

Το

8^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ



Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$

λέγονται **ισοδύναμα** όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

Επειδή εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι ίσα και μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$



Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$

είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστί γινόμενα»:
 $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

Δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή) λέγεται **ανάγωγο**.

Ένα κλάσμα είναι ανάγωγο όταν ο ΜΚΔ του αριθμητή και παρονομαστή είναι 1.



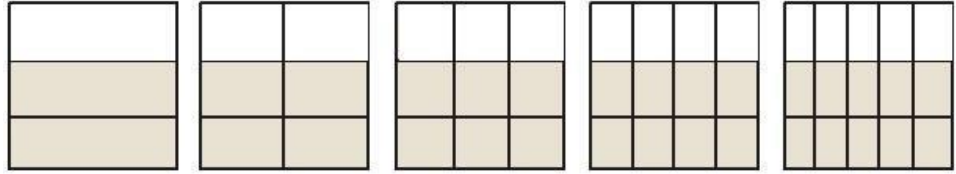
Το επίθετο ανάγωγο στα μαθηματικά προέρχεται από τη λέξη αναγωγή, δεν σχετίζεται με τη λέξη αν-αγωγή.



Για να ελέγξετε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα χρειάζεται να υπολογίσετε αν τα «χιαστί γινόμενα» είναι ίσα.

1. Δραστηριότητα

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη.



(α) Προσπαθήστε να βρείτε για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του;

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
|--|--|--|--|--|

(β) Στη συνέχεια συγκρίνετε τα κλάσματα, που θα βρείτε μεταξύ τους.

Τι παρατηρείτε για τα κλάσματα που βρήκατε;

.....

.....

.....

2. Να γράψετε δύο ισοδύναμα κλάσματα.

.....

.....

.....

3. Να εξετάσετε αν τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{10}{14}$ είναι ισοδύναμα. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mpa2 2.ggb](http://mpa2.2.ggb).

.....

.....



Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται ομώνυμα και όταν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές ονομάζονται ετερόνυμα.



Για να μετατρέψετε σε ομώνυμα δύο ή περισσότερα κλάσματα:

1. Ελέγχετε αν τα κλάσματα απλοποιούνται.
2. Αν απλοποιούνται τα κάνετε ανάγωγα.
3. Βρίσκετε το ΕΚΠ των παρονομαστών των ανάγωγων κλασμάτων.
4. Διαιρείτε το ΕΚΠ με τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος.
5. Πολλαπλασιάζετε τους δύο όρους κάθε κλάσματος επί τον αντίστοιχο αριθμό που βρήκατε.

16. Δίνονται τα κλάσματα $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{3}$ και $\frac{4}{14}$. Να εξετάσετε αν κάποια από τα κλάσματα είναι ομώνυμα.

.....

.....

.....

17. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

18. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ και $\frac{5}{20}$.

.....

.....

.....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

8. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις με τον κατάλληλο αριθμό.
- Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρανομαστή του τότε αυτό είναι ίσο με τον αριθμό
 - Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι διπλάσιος από τον παρανομαστή τότε αυτό το κλάσμα είναι ίσο με τον αριθμό
 - Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι τριπλάσιος από τον παρανομαστή τότε αυτό το κλάσμα είναι ίσο με τον αριθμό
 - Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι δεκαπλάσιος από τον παρανομαστή τότε αυτό το κλάσμα είναι ίσο με τον αριθμό
9. Μοιράζουμε 289 € σε 50 άτομα.
- α) Να γράψετε σε κλάσμα τα € που θα πάρει ο καθένας
 - β) Να γράψετε σε δεκαδικό αριθμό τα € που θα πάρει ο καθένας
 - γ) Να βρείτε με ποιον τρόπο θα δώσουμε στον καθένα όσο το δυνατό λιγότερα κέρματα.
10. Θέλουμε να μοιράσουμε δύο πίτσες σε τρία άτομα
- α) Σε πόσα το λιγότερο ίσα κομμάτια θα κόψουμε την κάθε πίτσα ώστε να την μοιραστούν εξίσου τα τρία άτομα;
 - β) Ποιο μέρος της πίτσας θα πάρει ο καθένας;
 - γ) Ποιο μέρος από τις δύο πίτσες θα πάρει ο καθένας;
11. Να γράψετε με τη μορφή κλάσματος τους παρακάτω αριθμούς:
- $5 = \frac{\dots}{\dots}$
 - $0,1 = \frac{\dots}{\dots}$
 - $0 = \frac{\dots}{\dots}$
 - $1 = \frac{\dots}{\dots}$
 - $0,7 = \frac{\dots}{\dots}$
 - $1,5 = \frac{\dots}{\dots}$

12. Στις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση (τα κλάσματα έχουν όρους φυσικούς αριθμούς).

- Στο κλάσμα $\frac{3}{x}$ η μεταβλητή x δεν μπορεί να πάρει σαν τιμή τον αριθμό
 A: 0 B: 1 Γ: 3 Δ: 4
- Στο κλάσμα $\frac{7}{x-1}$ η μεταβλητή x δεν μπορεί να πάρει σαν τιμές τους αριθμούς:
 A: 8 , 2 B: 7 , 8 Γ: 0 , 1 Δ: 2 , 3
- Στο κλάσμα $\frac{x+3}{2-x}$ η μεταβλητή x μπορεί να είναι ο αριθμός:
 A: 2 B: 3 Γ: 4 Δ: 0
- Το κλάσμα $\frac{x-1}{x-1}$ είναι ίσο με το 1:
 A: Πάντα B: Μόνο αν x φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1

15. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει το κλάσμα $\frac{2x+1}{3-x}$ στο οποίο οι όροι του είναι φυσικοί αριθμοί.

16. Να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x (αναλυτικά), στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-1}{2} = 0$$

$$\beta) \frac{x-1}{2} = 1$$

$$\gamma) \frac{x-1}{2} = 2$$

$$\delta) \frac{7-x}{3} = 2$$

$$\epsilon) \frac{2x-3}{5} = 1$$

$$\sigma\tau) \frac{3x-2}{6} = 0$$

17. Να κάνετε τους παρακάτω δεκαδικούς κλάσματα με παρανομαστές δυνάμεις του 10 (1,10,100,1000,...). Κατόπιν με τη διαδικασία της απλοποίησης να μετατραπούν σε ανάγωγα.

- 0,5
- 0,6
- 1,25
- 0,25
- 0,3
- 2,5
- 0,125
- 0,45
- 4,75
- 0,4
- 0,175
- 8,125
- 0,75

18. Να κάνετε δεκαδικούς τα παρακάτω κλάσματα αφού πρώτα τα κάνετε δεκαδικά κλάσματα, (δηλαδή κλάσματα με παρανομαστή 10,100,1000...) πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό τους όρους των:

- $\frac{1}{5}$
- $\frac{3}{50}$
- $\frac{43}{25}$
- $\frac{49}{2}$
- $\frac{7}{8}$
- $\frac{7}{4}$
- $\frac{8}{125}$
- $\frac{19}{20}$
- $\frac{387}{500}$
- $\frac{11}{250}$

19. Να κάνετε δεκαδικούς τα παρακάτω κλάσματα κάνοντας τις διαιρέσεις. Στην περίπτωση που η διαίρεση είναι ατελής βρείτε το πηλίκο με προσέγγιση χιλιοστού.

- $\frac{13}{2}$
- $\frac{13}{8}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{7}$
- $\frac{29}{4}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{5}{6}$
- $\frac{8}{15}$

20.α) Να κάνετε ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το 10, το 100 και το 1000 και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

| ΑΡΙΘΜΟΣ | ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ |
|---------|----------------------------|
| 10 | |
| 100 | |
| 1000 | |

β) Να κάνετε ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 40,

50, 20, 8, 125, 200 και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| ΑΡΙΘΜΟΣ | ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ | ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΠΟΥ ΛΕΙΠΕΙ ΑΠΟ ΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΓΙΑ ΝΑ ΓΙΝΕΙ 10,100,1000 |
|---------|----------------------------|--|
| 40 | | |
| 50 | | |
| 20 | | |
| 8 | | |
| 125 | | |
| 200 | | |

γ) Να κάνετε δεκαδικά τα κλάσματα:

$$\frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{20}, \frac{1}{8}, \frac{1}{125}, \frac{1}{200}$$

δ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα μπορείτε να καταλάβετε ποια κλάσματα γίνονται δεκαδικά;

21.α) Να βρείτε τους παρακάτω Μ.Κ.Δ.:

- ΜΚΔ (6, 15)=.....
- ΜΚΔ (8, 20)=.....
- ΜΚΔ (15, 45)=.....
- ΜΚΔ (44, 47)=.....
- ΜΚΔ (168, 144)=.....

β) Να κάνετε ανάγωγα τα παρακάτω κλάσματα διαιρώντας τους αυτών με

κατάλληλο αριθμό

- $\frac{6}{15}$
- $\frac{20}{8}$
- $\frac{15}{43}$
- $\frac{44}{47}$
- $\frac{144}{168}$

22. Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$, $\alpha\beta - \alpha\gamma = \alpha(\beta - \gamma)$ να κάνετε απλοποίηση στα παρακάτω κλάσματα:

$$\bullet \frac{2x}{2x + 3x}$$

$$\bullet \frac{a + \beta}{3a + 3\beta}$$

$$\bullet \frac{\alpha - \beta + 1}{2\alpha - 2\beta + 2}$$

$$\bullet \frac{3a - a}{5a + 2a}$$

$$\bullet \frac{2a - 2\beta}{3\alpha - 3\beta}$$

$$\bullet \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4\alpha + 8}$$

23. Να βρείτε τον αριθμό που παριστάνει η μεταβλητή x στα παρακάτω ισοδύναμα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{3}{2} = \frac{x}{4} \quad : \quad x = \dots\dots$$

$$\beta) \frac{7}{3} = \frac{28}{x} \quad : \quad x = \dots\dots$$

$$\gamma) \frac{1}{4} = \frac{x-1}{20} \quad : \quad x = \dots\dots$$

$$\delta) \frac{40}{25} = \frac{8}{x} \quad : \quad x = \dots\dots$$

$$\epsilon) \frac{35}{14} = \frac{x+1}{2} \quad : \quad x = \dots\dots$$

24. Κάνοντας την ιδιότητα "χιαστί" να υπολογίσετε αναλυτικά την μεταβλητή x στα παρακάτω ισοδύναμα κλάσματα

$$\bullet \frac{15}{30} = \frac{2}{x}$$

$$\bullet \frac{5}{x} = \frac{2}{8}$$

$$\bullet \frac{10}{3x} = \frac{2}{6}$$

$$\bullet \frac{x}{15} = \frac{6}{10}$$

$$\bullet \frac{2x}{3} = 4$$

$$\bullet \frac{x+1}{2} = \frac{6}{3}$$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{2} = \frac{2}{x}$$

$$\beta) \frac{4}{x} = \frac{x}{25}$$

26.α) Αν $\alpha\beta = \gamma\delta$ τότε:

$$\frac{a}{\gamma} = \dots\dots$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \dots\dots$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \dots\dots$$

$$\frac{\delta}{\beta} = \dots\dots$$

β) Αν $2\alpha=3\beta$ τότε

$$\frac{a}{\beta} = \dots\dots$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \dots\dots$$

27. Αν ισχύει $\frac{\chi}{4} = \frac{\psi}{3} = \lambda$ βρείτε την τιμή του κλάσματος $\frac{\chi + \psi}{\chi - \psi}$

28. Αν $\frac{\chi}{\psi} = 5$ να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{\chi + 3\psi}{\chi + \psi}$ είναι ισοδύναμο με το κλάσμα $\frac{4}{3}$

29. Να υπολογίσετε τους αγνώστους $\lambda, \chi, \psi, \omega$ για τους οποίους γνωρίζουμε ότι: $\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{4} = \lambda$ και $\chi + \psi + \omega = 18$

30. α) Δείξτε ότι το 1989 έχει παράγοντα το 13

β) Απλοποιήστε το κλάσμα $\frac{2002}{1989}$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσα: $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{21}{28}$

2. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{4}{8}, \frac{20}{25}, \frac{32}{64}, \frac{3}{8}, \frac{18}{48}, \frac{7}{14}, \frac{12}{32}$$

3. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α. $\frac{10}{16}$ β. $\frac{42}{7}$ γ. $\frac{24}{48}$ δ. $\frac{28}{35}$ ε. $\frac{36}{45}$ στ. $\frac{66}{77}$
 ζ. $\frac{33}{55}$ η. $\frac{114}{76}$

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{12}{72}$ και στη συνέχεια να τα μετατρέψετε σε ισοδύναμα με:

α. παρονομαστή 36 β. αριθμητή 72.

5. Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{12}{54}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 18.

6. Το κλάσμα $\frac{1}{6}$ να τραπεί σε ισοδύναμο κλάσμα που να έχει παρονομαστή τον αριθμό:

α. 12 β. 30 γ. 32 δ. 60 ε. 48 στ. 24

7. Το καθένα από τα παρακάτω κλάσματα να τραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 80: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{40}$

8. Το καθένα από τα παρακάτω κλάσματα να τραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 120: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{23}{24}$, $\frac{27}{30}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{37}{60}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \quad \frac{3}{8} = \frac{\alpha}{24}$$
$$\frac{5}{12} = \frac{\alpha}{42}$$

$$\beta. \quad \frac{5}{6} = \frac{x}{42}$$

$$\gamma. \quad \frac{7}{9} = \frac{28}{\gamma}$$

δ.

$$\epsilon. \quad \frac{8}{15} = \frac{48}{x}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{8}{11} = \frac{\beta}{55}$$

$$\zeta. \quad \frac{4}{x} = \frac{12}{27}$$

10. Αφού γίνουν οι πράξεις στους όρους των κλασμάτων να τα απλοποιήσετε:

$$A = \frac{4 \cdot 5^2 + 8 \cdot 10}{(23 + 37) : (36 - 32)}$$

$$B = \frac{3^4 + 3^3 + 3^2 + 3}{(12 + 6) \cdot 3^2}$$

$$\Gamma = \frac{3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 10}{(19 - 16) \cdot (28 - 23)}$$

$$\Delta = \frac{2^3 + 2^4 - 2^2}{(16 + 24) \cdot 2^2}$$