ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
*ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ*
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

**1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ**

ΜΑΘΗΜΑ 9$^{Ο}$

Αναγωγή

στο 1$^{Ο}$

τεταρτημόριο

# Το

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

## 1. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

ΓΩΝΙΕΣ
**ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ**
**x, − x**

ίδιο συνημίτονο

**συν ( − x )** = συνx
**ημ ( − x )** = − ημx
**εφ ( − x )** = − εφx
**σφ ( − x )** = − σφx

ΓΩΝΙΕΣ
**ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ**
$\mathbf{x,\ \frac{\pi}{2} - x}$

εναλλάξ

$\mathbf{συν\,(\frac{\pi}{2} - x)} = ημx$
$\mathbf{ημ\,(\frac{\pi}{2} - x)} = συνx$
$\mathbf{εφ\,(\frac{\pi}{2} - x)} = σφx$
$\mathbf{σφ\,(\frac{\pi}{2} - x)} = εφx$

ΓΩΝΙΕΣ
**ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ**
**x, π − x**

ίδιο ημίτονο

**συν ( π − x )** = − συνx
**ημ ( π − x )** = ημx
**εφ ( π − x )** = − εφx
**σφ ( π − x )** = − σφx

ΓΩΝΙΕΣ
**ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ π**
**x, π + x**

ίδια εφαπτομένη & συνεφαπτομένη

**συν ( π + x )** = − συνx
**ημ ( π + x )** = − ημx
**εφ ( π + x )** = εφx
**σφ ( π + x )** = σφx

### Ένας μνημονικός κανόνας

**Πολλαπλάσια του π**

Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π, 3π και γενικά πολλαπλάσια του π τότε έχουν ομώνυμους (ίδιους) τριγωνομετρικούς αριθμούς. Για τον υπολογισμό του προσήμου χρειάζεται να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο. Σκεφτόμαστε ειδικότερα:

**α.** Τα **περιττά** πολλαπλάσια του π καταλήγουν πάντα στο π του τριγωνομετρικού κύκλου, συνεπώς χρησιμοποιούμε τη θέση αυτή για σημείο αναφοράς.

**β.** Τα **άρτια** πολλαπλάσια του π είναι απλά πολλαπλάσια ολόκληρων κύκλων, συνεπώς απλά τα αγνοούμε.

## Πολλαπλάσια του $\pi/2$

Όταν δύο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά $\pi/2$, $3\pi/2$ και γενικά (περιττά) πολλαπλάσια του $\pi/2$ τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται (ημ με συν και εφ με σφ). Για να βρούμε το πρόσημο, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος, που μας δίνεται, με το 4 (έτσι βρίσκουμε και απορρίπτουμε τους παραπανίσιους κύκλους) και κρατάμε το υπόλοιπο. Αν το τελευταίο είναι 1 τότε πηγαίνουμε στο $\pi/2$, αν είναι 3 στο $3\pi/2$.

**Παρατήρηση:** Για **άρτια** πολλαπλάσια του $\pi/2$ εκτελούμε απλά τη διαίρεση με το 2 και αναγόμαστε σε πολλαπλάσιο του $\pi$.

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

# ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

$Μ_1$: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν αρνητικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

- ημ(-ω)=-ημω
- εφ(-ω)=-εφω
- συν(-ω)=συνω
- σφ(-ω)=-σφω

$Μ_2$: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν παραπληρωματικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

- ημ($180^o$-ω)=ημω
- εφ($180^o$-ω)=-εφω
- συν($180^o$-ω)=-συνω
- σφ($180^o$-ω)=-σφω

$Μ_3$: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν γωνίες που διαφέρουν κατά $180^o$ πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

- ημ($180^o$+ω)=-ημω
- εφ($180^o$+ω)=εφω
- συν($180^o$+ω)=-συνω
- σφ($180^o$+ω)=σφω

$Μ_4$: Για να υπολογίσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς που περιέχουν συμπληρωματικές γωνίες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:

- ημ($90^o$-ω)=συνω
- εφ($90^o$-ω)=σφω
- συν($90^o$-ω)=ημω
- σφ($90^o$-ω)=εφω

$M_5$: Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική παράσταση που περιέχει διάφορες γωνίες:

α) Υπολογίζουμε τον κάθε τριγωνομετρικό αριθμό χωριστά.
β) Αντικαθιστούμε την τιμή που βρίσκουμε στην παράσταση.
γ) Καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

$M_6$: Για να αποδείξουμε μια ανισότητα που περιέχει διάφορες γωνίες:

α) Υπολογίζουμε τον κάθε τριγωνομετρικό αριθμό χωριστά.
β) Αντικαθιστούμε την τιμή που βρίσκουμε στην παράσταση.
γ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα έχοντας υπόψη ότι:

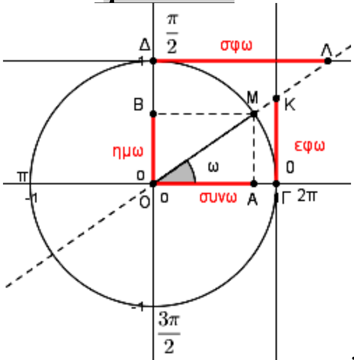
- $-1 \leq$ συνx $\leq 1$
- $-1 \leq$ ημx $\leq 1$
- Τον πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω.

# ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

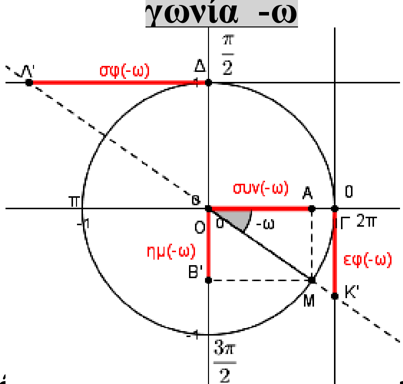
ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΕΠΑΛ

## ΓΩΝΙΕΣ ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ

γωνία ω




γωνία -ω




ημ(-ω) = - ημω

συν(-ω) = συνω

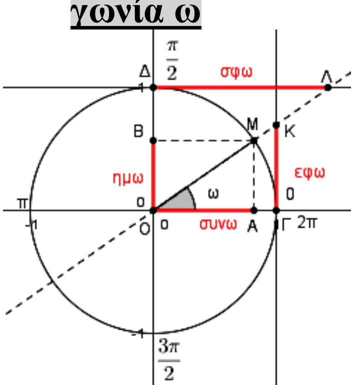
εφ(-ω) = - εφω

σφ(-ω) = - σφω

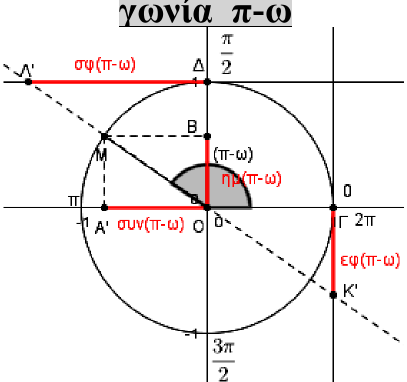
- ιδιο συνημιτονο, αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

## ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 180$^0$

γωνία ω




γωνία π-ω




ημ(π- ω) = ημω

συν(π- ω) = - συνω

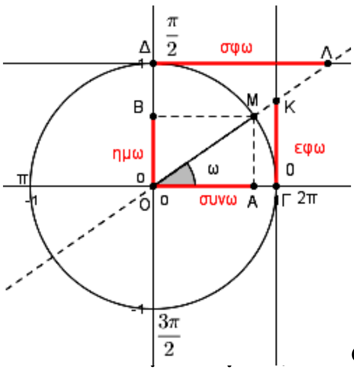
εφ(π- ω) = - εφω

σφ(π- ω) = - σφω

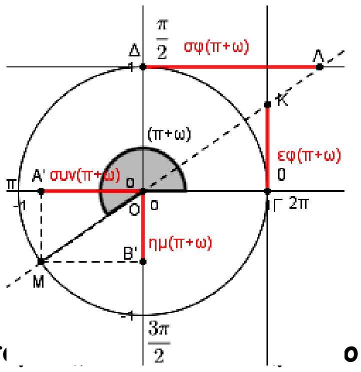
- ιδιο ημιτονο, αντιθετους όλους τους αλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

## ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ 180$^0$

γωνία ω




γωνία π+ω




ημ(π+ω) = -ημω

συν(π+ω) = - συνω

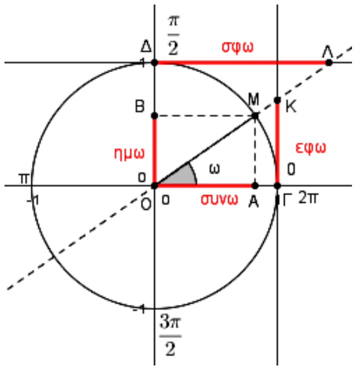
εφ(π+ω) = εφω

σφ(π+ω) = σφω

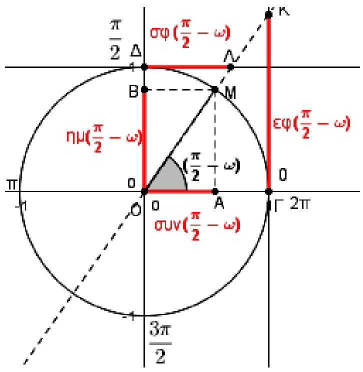
συνεφαπτ… ο και συνημίτονο

## ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $90^0$

γωνία ω




γωνία $\frac{\pi}{2}$ - ω




$$ημ(\frac{\pi}{2} - ω) = συνω$$

$$συν(\frac{\pi}{2} - ω) = ημω$$

$$εφ(\frac{\pi}{2} - ω) = σφω$$

$$σφ(\frac{\pi}{2} - ω) = εφω$$

- **Το ημίτονο της μίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μίας ισούται με την συνεφαπτομένη της άλλης.**

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}}\,rad$.

Απάντηση:

Τα $\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}}\,rad$ γράφονται :

$$\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}} = \frac{186\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 31\pi + \frac{\pi}{6} = 30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 15\cdot 2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

Άρα $\quad \mathbf{ημ}\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}} = ημ\left(\cancel{15\cdot 2\pi} + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = ημ\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -ημ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

και $\quad \mathbf{συν}\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}} = συν\left(\cancel{15\cdot 2\pi} + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = συν\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -συν\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

και $\quad \mathbf{εφ}\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}} = εφ\left(\cancel{15\cdot 2\pi} + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = εφ\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = εφ\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

και $\quad \mathbf{σφ}\frac{\mathbf{187\pi}}{\mathbf{6}} = σφ\left(\cancel{15\cdot 2\pi} + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = σφ\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = σφ\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\mathbf{21\pi}}{\mathbf{4}}\,rad$.

Απάντηση:

Τα $\frac{21\pi}{4}rad$ γράφονται : ..........................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**3.** Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^0+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^0-\alpha)}$.

<u>Απάντηση:</u>

αντικαθιστούμε το:

$\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=$................ $\sigma\upsilon\nu(180^0+\alpha)=$................ $\eta\mu(-\alpha)=$................
$\eta\mu(90^0-\alpha)=$................

και έχουμε: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^0+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^0-\alpha)}=\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=$

**4.** Να δείξετε ότι : $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{9\pi}{2}-x)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi(\frac{21\pi}{2}-x)}=1$.

<u>Απάντηση:</u>

αντικαθιστούμε το:

$\varepsilon\varphi(\pi-x)=$................ $\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)=$................ $\sigma\upsilon\nu(\frac{9\pi}{2}-x)=$................

$\eta\mu(13\pi+x)=$................ $\sigma\upsilon\nu(-x)=$................ $\sigma\varphi(\frac{21\pi}{2}-x)=$................

και έχουμε: $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{9\pi}{2}-x)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi(\frac{21\pi}{2}-x)}=\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**5.** Σε κάθε τρίγωνο να δείξετε ότι : $\eta\mu \mathrm{A} = \eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)$ .

<u>Απάντηση:</u>

Γνωρίζουμε ότι: $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=\pi$ επομένως $\hat{\mathrm{A}}=\pi-\left(\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}\right)$

Άρα $\eta\mu\ \hat{\mathrm{A}}=\eta\mu\left[\pi-\left(\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}\right)\right]=$ ................................

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

**1.** Να αποδείξετε ότι : $εφ(90^\circ - ω) = \dfrac{1}{εφω}$

**2.** Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$Α = συν^2\, 0^\circ + συν^2\, 30^\circ + συν^2\, 45^\circ + συν^2\, 60^\circ + συν^2\, 90^\circ$

$Β = \dfrac{2 \cdot συν180^\circ - 3 \cdot ημ270^\circ + εφ0^\circ}{2 - 3 \cdot ημ180^\circ}$

**3.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $210^\circ$, $135^\circ$, $330^\circ$

**4.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $150^\circ$, $120^\circ$

**5.** Αν $0^\circ < x < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$Α = ημx \cdot συν(180^\circ - x) + συνx \cdot ημ(180^\circ - x)$

**6.** Αν $0^\circ < x < 180^\circ$, να λύσετε τις εξισώσεις:

$2 \cdot ημ^2x - 2\sqrt{2}\,ημx + 1 = 0$ και $2 \cdot συν^2x - 3 \cdot συνx - 2 = 0$

**7.** Να εξηγήσετε γιατί είναι:

$ημ(90^\circ + x) = συνx$ και $συν(90^\circ + x) = -\,ημx$

**8.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$Α = \dfrac{ημ(90^\circ - θ) \cdot συν(180^\circ - θ) \cdot εφθ}{εφ(180^\circ - θ) \cdot ημ(90^\circ + θ) \cdot συνθ}$

$Β = \dfrac{ημ(180^\circ - θ) \cdot συν(90^\circ + θ) \cdot εφθ}{εφ(180^\circ - θ) \cdot ημ(90^\circ - θ)}$

**9.** Να αποδείξετε ότι:

- $ημ^2\, 27^\circ + συν^2\, 153^\circ = 1$
- $συν^2\, 16^\circ + συν^2\, 74^\circ = 1$

**10.** Αν $2 \cdot συν^2x + 3 \cdot συνx - 2 = 0$ και $0^\circ < x < 360^\circ$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.