



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1^ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Το

7^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- **ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

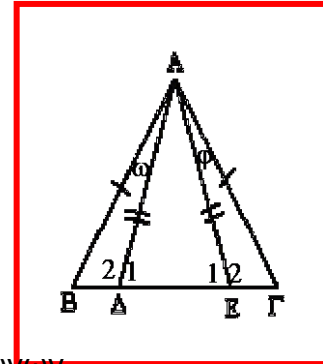
- **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**

ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Αν τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελή, να αποδείξετε ότι BΔ = ΓΕ.

Λύση

ABΓ ισοσκελές με AB = AΓ **(1)** άρα B = Γ
 AΔΕ ισοσκελές με AΔ = AΕ **(2)** άρα Δ₁ = Ε₁
 οπότε και Δ₂ = Ε₂ ως παραπληρώματα ίσων γωνιών.
 Αφού τα τρίγωνα ABΔ και AΕΓ έχουν δύο γωνίες τους ίσες, θα έχουν και τις τρίτες ω = φ **(3)**
 Από τις (1), (2), (3) (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα ABΔ και AΕΓ είναι ίσα.
 Επομένως BΔ = ΕΓ ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων



2. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ και σημεία Z, E των πλευρών AB και BΓ αντιστοίχως τέτοια ώστε AZ = BE. Να αποδείξετε ότι α) ΔZ = AΕ β) ΔZ ⊥ AΕ

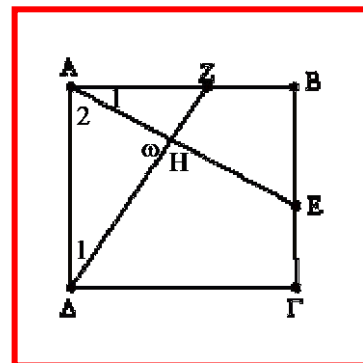
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ΔAZ έχουν
 $B = A = 90^\circ,$
 $AB = AΔ$
 $AZ = BE$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως ΔZ = AΕ

β) Αφού $\square ABE = \square AΔZ$ θα είναι $A_1 = Δ_1$
 Αλλά $A_1 + A_2 = 90^\circ$ άρα $Δ_1 + A_2 = 90^\circ$

Επομένως η τρίτη γωνία ω του τριγώνου AHΓ θα είναι 90° , άρα ΔZ ⊥ AΕ

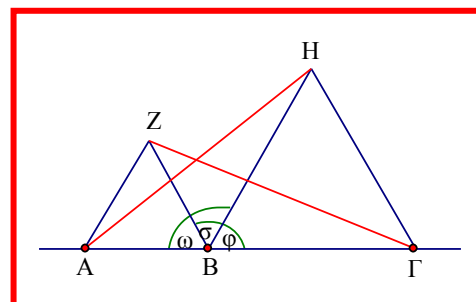


3. Σε ευθεία (ε) να πάρετε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας να κατασκευάσετε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABZ και BΓH. Να αποδείξετε ότι AH = ΓZ.

Λύση

Αφού τα τρίγωνα ABZ και BΓH είναι
 Ισόπλευρα, θα είναι $\omega = 60^\circ = \varphi$.
 Τα τρίγωνα ABH και ZBΓ έχουν :

$AB = BZ, BH = BΓ, A B H = 60^\circ + \sigma = Z B Γ$
 Επομένως (Π-Γ-Π) είναι ίσα.
 Οπότε AH = ΓZ



4. Σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B = B'$ και οι διχοτόμοι BM και $B'M'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Λύση

Τα τρίγωνα $BM\Gamma$ και $B'M'\Gamma'$ έχουν

$$B\Gamma = B'\Gamma'$$

$$BM = B'M'$$

$B_2 = B'_2$ ως μισά των ίσων

Οπότε $(\Pi - \Gamma - \Pi)$ είναι ίσα,

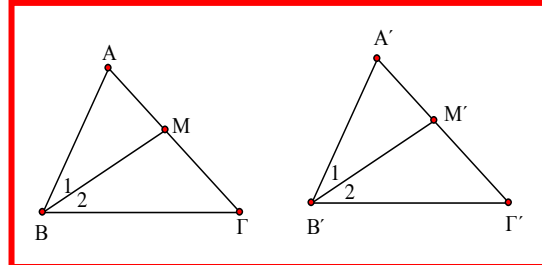
άρα $\Gamma = \Gamma'$

Είναι $B\Gamma = B'\Gamma'$

$$B = B'$$

$$\Gamma = \Gamma'$$

Από $(\Gamma - \Pi - \Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι $AB\Gamma = A'B'\Gamma'$



5. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta // A\Gamma$ και $\Delta E // \Gamma B$.
 α) Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $O\Delta$, $O E$.
 β) Να αποδείξετε ότι $OB^2 = OA \cdot OE$

Λύση

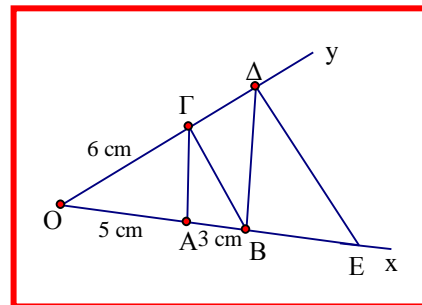
α) $B\Delta // A\Gamma$ άρα $\frac{OA}{AB} = \frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\frac{5}{3} = \frac{6}{\Gamma\Delta}$
 $5\Gamma\Delta = 18$
 $\Gamma\Delta = 3,6$
 επομένως $O\Delta = 9,6$

$B\Gamma // \Delta E$ άρα $\frac{O\Gamma}{O\Delta} = \frac{OB}{OE}$, $\frac{6}{9,6} = \frac{8}{OE}$
 $6OE = 76,8$ άρα $OE = 12,8$

β) $B\Delta // A\Gamma$ άρα $\frac{OA}{OB} = \frac{O\Gamma}{O\Delta}$

Αλλά στο (α) δείξαμε ότι $\frac{O\Gamma}{O\Delta} = \frac{OB}{OE}$

Άρα $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE}$ δηλαδή $OB^2 = OA \cdot OE$



6. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 6cm. Να βρείτε την πλευρά ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου που έχει διπλάσιο εμβαδόν.

Λύση

Έστω α' η ζητούμενη πλευρά και E' το εμβαδόν του νέου τριγώνου.

Τότε είναι $\frac{E'}{E} = \left(\frac{\alpha'}{6}\right)^2$ άρα $\frac{2E}{E} = \frac{\alpha'^2}{36}$, $\alpha'^2 = 72$

$$\alpha' = \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

7. Οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου τέμνονται στο σημείο O. Από το μέσο M του OB να φέρετε $ME \perp AD$ και $MZ \perp GD$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΜΕΔΖ.

Λύση

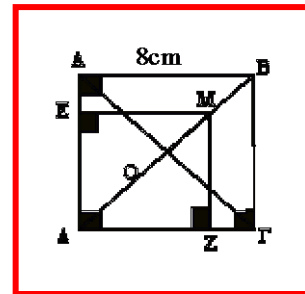
Είναι $\Delta O = OB = \frac{\Delta B}{2}$ (1)

Και $OM = MB = \frac{OB}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{\Delta B}{2}}{2} = \frac{\Delta B}{4}$

Άρα $\Delta M = \Delta O + OM = \frac{\Delta B}{2} + \frac{\Delta B}{4} = \frac{3\Delta B}{4}$

Επειδή $ME \parallel AB$ (κάθετες στην AD), ισχύει $\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{\Delta M}{\Delta B}$ άρα

$$\frac{\Delta E}{8} = \frac{\frac{3\Delta B}{4}}{\Delta B} = \frac{3}{4} \text{ άρα } \Delta E = 6 \text{ επομένως } (M\Delta EZ) = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$$



8. Με πλευρά την διαγώνιο ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς x, να σχηματίσετε το τετράγωνο ΑΓΕΖ α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)}$ β) Αν $(ΑΓΕΖ) = 200\text{cm}^2$, να υπολογίσετε την πλευρά x.

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

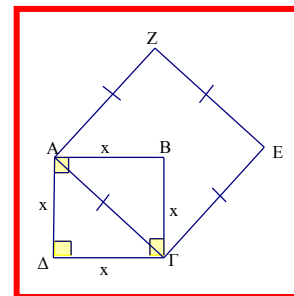
$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \text{ άρα } ΑΓ = x\sqrt{2}$$

Τα τετράγωνα είναι όμοια, άρα

$$\frac{(ΑΓΕΖ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{(x\sqrt{2})^2}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

β) $(ΑΓΕΖ) = ΑΓ^2$ άρα $200 = (x\sqrt{2})^2$

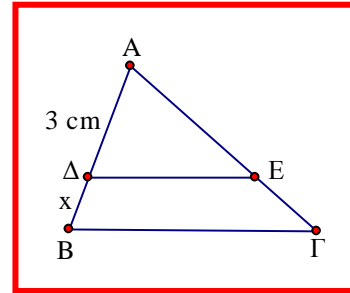
$$200 = 2x^2 \text{ άρα } x^2 = 100 \text{ άρα } x = 10 \text{ cm}$$



9. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ και $(\Delta ΔΕ) = \frac{9}{16} (\text{ΑΒΓ})$.
 Να υπολογίσετε το x.

Λύση

Είναι $\Delta ΔΕ \sim \text{ΑΒΓ}$ ως εντός εκτός – επί τα αυτά
 Τα τρίγωνα ΔΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Α κοινή
 και $\Delta ΔΕ \sim \text{ΑΒΓ}$ άρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας



$$\lambda = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{3}{3+x}$$

Επομένως $\frac{(\Delta ΔΕ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2$ και λόγω της υπόθεσης

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \quad \text{άρα} \quad \frac{3}{3+x} = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{3}{3+x} = -\frac{3}{4} \quad \text{οπότε}$$

$x = 1 \text{ cm}$ ή $x = -7$ που απορρίπτεται αφού το x είναι μήκος.

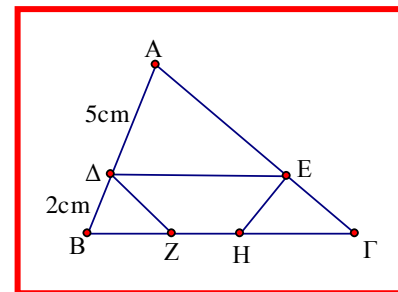
10. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Να αποδείξετε ότι **α)** $\text{ΒΖ} = \text{ΓΗ}$ **β)** $(\Delta \text{ΕΗΖ}) = \frac{16}{49} (\text{ΑΒΓ})$

Λύση

α) $\Delta \text{Ζ} // \text{ΑΓ}$ άρα $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΑ}}$

$\Delta \text{Ε} // \text{ΒΓ}$ άρα $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}}$

$\text{ΕΗ} // \text{ΑΒ}$ άρα $\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΓΒ}}$



από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΓΒ}}$ άρα $\text{ΒΖ} = \text{ΓΗ}$

β) Αφού $\Delta \text{Ε} // \text{ΒΓ}$ θα είναι τρ. ΔΔΕ όμοιο του τρ. ΑΒΓ

Άρα $\frac{(\Delta ΔΕ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΑ}}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$ άρα $(\Delta ΔΕ) = \frac{25}{49} (\text{ΑΒΓ})$

Ομοίως $(\text{ΒΔΖ}) = \frac{4}{49} (\text{ΑΒΓ})$

Και $(\text{ΓΕΗ}) = \frac{4}{49} (\text{ΑΒΓ})$

Οπότε $(\Delta \text{ΕΗΖ}) = (\text{ΑΒΓ}) - (\text{ΒΔΖ}) - (\Delta ΔΕ) - (\text{ΓΕΗ}) =$
 $= (\text{ΑΒΓ}) - \frac{4}{49} (\text{ΑΒΓ}) - \frac{25}{49} (\text{ΑΒΓ}) - \frac{4}{49} (\text{ΑΒΓ}) = \frac{16}{49} (\text{ΑΒΓ})$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΘΕΜΑ 1.

- α) Ποια ονομάζουμε κύρια στοιχεία ενός τριγώνου και ποια δευτερεύοντα;
 β) Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι:
 Α: 90° Β: 180° Γ: 360° Δ: 60°
 γ) Να γράψετε την τριγωνική ιδιότητα.
 δ) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές 1cm, 2cm, 3cm;
 Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2.

- α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ισότητας και δίπλα την ένδειξη **Σωστό** αν είναι σωστή ή την ένδειξη **Λάθος** αν είναι λάθος.

Π₁: Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τρεις πλευρές τους

Π₂: Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία

Π₃: Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν δυο γωνίες τους και δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία

Π₄: Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία και η μια πλευρά του ενός είναι ίση με μια πλευρά του άλλου

Π₅: Δυο ορθογώνια είναι ίσα όταν έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία

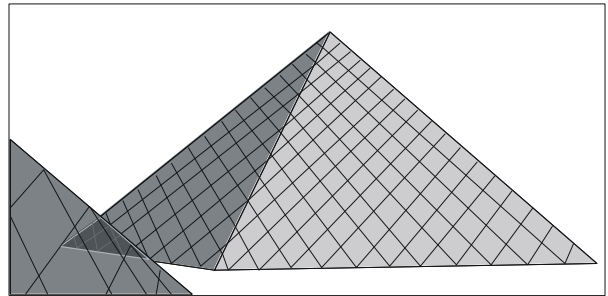
- β) Αν ένα σημείο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας ενός τριγώνου θα βρίσκεται πάνω σε

Α: Μια διάμεσο του τριγώνου

Β: Μια διχοτόμο του τριγώνου

Γ: Μια πλευρά του τριγώνου

Δ: Ύψος τριγώνου



ΘΕΜΑ 3.

- α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

Π₁: Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα

Π₂: Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια

Π₃: Δυο ισοσκελή τρίγωνα με μια γωνία τους ίση είναι όμοια

- β) Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

Π₁: Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα πάνω σε μια ευθεία που τις τέμνει τότε

Π₂: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου

Π₃: Αν από το μέσο πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μια πλευρά του τότε

ΘΕΜΑ 4.

- α) Τι γνωρίζετε για την διάμεσο ενός ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα;
β) Να γράψετε το θεώρημα του Θαλή.
γ) Πότε δυο πολύγωνα είναι όμοια;

ΘΕΜΑ 5.

- α) Δυο τρίγωνα με δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι όμοια; Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών τους;
β) Για δυο τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ , γνωρίζουμε οι γωνίες A και E είναι ίσες καθώς και οι γωνίες Γ και Z . Να γράψετε την αναλογία που προκύπτει για τις πλευρές τους.
γ) Για δυο τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ γνωρίζουμε ότι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. Είναι όμοια;
Ποιες γωνίες τους έχουν ίσες;