

1<sup>ο</sup> ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ

**B.1.1**

**Ισότητα**

**Τριγώνων**

Το

# 5<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

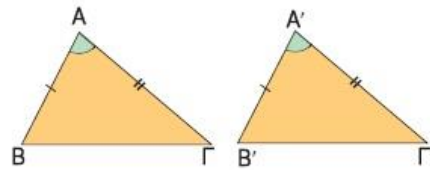
# ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

## Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων ;

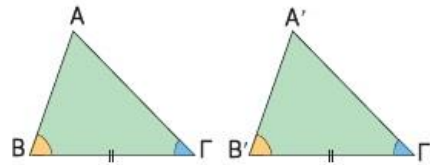
**1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



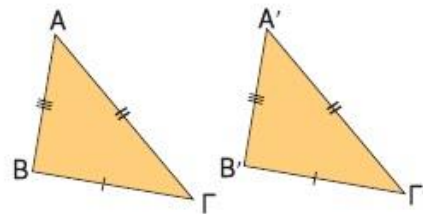
**2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).**

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



**3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Ποιες παρατηρήσεις ισχύουν για τα ίσα τρίγωνα ;

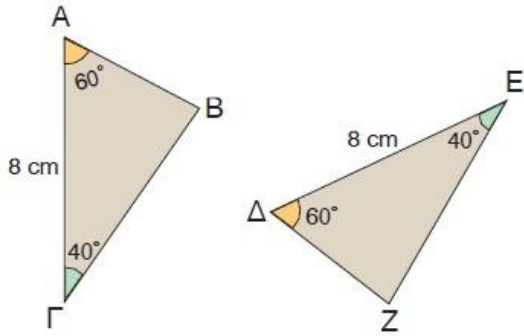
Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

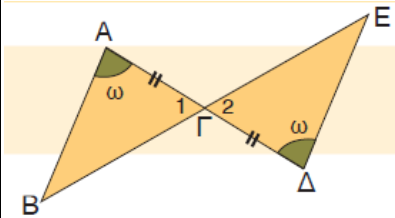
## 2<sup>ο</sup> ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (Γ-Π-Γ)

Να δικαιολογήσετε γιατί τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.



Σε ..... τρίγωνα, απέναντι από ίσες ..... βρίσκονται ίσες .....

Στο παρακάτω σχήμα είναι  $ΑΓ = ΓΔ$  και  $Α = Δ = ω$ . Να αποδείξετε ότι  $ΑΒ = ΔΕ$ .



**3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (II-II-II)**

	<p>Αν δύο τρίγωνα έχουν τις ..... τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.</p>
--	---

Να δικαιολογήσετε γιατί τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.

<p>Σε ..... τρίγωνα, απέναντι από ίσες ..... βρίσκονται ίσες .....</p>	
--	--

Στο παρακάτω σχήμα το σημείο  $A$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  του κύκλου. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OAB$  και  $OAG$  είναι ίσα.

--	--

**Ερωτήσεις Κατανόησης**

**1.** Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία.                 Σ     Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες.   Σ     Λ

**2.** Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

**3.** Συμπληρώστε τα κενά:

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι .....

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι .....

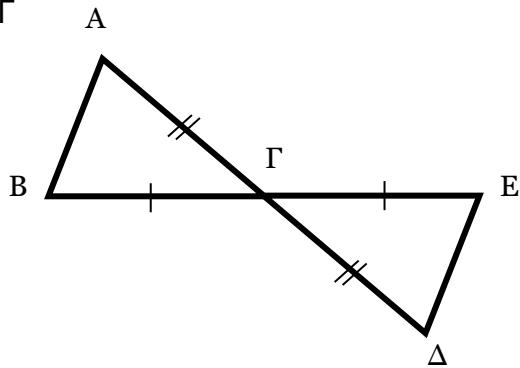
iii) Ένα σημείο M βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος AB, όταν .....

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν .....

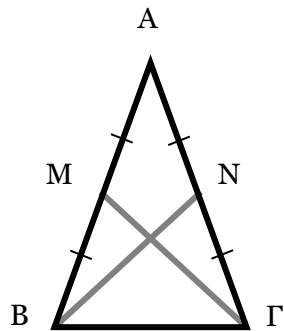
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## Με σχήμα

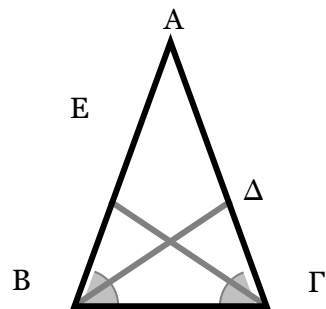
1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι ίσα:



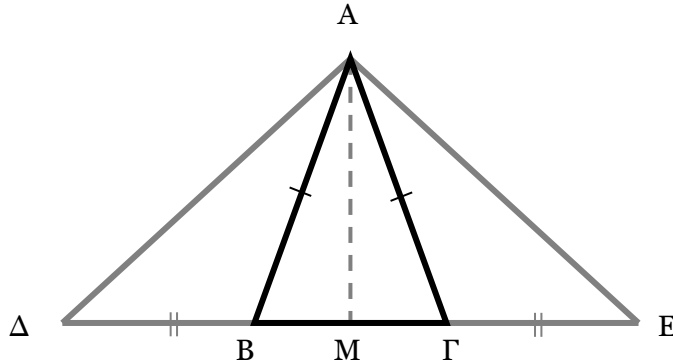
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τις διαμέσους  $BN$  και  $\Gamma M$ . Να αποδείξετε ότι  $BN = \Gamma M$ .



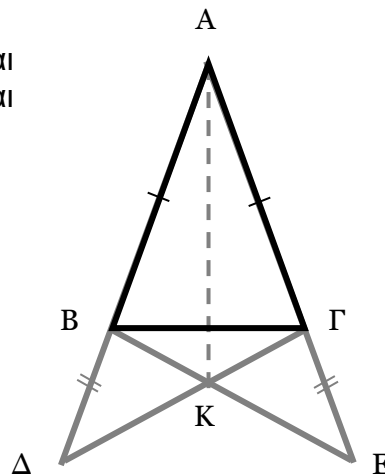
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τις διχοτόμους  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .



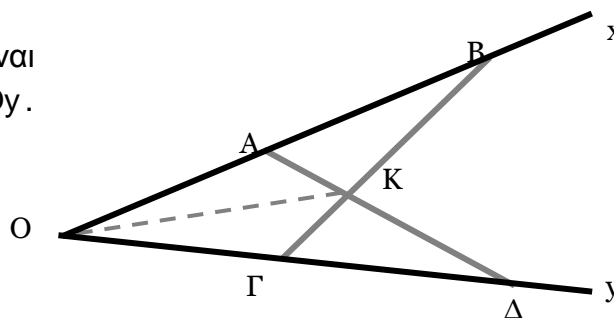
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Προεκτείνουμε τη βάση  $B\Gamma$  και προς τις δύο κατευθύνσεις, κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ .
- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.
- β. Να δείξετε ότι η διάμεσος  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι διάμεσος και του τριγώνου  $A\Delta E$ .



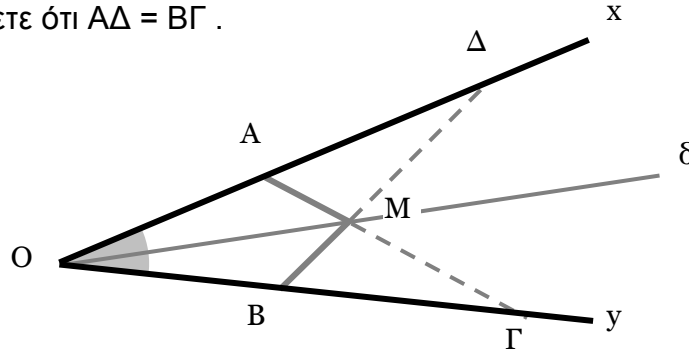
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές προς το μέρος του  $B$  και του  $\Gamma$ , κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ , αντίστοιχα.
- α. Να δείξετε ότι  $BE = \Gamma\Delta$ .
- β. Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  τότε να δείξετε ότι η  $AK$  είναι μεσοκάθετος της  $B\Gamma$ .



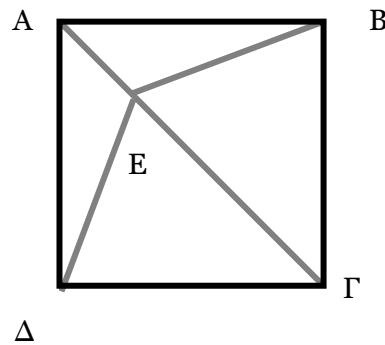
6. Στις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  μιας γωνίας  $x\hat{O}y$  παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα  $OA = O\Gamma$  και  $OB = OD$ . Έστω  $K$  το σημείο τομής των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ .
- α. Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .
- β. Να δείξετε ότι η  $OK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $x\hat{O}y$ .
- γ. Να δείξετε ότι  $AK = K\Gamma$ .



7. Στις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  μιας γωνίας  $x\hat{O}y$  παίρνουμε, αντίστοιχα ίσα τμήματα  $OA = OB$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο  $O\delta$  της  $x\hat{O}y$  κι έστω  $M$  τυχαίο σημείο της. Έστω επίσης οι προεκτάσεις των  $AM$  και  $BM$  και  $\Gamma, \Delta$  τα σημεία τομής του με τις πλευρές  $Oy$  και  $Ox$ , αντίστοιχα.
- α. Να δείξετε ότι  $A\Gamma = B\Delta$ .
- β. Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .



8. Δίνεται ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και η διαγώνιός του  $A\Gamma$ . Αν  $E$  τυχαίο σημείο της  $A\Gamma$  τότε να δείξετε ότι  $BE = DE$ .



### Χωρίς σχήμα

9. Έστω δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  τα οποία έχουν  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  κι επιπλέον  $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
10. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $K, \Lambda, M$  πάνω στις πλευρές του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $AK = B\Lambda = \Gamma M$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο, επίσης.
11. Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα, τότε να αποδείξετε ότι  $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$  και  $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ .



12. Σε έναν κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ , παίρνουμε τρία διαδοχικά σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της χορδής  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα  $O\Delta B$  και  $O\Delta \Gamma$  είναι ίσα.
  - Οι γωνίες  $O\hat{A}\Delta$  και  $O\hat{B}\Delta$  είναι ίσες.
- Υπόδειξη:** Θυμίζουμε ότι η μεσοκάθετος μιας οποιασδήποτε χορδής ενός κύκλου διέρχεται υποχρεωτικά από το κέντρο του.
13. Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι, με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho_1 > \rho_2$ . Αν  $AB$  είναι μια διάμετρος του ενός κύκλου και  $\Gamma\Delta$  μια διάμετρος του άλλου, τότε να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AO\Gamma$  και  $BO\Delta$  είναι ίσα. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$ .
14. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ :
- το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .
  - το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .
15. Να δείξετε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δυο ύψη ίσα, τότε είναι ισοσκελές.
16. Στις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , παίρνουμε αντίστοιχα σημεία  $E$ ,  $\Delta$  τέτοια, ώστε  $AE = A\Delta$ . Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$  και  $E\Gamma$ , τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.
17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τυχαίο σημείο  $K$ , της πλευράς  $AB$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = KB$ . Ονομάζουμε  $M$  το σημείο, στο οποίο η  $K\Delta$  τέμνει τη βάση  $B\Gamma$ . Τέλος, προεκτείνουμε τη βάση  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $B$ ) κατά τμήμα  $BE = M\Gamma$ .
- Να δείξετε ότι  $KE = M\Delta$  και  $K\hat{E}B = \Gamma\hat{M}\Delta$ .
  - Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $KEM$  είναι ισοσκελές.
  - Να δείξετε ότι  $KM = M\Delta$ .

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\beta = \beta'$ ,  $\gamma = \gamma'$  και  $A = A'$ . Αν  $I$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων  $AD$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $I'$  το σημείο τομής των διχοτόμων  $A'D'$  και  $B'E'$  του  $A'B'\Gamma'$  να αποδείξετε ότι:

i)  $AI = A'I'$  και  $BI = B'I'$

ii)  $AI = A'I'$  και  $BI = B'I'$ .

2. Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$

έχουν  $\beta = \beta'$ ,  $A = A'$  και  $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $\Gamma = \Gamma'$ ,

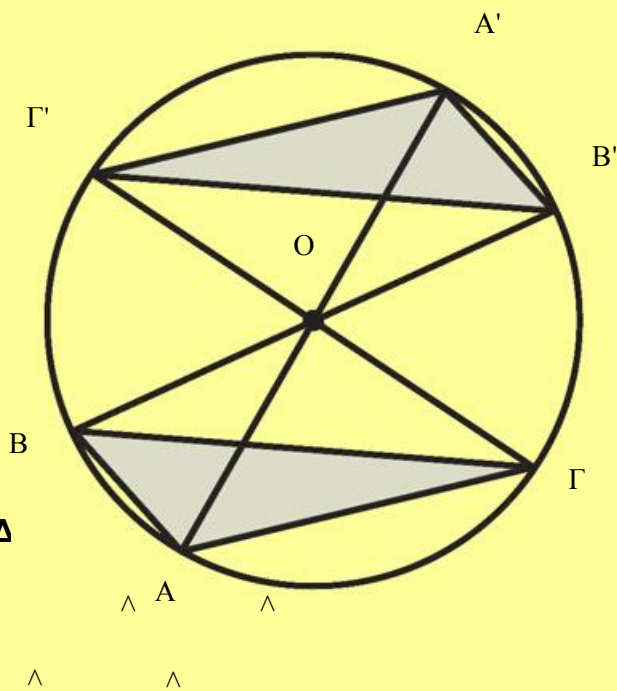
ii)  $\alpha = \alpha'$  και  $\gamma = \gamma'$ .

3. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά ίσο τμήμα  $MD$ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Gamma D$  είναι ίσα.

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Αν  $AA'$ ,  $BB'$  και  $\Gamma\Gamma'$  είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.



3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$

είναι  $AB = \Gamma\Delta$  και  $B = \Gamma$ . Να

αποδείξετε ότι  $A = \Delta$ .

**Σύνθετα θέματα**

1. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ . Η διάμεσος  $AM$  και η διχοτόμος  $B\Delta$  του  $AB\Gamma$  τέμνονται στο  $\Theta$ , ενώ η αντίστοιχη διάμεσος  $A'M'$  και η αντίστοιχη διχοτόμος  $B'\Delta'$  του  $A'B'\Gamma'$  τέμνονται στο  $\Theta'$ . Να αποδείξετε ότι:

i)  $B\Delta = B'\Delta'$ ,

ii)  $\widehat{BAM} = \widehat{B'A'M'}$ ,

iii) Τα τρίγωνα  $AB\Theta$  και  $A'B'\Theta'$  είναι ίσα,

iv)  $A\Theta = A'\Theta'$  και  $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$ .

2. Δύο τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  έχουν την ίδια μεσοκάθετο  $\varepsilon$ . Αν η  $\varepsilon$  και η μεσοκάθετος του  $A\Gamma$  τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του  $B\Delta$ .

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Η μεσοκάθετος της πλευράς  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $\Gamma B$  στο  $\Delta$ . Προεκτείνουμε τη  $\Delta A$  κατά τμήμα  $A\epsilon = \Delta B$ . Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο  $\Delta A\Gamma$  είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο  $\Gamma\Delta\epsilon$  είναι επίσης ισοσκελές.