \Leftrightarrow 9{,}5 < P_1 < 10{,}5$.

ii) Η περίμετρος P_2 του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, οπότε είναι $P_2 = 4x + 2y$. Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 4x < 8{,}4 \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (3), έχουμε:

$$7{,}6 + 7{,}6 < 4x + 2y < 8{,}4 + 8{,}4 \Leftrightarrow 15{,}2 < P_2 < 16{,}8.$$

iii) Η περίμετρος L του κύκλου είναι $L = 2\pi x$. Από την (1) προκύπτει

$$2\pi \cdot 1{,}9 < 2\pi x < 2\pi \cdot 2{,}1 \Leftrightarrow 3{,}8\pi < L < 4{,}2\pi.$$

§ 2.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$,

$\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$, $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$.

ii) $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$, $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$.

iii) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{10}$, $\sqrt[3]{0{,}001} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}} = \dfrac{1}{10}$,

$\sqrt[4]{0{,}0001} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{10000}} = \dfrac{1}{10}$, $\sqrt[5]{0{,}00001} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{100000}} = \dfrac{1}{10}$.

2. i) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi$.

ii) $\sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20$.

iii) $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$.

iv) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{|x|}{2}$.

3. Έχουμε

$$\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

4. $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=\left(\sqrt{x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2$

$= (x-5)-(x+3)$

$= x-5-x-3=-8,$

με την προϋπόθεση ότι $x-5\geq 0$ και $x+3\geq 0$, δηλαδή για $x\geq 5$.

5. i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)$

$=\left(\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{2\cdot 9}\right)\left(\sqrt{2\cdot 25}+\sqrt{2\cdot 36}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)$

$=\left(-\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}\right)=-7\left(\sqrt{2}\right)^2=-14.$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right)$

$=\left(\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{7}+\sqrt{2\cdot 16}\right)\left(\sqrt{7\cdot 9}-\sqrt{2\cdot 16}\right)$

$=\left(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)$

$=\left(3\sqrt{7}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2=9\cdot 7-16\cdot 2=63-32=31.$

6. i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

$=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9-5}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2.$

7. i) <u>1ος τρόπος:</u>

$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}\ .$

<u>2ος τρόπος:</u>

$\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt{\sqrt{2^{4/3}}}$

$=\sqrt{\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}=\sqrt{2^{2/3}}=\left(2^{2/3}\right)^{1/2}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}\ .$

ii) <u>1ος τρόπος:</u>

$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}$

$=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^{10}}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}.$

ii) 2ος τρόπος:

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}} = \sqrt[5]{2\sqrt{2^{4/3}}} = \sqrt[5]{2\cdot\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}$$

$$= \sqrt[5]{2\cdot 2^{2/3}} = \sqrt[5]{2^{5/3}} = \left(2^{5/3}\right)^{1/5} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.$$

8. i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}} = 3^{\frac{13}{12}} = 3\cdot 3^{\frac{1}{12}} = 3\sqrt[12]{3}.$

ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}} = 2^{\frac{16}{18}+\frac{15}{18}} = 2^{\frac{31}{18}} = 2\cdot 2^{\frac{13}{18}} = 2\sqrt[18]{2^{13}}.$

iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4} = 5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{6}} = 5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{6}} = 5^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}+\frac{4}{6}} = 5^{\frac{15}{6}} = 5^{\frac{5}{2}}$

$$= \sqrt{5^5} = 5^2\cdot\sqrt{5} = 25\sqrt{5}.$$

9. i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \dfrac{25\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{25\cdot 3}} = \dfrac{25\cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 10.$

ii) Με ανάλυση του 216 σε πρώτους παράγοντς βρίσκουμε $216 = 2^3\cdot 3^3$ οπότε έχουμε

$$\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2^3\cdot 3^3}\cdot\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{2\cdot 25}} = \frac{5\sqrt{2^3\cdot 3^4}}{5\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^3\cdot 3^4}{2}} = \sqrt{2^2\cdot 3^4} = 2\cdot 3^2 = 18.$$

10. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα με τη συζηγή παράσταση του παρονομαστή του έχουμε:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3} = \dfrac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{22} = \dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}.$

ii) $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \dfrac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5} = 4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$

iii) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \dfrac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{7-6} = \left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2$

$$= 7+6+2\sqrt{42} = 13+2\sqrt{42}.$$

11. i) Αν αναλύσουμε τους 162 και 98 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε $162 = 2 \cdot 3^4$ και $98 = 2 \cdot 7^2$ οπότε είναι

$$\frac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} - \sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^4} + \sqrt{2 \cdot 7^2}}{\sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 16}} = \frac{9\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16.$$

ii) Είναι $9^{12} + 3^{20} = 9^{12} + (3^2)^{10} = 9^{12} + 9^{10} = 9^{10} \cdot (9^2 + 1) = 82 \cdot 9^{10}$.

και $9^{11} + 27^6 = 9^{11} + (3 \cdot 9)^6 = 9^{11} + 3^6 \cdot 9^6 = 9^{11} + (3^2)^3 \cdot 9^6$

$= 9^{11} + 9^9 = 9^9(9^2 + 1) = 82 \cdot 9^9$

οπότε έχουμε

$$\sqrt{\frac{9^{12} + 3^{20}}{9^{11} + 27^6}} = \sqrt{\frac{82 \cdot 9^{10}}{82 \cdot 9^9}} = \sqrt{9} = 3.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\dfrac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \dfrac{9 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 4}{3 - 2} = 5 + \sqrt{6}.$

ii) $\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \dfrac{(\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha\beta} - \beta\sqrt{\alpha\beta} - \beta^2}{\alpha - \beta}$

$$= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta}\,(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta + \sqrt{\alpha\beta}.$$

2. i) Αξιοποιώντας γνωστές ταυτότητες έχουμε:

$(3 + 2\sqrt{7})^2 = 9 + 4 \cdot 7 + 12\sqrt{7} = 37 + 12\sqrt{7}$ και

$(3 - 2\sqrt{7})^2 = 9 + 4 \cdot 7 - 12\sqrt{7} = 37 - 12\sqrt{7}.$

ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) παίρνουμε

$$\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - \sqrt{37 - 12\sqrt{7}}$$
$$= \sqrt{(3 + 2\sqrt{7})^2} - \sqrt{(3 - 2\sqrt{7})^2}$$
$$= |3 + 2\sqrt{7}| - |3 - 2\sqrt{7}| = 3 + 2\sqrt{7} - (2\sqrt{7} - 3) = 6.$$

3. i) Είναι

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{25}{6}$$

που είναι ρητός αριθμός.

ii) Είναι

$$\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$=\alpha+\frac{1}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+1+2\alpha}{\alpha}=\frac{\left(\alpha+1\right)^2}{\alpha}$$

που είναι ρητός αριθμός.

4. i) Μετατρέποντας τους παρονομαστές σε ρητούς έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}+3+5-\sqrt{5}\,\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

ii) Είναι

- $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$ και
- $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ οπότε

Έχουμε

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}-\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}-\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

5. i) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε
$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=\alpha+\beta$, οπότε $B\Gamma=\sqrt{\alpha+\beta}$.

ii) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει $B\Gamma < AB + A\Gamma$ που σημαίνει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\le\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta\le\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\Leftrightarrow 0\le 2\sqrt{\alpha\beta}$, που ισχύει.

Το “=” ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$.