



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

A.1.5

Αξιοσημείωτες

ταυτότητες

Το

5^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- **ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ**
- **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
- **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

● Ταυτότητα

Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Που είναι απαραίτητες;

- Καταρχήν, μας βοηθούν να εκτελέσουμε γρηγορότερα και σωστότερα ένα σωρό πράξεις, στις αλγεβρικές παραστάσεις.
- Επίσης, μας βοηθούν να μετατρέψουμε μια αλγεβρική παράσταση, από άθροισμα σε γινόμενο (*αυτό λέγεται παραγοντοποίηση και θα το δούμε παρακάτω*), κάτι που είναι εξαιρετικά βολικό...
- ...στην απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων ή ακόμα...
- ...στην επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων, όπως αυτών που είναι μεγαλύτερες του 1^{ου} βαθμού.
- κι ακόμη ένα σωρό άλλες εφαρμογές.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Τετράγωνο Αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

2. Τετράγωνο Διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

3. Διαφορά Τετραγώνων

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

4. Κύβος Αθροίσματος

$$(α + β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$$

5. Κύβος Διαφοράς

$$(α - β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$$

6. Άθροισμα Κύβων

$$α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 - αβ + β^2)$$

7. Διαφορά Κύβων

$$α^3 - β^3 = (α - β)(α^2 + αβ + β^2)$$

8. Τριώνυμο

$$x^2 + (α + β)x + αβ = (x + α)(x + β)$$

Μέθοδοι απόδειξης μιας ταυτότητας

Πέρα από τις γνωστές μας ταυτότητες, για να αποδείξουμε γενικά οποιαδήποτε ισότητα μας ζητάνε, ακολουθούμε το πιο συχνά μια από τις δύο παρακάτω μεθόδους:

- A.** Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ισότητας που πρέπει να αποδείξουμε (συνήθως από αυτό με τις παρενθέσεις και τις δυνάμεις) και κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.
- B.** Εκτελούμε πράξεις σε κάθε μέλος της ισότητας ταυτόχρονα, μέχρι να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο μέλη (δηλ. μια ισότητα που να ισχύει).

Αποδείξεις Ταυτοτήτων

Για να αποδείξουμε τις πέντε γνωστές ταυτότητες ξεκινάμε από το ένα μέλος της εξίσωσης και εκτελούμε τις πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

- 1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) &= && \text{(Επιμεριστική ιδιότητα)} \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 &= && \text{(Αναγωγή ομοίων όρων)} \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & \end{aligned}$$

- 2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$**

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \\ (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & \end{aligned}$$

- 3. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^2 - \beta^2 & \end{aligned}$$

- 4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 &= && \text{(Ταυτότητα)} \\ (\alpha + \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \end{aligned}$$

- 5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$**

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^3 &= \\ (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 &= && \text{(Ταυτότητα)} \\ (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 & \end{aligned}$$

- 6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^3 + \beta^3 & \end{aligned}$$

- 7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$**

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= && \text{(Επιμεριστική)} \\ \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 &= && \text{(Αναγωγή)} \\ \alpha^3 - \beta^3 & \end{aligned}$$

- 8. $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$**

$$x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + x\beta + \alpha x + \alpha\beta \quad \text{(Πράξεις & στα 2 μέλη)}$$

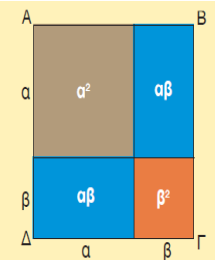
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

| | |
|---|--|
| <p>Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ισότητες αληθεύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών.</p> | <p>Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ</p> |
| <p>A) $3x = 12$ B) $x + y = 7$ Γ) $\alpha \cdot \beta = 0$ Δ) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ Ε) $0x = 0$ ΣΤ) $x(x + 1) = x^2 + x$</p> | <p>Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει και αληθεύει για.....τις τιμές των μεταβλητών.</p> |

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

| |
|---|
| <p>Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 =$</p> |
| Empty space for student work |

| |
|---|
| <p>Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - \beta)^2 =$</p> |
| Empty space for student work |

| | |
|---|---|
|  | <p>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$</p> |
|---|---|

| | |
|--|---|
| <p>Να βρείτε τα αναπτύγματα:</p> | |
| <p>$(x + 1)^2 =$ $(x - 3)^2 =$ $(2x + 4)^2 =$ $(2x - 3y)^2 =$</p> | <p>$(x^2 + x)^2 =$ $(-\alpha + \beta)^2 =$ $(-\alpha - \beta)^2 =$</p> |

| |
|--|
| Να γράψετε το ανάπτυγμα: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 =$ |
| Α) $(2x + 3y + 4)^2 =$ |
| Β) $(2x - 3y - 4)^2 =$ |

ΚΥΒΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ – ΚΥΒΟΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

| |
|---|
| Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^3 =$ |
| |
| Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - \beta)^3 =$ |
| |

| |
|---------------------------|
| Να βρείτε τα αναπτύγματα: |
| $(x + 1)^3 =$ |
| $(x - 1)^3 =$ |
| $(2x + 3y)^3 =$ |
| $(2x - 5)^3 =$ |
| $(x^2 + x)^3 =$ |

| | |
|--|---|
| Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ταυτότητες. | |
| $(2x + \dots)^3 = \dots + \dots + \dots + 27y^3$ | $(\dots + \dots)^3 = \alpha^3 + 6\alpha^2\beta + \dots$ |
| $(\dots - \dots)^3 = \alpha^3 - \dots + \dots - 8$ | $(\dots + \dots)^3 = x^3 + 6x^2 + \dots +$ |

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΔΙΑΦΟΡΑ

Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots$

| |
|---|
| Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα. |
| $(x - 1)(x + 1) = \dots$ |
| $(x - 2)(x + 2) = \dots$ |
| $(3x + 2y)(3x - 2y) = \dots$ |
| $(x + 3)(3 - x) = \dots$ |
| $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = \dots$ |
| Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητούς παρονομαστές. |
| $\frac{2}{\sqrt{3} - 2} =$ |
| $\frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$ |

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ταυτότητες.

$$(2\alpha + \dots)(\dots - \dots) = \dots - 9\beta^2(\dots + \dots)(\dots - \alpha x^2) = \beta^4 - \dots$$

$$(a^2x^3 + \dots)(\dots - \dots) = \dots - \beta^4y^8$$

–

$$(\dots + \dots)(2\sqrt{x} - \dots) = \dots - 3y^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Ταυτότητες

Τετράγωνο Αθροίσματος – Διαφοράς

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

$$\alpha. (a + 3)^2$$

$$\beta. (10 + \kappa)^2$$

$$\gamma. (\mu - 4)^2$$

$$\delta. (4 - \chi)^2$$

$$\epsilon. (a + 2\beta)^2$$

$$\sigma\tau. (6\kappa - 5)^2$$

$$\zeta. (3a + 4\beta)^2$$

$$\eta. (2a - 7\beta)^2$$

$$\theta. (-a - \beta)^2$$

$$\iota. (-x + y)^2$$

2. Ομοίως:

$$\alpha. (a^2 + \beta)^2$$

$$\beta. (a - \beta^3)^2$$

$$\gamma. (x^2 - y^3)^2$$

$$\delta. (3a^2 + 4a\beta)^2$$

$$\epsilon. (x^3 + 3xy^2)^2$$

$$\sigma\tau. (x^v - y^v)^2$$

$$\zeta. \left(a + \frac{1}{2}\beta\right)^2$$

$$\eta. \left(\frac{3a}{2} - \frac{4\beta}{3}\right)^2$$

$$\theta. (x - \sqrt{3})^2$$

$$\iota. (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)^2$$

$$\iota\alpha. \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} - \beta\sqrt{5}\right)^2$$

Κύβος Αθροίσματος – Διαφοράς

3. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

$$\alpha. (x + 1)^3$$

$$\beta. (x - 2)^3$$

$$\gamma. (3 - 2x)^3$$

$$\delta. (2a + 3\beta)^3$$

$$\epsilon. (\kappa^2 - \lambda)^3$$

$$\sigma\tau. \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^3$$

$$\zeta. \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)^3$$

$$\eta. \left(x^2 - \frac{y}{3}\right)^3$$

$$\theta. \left(\frac{a^2 + \beta^2}{2}\right)^3$$

Άθροισμα επί διαφορά / Διαφορά τετραγώνων

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $(x - 9)(x + 9)$

β. $(x + 4)(x - 4)$

γ. $(3 - \alpha)(3 + \alpha)$

δ. $(2\kappa - \lambda)(2\kappa + \lambda)$

ε. $(2x - 3y)(2x + 3y)$

στ. $(x^2 - y)(x^2 + y)$

ζ. $(\kappa^2 + \lambda^3)(\kappa^2 - \lambda^3)$

η. $(\alpha^3 - 3\beta)(\alpha^3 + 3\beta)$

θ. $(\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3)$

ι. $(2x^2y + 6)(2x^2y - 6)$

ια. $(3xy^v - \omega^v)(\omega^v + 3xy^v)$

ιβ. $(0,4\alpha + 0,5\beta)(0,4\alpha - 0,5\beta)$

ιγ. $(\kappa\lambda + \mu)(\mu - \kappa\lambda)$

ιδ. $(\alpha^2 - \beta)(\beta + \alpha^2)$

ιε. $\left(\frac{x}{\alpha} + 2\right)\left(\frac{x}{\alpha} - 2\right)$

ιστ. $\left(\frac{x}{11} + \frac{5y}{12}\right)\left(\frac{x}{11} - \frac{5y}{12}\right)$

ιζ. $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

ιη. $(\sqrt{5\alpha} - \sqrt{3\beta})(\sqrt{5\alpha} + \sqrt{3\beta})$

5. Να υπολογίσετε με τον συντομότερο τρόπο το γινόμενο:

$$(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)(3x + 2y)$$

Συμπλήρωση Κενών

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

α. $(\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$

β. $(\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$

γ. $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

δ. $(\dots - \frac{1}{2})^2 = 16x^4 - 4x + \dots$

ε. $(5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$

στ. $(2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3 \cdot \dots + 3 \cdot \dots + 27$

ζ. $x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$

η. $\dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$

θ. $\dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$

ι. $\alpha^2x^4 + \dots + \dots = (\dots + \frac{1}{2}\beta y)^2$

ια. $x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$

ιβ. $\dots - 8\alpha^2\beta + \dots = (\alpha + \dots)^2$

ιγ. $\dots - \dots + \dots - 8y^3 = (10x - \dots)^3$

Παραστάσεις με ταυτότητες

7. Να γίνουν οι πράξεις:

- α. $(1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$
 β. $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$
 γ. $2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$
 δ. $2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$
 ε. $-9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$
 στ. $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$
 ζ. $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$
 η. $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$
 θ. $(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$
 ι. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - 2)^2$
 ια. $(x + 3)(5 + 2x)(2x - 5) - 2x(1 - 4x)^2$

8. Ομοίως:

- α. $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$
 β. $2(x - 1)^3 - (3x + 2)^2 + (5x + 2)(5x - 2)$
 γ. $(x - 2)^3 - 2x(x + 1)^2 + 3(x + 1)(x - 1)$
 δ. $(x - 2)^3 - x(3 - 2x)(3 + 2x) + 2x(3 + 2x)^2$
 ε. $(\alpha^3 + 1)^2 - (\alpha^2 + 1)^3 + 3\alpha^2(\alpha + 1)^2$
 στ. $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^2 - x^3$
 ζ. $(2x + 1)^3 - (3x - 1)^2 + (2x + 8)(2x - 8)$
 η. $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^3 - (\alpha - \frac{1}{\alpha})^3$

9. Εάν $x = 2\sqrt{3} + 1$ και $y = 2\sqrt{3} - 1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

10. Εάν $x + y = 6$ και $x \cdot y = 8$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

- α. $x^2 + y^2$ β. $x^3 + y^3$ γ. $(x + 3)(x - 3)$
 δ. $(x - y)^2$ ε. $x^4 + y^4$

11. Εάν $x - y = 5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (x + y)^2 - 4xy$$

