

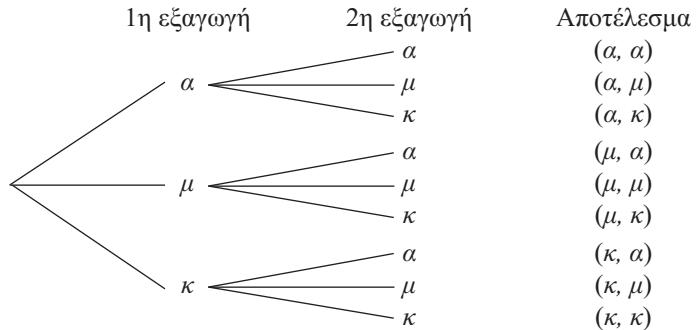
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 1.1. Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε:

i)

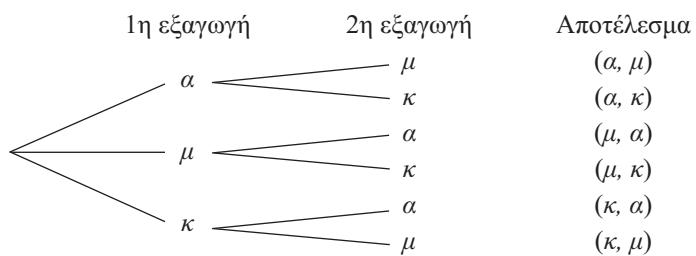


$$\Omega = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \mu), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$

iii) $\{(\alpha, \alpha), (\mu, \mu), \kappa, \kappa\}$.

2. i)

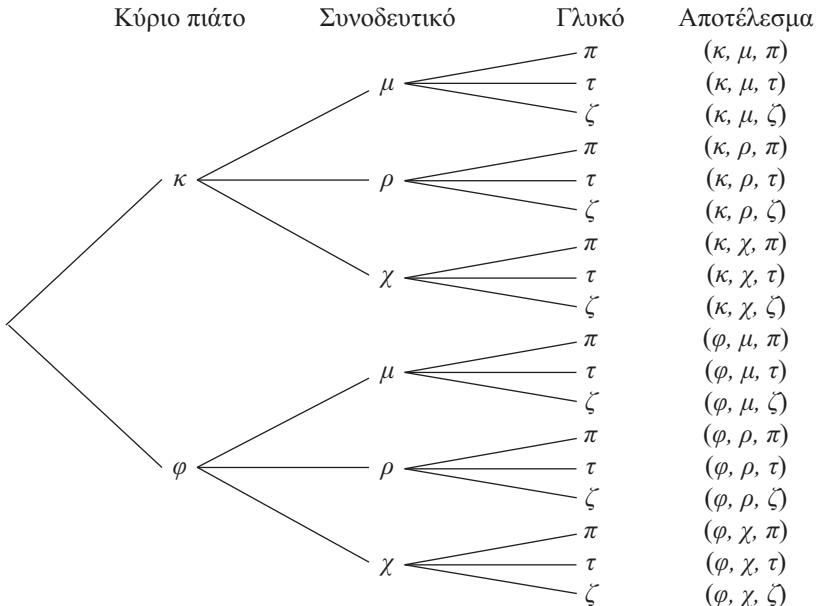


$$\Omega = \{(\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$

iii) \emptyset .

3. i) $\Omega = \{(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)\}$.
ii) $A = \{(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)\}$.
4. i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



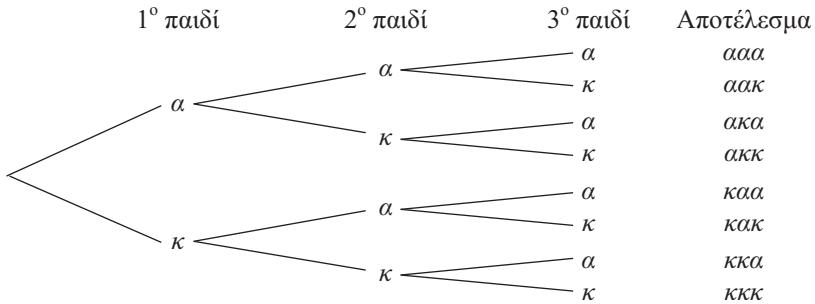
Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης “αποτέλεσμα” αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος:

- ii) $A = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi), (\varphi, \mu, \pi), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \chi, \pi)\}$
iii) $B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \mu, \tau), (\kappa, \mu, \zeta), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \zeta), (\kappa, \chi, \pi), (\kappa, \chi, \tau), (\kappa, \chi, \zeta)\}$
iv) $A \cap B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi)\}$
v) $\Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \tau), (\kappa, \rho, \zeta), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \rho, \tau), (\varphi, \rho, \zeta)\}$
 $(A \cap B) \cap \Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi)\}$.

5. i) $\Omega = \{(0, \alpha), (0, \beta), (0, \gamma), (0, \delta), (1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$
ii) $A = \{(0, \gamma), (0, \delta)\}$
iii) $B = \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$
iv) $\Gamma = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$.
6. i) $A = \{3\}, B = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \emptyset$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \emptyset$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

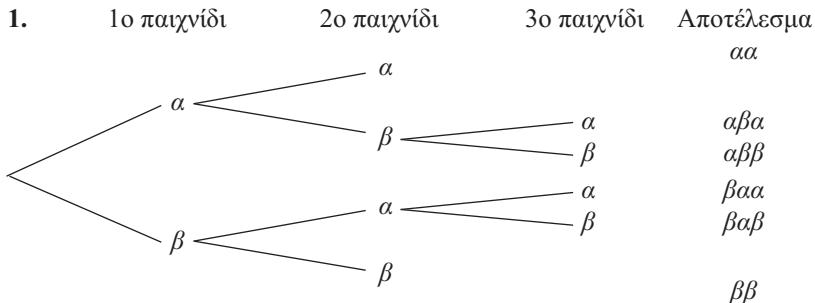
- iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \emptyset$.
 iv) $A \cap B = \emptyset$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

7.



$$\Omega = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\kappa, \alpha\kappa\alpha, \alpha\kappa\kappa, \kappa\alpha\alpha, \kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \kappa\kappa\kappa\}.$$

B' ΟΜΑΔΑΣ



$$\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta\beta, \beta\alpha\alpha, \beta\alpha\beta, \beta\beta\}.$$

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα

$$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}.$$

$$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}.$$

$$\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}.$$

$$A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}.$$

$$A \cap \Gamma = \{(2,1), (3,1), (4,1)\}.$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3,1)\}.$$

§ 1.2. Έννοια της πιθανότητας

A' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\text{ίση με } \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

- ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου

$$\text{ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με } 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}.$$

2. Αν Γ το αποτέλεσμα “γράμματα” και K το αποτέλεσμα “κεφαλή”, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma K, K\Gamma, KK\}$ και υπάρχει μια ευνοϊκή περίπτωση η $\Gamma\Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{4}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά $10 + 15 + 5 + 10 = 40$ μπάλες.

- i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη

$$\frac{15}{40}.$$

- ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανό-

$$\text{τητα είναι ίση με } \frac{10 + 15}{40} = \frac{25}{40}.$$

- iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{10 + 15}{40} = \frac{25}{40}.$$

4. Η τάξη έχει συνολικά $4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30$ μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώ-

σει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{9}{30}$.

5. Έχουμε $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A = \{12, 15, 18\}$ και $B = \{12, 16, 20\}$. Επομένως

$$\text{i) } P(A) = \frac{3}{11}. \quad \text{ii) } \text{Έχουμε } P(B) = \frac{3}{11}, \text{ αρα } P(B') = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

6. Αν A , P και N είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και

$$\text{ο Νίκος αντιστοίχως, τότε } P(A) = \frac{30}{100}, \quad P(P) = \frac{20}{100} \quad \text{και} \quad P(N) = \frac{40}{100}.$$

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$\text{i) } P(A \cup P) = P(A) + P(P) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100}, \text{ δηλαδή } 50\%.$$

$$\text{ii) } P(A \cup N)' = 1 - P(A \cup N) = 1 - P(A) - P(N) = 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} = \frac{30}{100}, \\ \text{δηλαδή } 30\%.$$

7. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$\frac{17}{30} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - \frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{14}{30} - \frac{20}{30} = \frac{11}{30}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$\frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$2P(A) - 0,2 = 0,6$$

$$2P(A) = 0,8$$

$$P(A) = 0,4.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

11. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq P(A \cap B) \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

12. Εστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V .

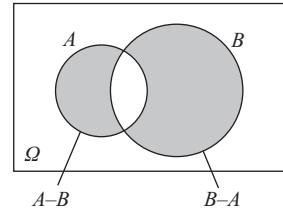
Έχουμε $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{55}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{15}{100}$. Επομένως

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100} = \frac{65}{100}, \text{ δηλαδή } 65\%. \end{aligned}$$

13. Εστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο.

Έχουμε

$$P(A) = \frac{10}{100}, P(B) = \frac{6}{100} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{2}{100}.$$



α) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%. \end{aligned}$$

β) Το ενδεχόμενο να έχει το áτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A - B) \cup (B - A)$.

Τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{4}{100} = \frac{12}{100}, \text{ δηλαδή } 12\%. \end{aligned}$$

- 14.** Έστω A το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και B το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά.

$$\text{Έχουμε } P(A) = \frac{80}{100}, \quad P(B) = \frac{30}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{20}{100}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{80}{100} - \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{10}{100}, \quad \text{δηλαδή } 10\%. \end{aligned}$$

B' ΟΜΑΔΑΣ

- 1.** i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \kappa + \lambda - \mu$
ii) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \kappa - \lambda + \mu$
iii) $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$
 $= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
 $= \kappa + \lambda - 2\mu.$

- 2.** Αν A και B τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο

$$\text{αντιστοίχως, θα είναι } P(A) = \frac{15}{100} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{40}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{10}{100}.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P((A \cup B)') &= 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left(\frac{15}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} \right) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}, \quad \text{δηλαδή } 55\%. \end{aligned}$$

- 3.** Έχουμε διαδοχικά
- $$\begin{aligned} \frac{P(A)}{P(A')} &= \frac{3}{4} \\ \frac{P(A)}{1 - P(A)} &= \frac{3}{4} \\ 4P(A) &= 3 - 3P(A) \\ 7P(A) &= 3, \\ P(A) &= \frac{3}{7}, \quad P(A') = 1 - P(A) = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

4. Αν $P(A) = x$, τότε $P(A') = 1 - x$, όπου $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } \frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} &\geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 4 \\ &\Leftrightarrow 1-x+x \geq 4x(1-x) \\ &\Leftrightarrow 1-x+x \geq 4x-4x^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

5. • Έχουμε

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \\ P(A \cap B) &\leq P(A) \\ P(A \cap B) &\leq 0,6 \end{aligned} \tag{1}$$

• Έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &\leq 1 \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \\ 0,6 + 0,7 - P(A \cap B) &\leq 1 \\ 0,6 + 0,7 - 1 &\leq P(A \cap B) \\ 0,3 &\leq P(A \cap B) \end{aligned} \tag{2}$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6.$$

6. $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \leq P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P(B) + P(A) - P(A \cap B) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1 \quad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$