ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 8Ο

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \qquad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

Επίσης, πολύ χρήσιμες είναι οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

M_1: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, εφω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός ημω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ υπολογίζουμε το συνω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ υπολογίζουμε την εφω.

γ) Από τον τύπο $σφω=\frac{συνω}{ημω}$ ή $σφω=\frac{1}{εφω}$ υπολογίζουμε την σφω.

M_2: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, εφω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός συνω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ υπολογίζουμε το συνω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ υπολογίζουμε την εφω.

γ) Από τον τύπο $σφω=\frac{συνω}{ημω}$ ή $σφω=\frac{1}{εφω}$ υπολογίζουμε την σφω.

M_3: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, ημω και σφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός εφω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $εφω \cdot σφω = 1$ βρίσκουμε τη σφω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ επιλύουμε ως προς ημω και προκύπτει η σχέση $ημω=εφω \cdot συνω$ (1).

γ) Αντικαθιστούμε την (1) στον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και υπολογίζουμε το συνω.

δ) Αντικαθιστούμε το συνω στην (1) και βρίσκουμε το ημω.

M_4: Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνω, ημω και εφω όταν είναι γνωστός ο τριγωνομετρικός αριθμός σφω και το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω κάνουμε τα εξής:

α) Από τον τύπο $εφω \cdot σφω = 1$ βρίσκουμε την εφω.

β) Από τον τύπο $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ επιλύουμε ως προς ημω και προκύπτει η σχέση $ημω=εφω \cdot συνω$ (1).

γ) Αντικαθιστούμε την (1) στον τύπο $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και υπολογίζουμε το συνω.
δ) Αντικαθιστούμε το συνω στην (1) και βρίσκουμε το ημω.

$Μ_5$: Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο Μ(x,y) είναι σημείο κύκλου:
α) Βρίσκουμε τα x^2, y^2.
β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις.
γ) Κάνουμε πράξεις έχοντας υπόψη ότι $ημ^2ω+συν^2ω=1$.
δ) Καταλήγουμε στη μορφή $x^2+y^2=ρ$ που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου Κ(0,0) και ακτίνας ρ.

$Μ_6$: Για να αποδείξουμε μια τριγωνομετρική ταυτότητα, εργαζόμαστε γενικά όπως στις ταυτότητες έχοντας υπόψη και τους τύπους:

- $ημ^2ω+συν^2ω=1$
- $εφω=\frac{ημω}{συνω}$
- $σφω=\frac{συνω}{ημω}$
- $εφω \cdot σφω = 1$
- $συν^2ω=\frac{1}{1+εφ^2ω}$
- $ημ^2ω=\frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$

$Μ_7$: Για να αποδείξουμε ότι μια τριγωνομετρική παράσταση είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής ή είναι σταθερή αρκεί να υπολογίσουμε ότι η τιμή της είναι πραγματικός αριθμός.

$Μ_8$: Για να αποδείξουμε μια ισότητα που περιέχει ρίζες πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι:
α) $\sqrt{x^2} = |x|$.
β) Τον πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών.
γ) Τους τριγωνομετρικούς τύπους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1. Να εξηγήσετε γιατι δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε:

- ημx = 0 και συνx = 0
- ημx = 1 και συνx = 1

2. Να υπολογίσετε την γωνία ω εάν $90^\circ < ω < 180^\circ$ και:

- 4ημx = – 3συνx
- $ημ^2x = 4·συν^2x$

3. Να βρείτε τη γωνία x και τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς αν δίνεται ότι $0^\circ < x < 180^\circ$ και:

- $5·ημ^2x – 2 = συν^2x$
- $1 + εφ^2x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4συν^2x}$

4. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- $ημ90^\circ = συν0^\circ = εφ45^\circ$
- $ημ90^\circ = \frac{1}{2}ημ180^\circ$
- Αν $270^\circ < x < 360^\circ$ τότε ημx = $\sqrt{1-συν^2x}$
- Αν $180^\circ < x < 270^\circ$ τότε συνx = $-\sqrt{1-ημ^2x}$
- $2·ημ45^\circ = ημ90^\circ$
- $ημ60^\circ = συν150^\circ$
- $συν60^\circ = ημ150^\circ$
- $συν30^\circ + συν45^\circ + συν60^\circ = ημ120^\circ + ημ135^\circ + ημ150^\circ$
- Αν συν2x = 1 , τότε συνx = $\frac{1}{2}$
- Αν $90^\circ < x < 180^\circ$, τότε συνx = $-\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2x}}$

Απάντηση → Σωστές : 1 , 4 , 7 , 8 , 10

5. Να δείξετε ότι για κάθε γωνία x ισχύει:

$$-2 < ημx + συνx < 2$$

6. Αν εφθ = $\sqrt{2}$, $0^\circ < θ < 90^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$Α = εφθ + ημ(180^\circ – θ) – συν(90^\circ – θ)$

$B = ημθ + ημ(90° - θ) - 2·συν(180° - θ)$

7. Να αποδείξετε ότι:

- $ημ^4x - συν^4x = ημ^2x - συν^2x = 1 - 2συν^2x = 2ημ^2x - 1$
- $ημ^2x = \dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$
- $(1 - ημ^2x)(1 + εφ^2x) = 1$
- $1 - \dfrac{συν^2x}{1+ημx} = ημx$
- $(2x·συνθ·ημθ)^2 + x^2·(συν^2θ - ημ^2θ)^2 = x^2$
- $(x·ημω·συνφ)^2 + (x·ημω·ημφ)^2 + (x·συνω)^2 = x^2$
- $ημ^3ω + συν^3ω = (ημω + συνω)·(1 - ημω·συνω)$
- $\dfrac{συν^2ω - ημ^2ω}{ημω\cdot συνω} = \dfrac{1-εφ^2ω}{εφω}$
- $ημ^3θ·συνθ - ημ^5θ·συνθ = ημ^3θ·συν^3θ$
- $εφ^2x - ημ^2x = εφ^2x·ημ^2x$
- $\dfrac{συνx}{συνx-ημx} = \dfrac{1}{1-εφx}$
- $\dfrac{ημx}{1+συνx} = \dfrac{1-συνx}{ημx}$
- $\dfrac{1+ημx}{συνx} = \dfrac{συνx}{1-ημx}$
- $\dfrac{συνx}{1+ημx} + εφx = \dfrac{1}{συνx}$
- $\dfrac{ημx}{1-συνx} + \dfrac{συνx}{ημx} = \dfrac{1}{ημx}$
- $συνθ = \dfrac{ημθ}{εφθ}$
- $\dfrac{ημ^3ω + ημω\cdot συν^2ω}{συνω} = εφω$
- $\dfrac{1}{1-ημω} + \dfrac{1}{1+ημω} = \dfrac{2}{συν^2ω}$
- $εφω = \dfrac{1}{ημω\cdot συνω} - \dfrac{1}{εφω}$

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = (ημx + συνx)^2 + (ημx - συνx)^2$

$$B = \frac{εφθ \cdot συν(90^\circ + θ) \cdot ημ(180^\circ - θ)}{ημθ \cdot συν(90^\circ - θ) \cdot εφ(180^\circ - θ)}$$

$Γ = ημ^4α - συν^4α + 2 \cdot συν^2α$