ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 4^{O}
Μονοτονία

Ακρότατα

Συμμετρίες

Το

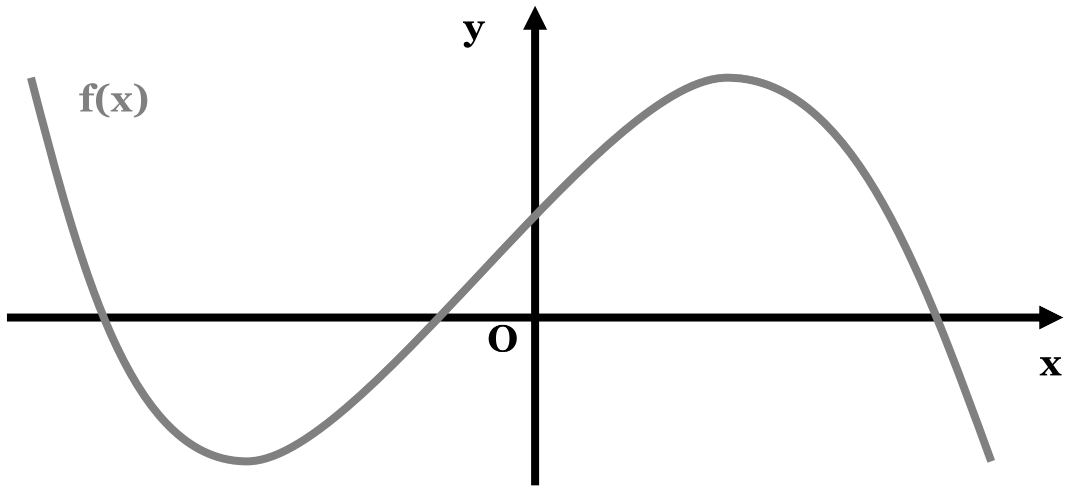
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Μονοτονία Συνάρτησης

Παρατηρώντας τη **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης, αντιλαμβανόμαστε ότι είναι δυνατόν, κατά τμήματα, άλλοτε να «ανεβαίνει» (αυξάνει) κι άλλοτε να «κατεβαίνει» (φθίνει).



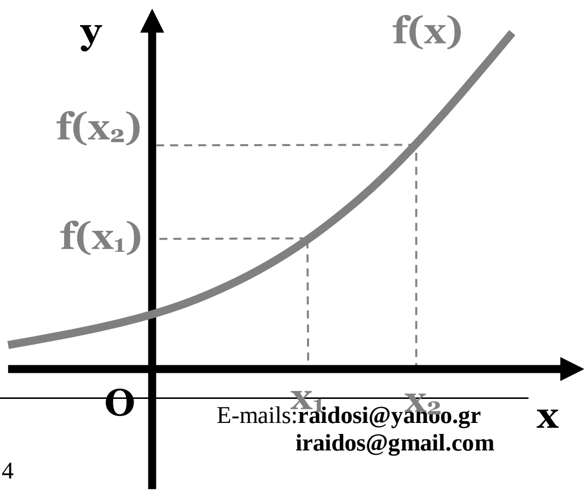
Για να ξεφύγουμε, όμως, από τη σχετικότητα της ανθρώπινης ματιάς (αν κοιτάξουμε αντίστροφα εκείνο που πριν ανηφόριζε, τώρα θα κατηφορίζει!) οφείλουμε να δώσουμε έναν αυστηρότερο ορισμό, του τι ακριβώς σημαίνει πως μια συνάρτηση «αυξάνει» ή «φθίνει».

Γνησίως Αύξουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει:

$$\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$$

Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία: ↑



Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του x, καθώς κι εκείνες της f(x), μεταβάλλονται με τον **ίδιο** ακριβώς τρόπο: αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και τ' άλλο, μειώνεται το ένα, μειώνεται και τ' άλλο.

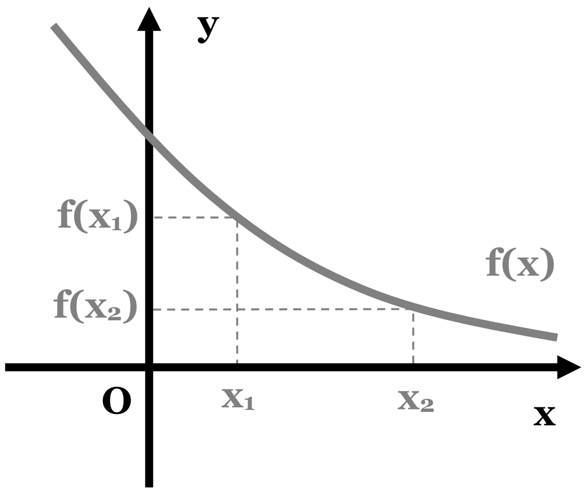
Γνησίως φθίνουσα

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$ ισχύει:

$$\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$$

Μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση συμβολίζεται για συντομία: **2**

Αυτό που, με απλά λόγια, συμβαίνει σε μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι ότι οι τιμές του x μεταβάλλονται με ακριβώς τον **αντίστροφο** τρόπο, από τις τιμές της f(x): αυξάνεται το ένα, μειώνεται το άλλο, μειώνεται το ένα, αυξάνεται το άλλο.



Μονοτονία

Η συμπεριφορά αυτή μιας συνάρτησης ονομάζεται **μονοτονία** κι η συνάρτηση - εφόσον είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα - **γνησίως μονότονη**.

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα, ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από τη σχέση $x_1 < x_2$ και στη συνέχεια να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, και στα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

πχ. Θέλουμε να εξετάσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = -3x + 5$, με πεδίο ορισμού όλο το . Έστω $x_1, x_2 \in$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ειδικότερα:

- Αν πρόκειται για την **ευθεία $f(x) = \alpha x + \beta$** , η μονοτονία εξαρτάται αποκλειστικά από το συντελεστή του x (= συντελεστής διεύθυνσης) :
  - αν $\alpha > 0$ τότε $f(x) \uparrow$ σε όλο το $\Re$.
  - αν $\alpha > 0$ τότε $f(x) \downarrow$ σε όλο το $\Re$.

- Αν πρόκειται για την **παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$** , με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ τότε:
  - Αν $\alpha > 0$:

    $f(x) \downarrow$ στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $\uparrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

    Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση **«στρέφει τα κοίλα άνω»**.

  - Αν $\alpha < 0$:

    $f(x) \uparrow$ στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $\downarrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

    Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η συνάρτηση **«στρέφει τα κοίλα κάτω»**.

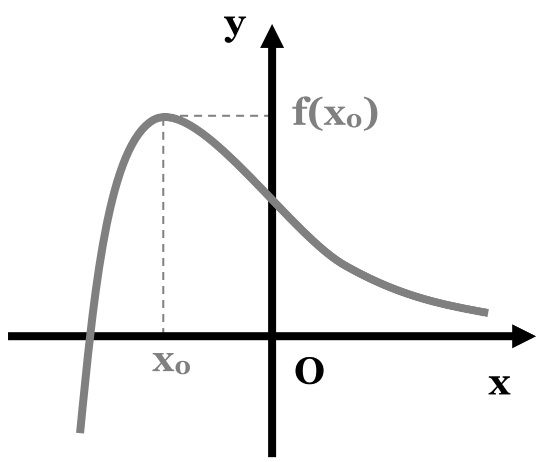
2. Ακρότατα Συνάρτησης

Ομοίως, παρατηρώντας μια γραφική παράσταση, πιθανότατα, να αντιληφθούμε πως κάποια σημεία βρίσκονται **ψηλότερα** ή **χαμηλότερα** από τα υπόλοιπα.
Άλλοτε από όλα τα υπόλοιπα σημεία κι άλλοτε, πάλι, μόνο από τα γειτονικά τους.
Τα σημεία αυτά - η μάλλον ορθότερα, οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση στα σημεία αυτά - ονομάζονται, αντίστοιχα, **μέγιστο ή μέγιστη τιμή** και **ελάχιστο ή ελάχιστη τιμή** της συνάρτησης.

(Ολικό) Μέγιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **(ολικό) μέγιστο** όταν, για κάθε $x \in A$:

$$\mathbf{f(x) \le f(x_o)}$$



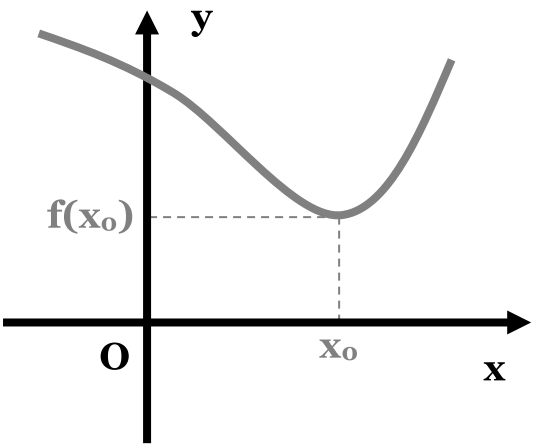
Η έκφραση, που συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε, έχει ως εξής:

«Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση (ή στο σημείο) x_o την τιμή $f(x_o)$».

(Ολικό) Ελάχιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν, για κάθε $x \in A$:

$$\mathbf{f(x) \geq f(x_o)}$$



Όμοια με πριν, η έκφραση που χρησιμοποιούμε είναι: **«Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση (ή στο σημείο) x_o την τιμή $f(x_o)$».**

Ακρότατα

Το (ολικό) **μέγιστο** και το (ολικό) **ελάχιστο** μιας συνάρτησης ονομάζονται, με μια λέξη, (ολικά) **ακρότατα** της συνάρτησης.

Μεθοδολογία

Για την εύρεση (εφόσον υπάρχει) της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης, ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από μια ανισοτική σχέση, η οποία είναι προφανής (πχ. $x^2 \geq 0$) και στη συνέχεια να «κατασκευάσουμε», βήμα-βήμα, σ' ένα απ' τα δύο μέλη τον τύπο της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 5 - x^2$, με πεδίο ορισμού όλο το , παρουσιάζει ολικό μέγιστο (και να βρεθεί).

Για κάθε $x \in$ είναι: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$

Συνεπώς, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, την τιμή 5 .

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$, με πεδίο ορισμού όλο το , παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (και να βρεθεί).

Είναι: $f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$

Όμως, για κάθε $x \in$ είναι:

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, την τιμή 2 .

Ειδικότερα:

■ Αν πρόκειται για την **παραβολή** $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$, με κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ τότε:

- Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$:

  Η f(x) παρουσιάζει (ολικό) **ελάχιστο** στο σημείο $\mathbf{x_o} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}$ το $\mathbf{f(x_o)} = -\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}}$.

- Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$:

  Η f(x) παρουσιάζει (ολικό) **μέγιστο** στο σημείο $\mathbf{x_o} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}}$ το $\mathbf{f(x_o)} = -\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}}$.

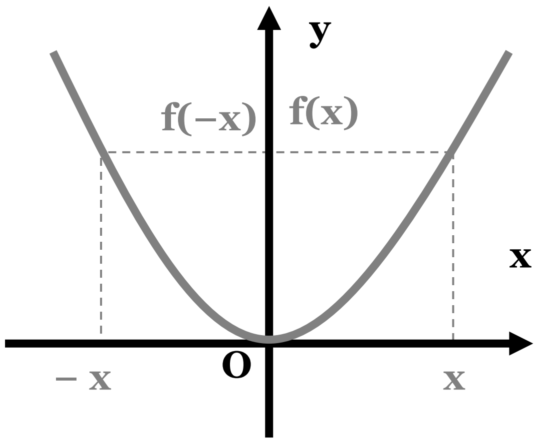
3. Συμμετρία Συνάρτησης

Μία συνάρτηση μπορεί να έχει διάφορες συμμετρίες. Εδώ θα εξετάσουμε δύο βασικές: τη συμμετρία ως προς τον **άξονα y΄y** (αξονική συμμετρία) και τη συμμετρία ως προς την **αρχή των αξόνων** (κεντρική συμμετρία).

Άρτια

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

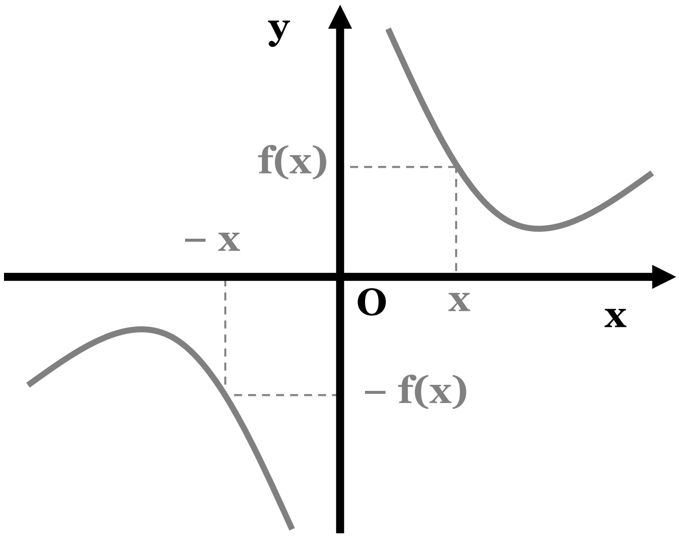


► Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν πάντα **άξονα συμμετρίας** τον **y΄y**. Ένας πρακτικός / οπτικός τρόπος, για να γίνει αυτό αντιληπτό, είναι να διπλώσουμε (νοητικά) το χαρτί, κατά μήκος του άξονα y΄y. Τότε, θα πρέπει το τμήμα της γραφικής παράστασης, που βρίσκεται δεξιά να έρθει και να συμπέσει, ακριβώς, με το τμήμα που βρίσκεται στ' αριστερά.

Περιττή

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$



▶ Οι περιττές συναρτήσεις έχουν πάντα **κέντρο συμμετρίας** την **αρχή των αξόνων**, δηλαδή το σημείο (0, 0). Ένας πρακτικός / οπτικός τρόπος, για να γίνει αυτό αντιληπτό, είναι πως αν περιστρέψουμε (νοητικά) το σχήμα, κατά 180^o, θα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητο.

Μεθοδολογία

Για την εύρεση (εφόσον υπάρχει) της συμμετρίας μιας συνάρτησης, είναι απαραίτητες, πάντα, οι εξής ενέργειες:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης κι εξετάζουμε αν για κάθε στοιχείο περιλαμβάνει και το αντίθετό του, δηλαδή αν για κάθε $x \in A$ είναι και $-x \in A$.

  Πρακτικά, ένα τέτοιο πεδίο ορισμού θα πρέπει να είναι συμμετρικό από μόνο του, δηλαδή να έχει μια από τις παρακάτω μορφές ($\alpha \in$):

  $$,\ (-\alpha, \alpha)\ ,\ [-\alpha, \alpha]\ ,\ (-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, \infty)\ ,\ (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$$

- Θέτουμε στον τύπο της συνάρτησης, όπου x το $-x$. Στο τέλος, αφού ολοκληρώσουμε όλες τις δυνατές πράξεις και ιδιότητες, βλέπουμε αν έχουμε καταλήξει στον αρχικό τύπο f(x), οπότε η συνάρτηση είναι άρτια, ή στο $-f(x)$, οπότε είναι περιττή. Μια συνάρτηση, πιθανότατα, να μην έχει καμία από τις δύο συμμετρίες.

Επιμέλεια αρχείου: **Ηλίας Ράιδος** Καθηγητής Μαθηματικών. E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/ **iraidos@gmail.com**

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 9|x|$ είναι άρτια.
Το πεδίο ορισμού είναι όλο το , άρα για κάθε $x \in$ είναι και $-x \in$.

$$f(-x) = (-x)^4 - 9|-x| = x^4 - 9|x| = f(x)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι άρτια .

πχ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ είναι περιττή.
Το πεδίο ορισμού είναι το *, άρα για κάθε $x \in$ είναι και $-x \in$.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -x^3 + \frac{1}{x} = -(x^3 - \frac{1}{x}) = -f(x)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι περιττή .

E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
http://blogs.sch.gr/iraidos/
iraidos@gmail.com

1. Μονοτονία

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2x + 3$ **β.** $f(x) = 2-\sqrt{3x-1}$

γ. $f(x) = \sqrt{x+1}+3$ **δ.** $f(x) = x+\sqrt{x-2}$

ε. $f(x) = \dfrac{2}{x}+1$ **στ.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}-1$

ζ. $f(x) = 1-\dfrac{3}{x^2}$ **η.** $f(x) =$

$2|x-1|+3\sqrt{(x-2)^2}$

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα κάθε φορά διαστήματα:

α. $f(x) = x(4-x)$ στο $(-\infty, 2]$ **β.** $f(x) = x^2-5x$ στο $(\dfrac{9}{2},$

$+\infty)$

γ. $f(x) = 2x^4+3$ στο $(0, +\infty)$ **δ.** $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ στο $[-2,$

$0)$

ε. $f(x) = 2x^3+1$ στο $(-\infty, 0]$ **στ.** $f(x) = x^4+2$ στο $(0,$

$+\infty)$

ζ. $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$ στο $(0, +\infty)$ **η.** $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ στο $(-\infty, 1)$

θ. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ στο $[0, +\infty)$

ι. $f(x) = x^2-4|x|+3$ στα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0]$ και $(0, +\infty)$

3. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2-\sqrt{3-x}$ και, στη συνέχεια, να κατατάξετε από τη μικρότερη προς το μεγαλύτερη τις τιμές:

$f(0{,}5)$, $f(1/3)$, $f(-10)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-0{,}8)$, $f(\sqrt{2})$, $f(1{,}5)$, $f(\sqrt{3})$

4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο, τον άξονα $x'x$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (|\lambda| - 3)x + 10$. Να προσδιοριστεί ο λ, ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα.

6. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση:

$$f(x) = |\alpha + 1|x + 3(2 - x)$$

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα στο . Κατόπιν, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{2014}{2015}$ και $\dfrac{2013}{2014}$.

2. Ακρότατα

8. Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ **β.** $f(x) = -2x^2 + 2$

γ. $f(x) = 1-\sqrt{2x+3}$ **δ.** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

ε. $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ **στ.** $f(x) = |x-5|$

9. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x$ **β.** $f(x) = x^2 + 2x + \dfrac{3}{2}$

10. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = |x-4|+3$ **β.** $f(x) = 1+\sqrt{9-x^2}$

γ. $f(x) = 3-\sqrt{x^2-4}$

11. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x+1-2\sqrt{x}$.

12. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τ' ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα διαστήματα:

α. $f(x) = x^2 + 3$ στο $[-2, -1]$

β. $f(x) = 2\sqrt{3 - x^2} + 3$ στο $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

γ. $f(x) = \sqrt{7 + \sqrt{6 - x}}$ στο $[2, 5]$

δ. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 - 4} + 2}$ στο $(-\infty, -2]$

13. Να προσδιοριστεί ο κ, έτσι ώστε όταν η συνάρτηση $f(x) = (3\kappa + 1)\cdot x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο, τότε για την ίδια τιμή του x, η συνάρτηση $g(x) = (3 - |\kappa + 2|)\cdot x^2$ να παρουσιάζει μέγιστο.

14. Να προσδιοριστεί ο μ, έτσι ώστε για τις τιμές που η εξίσωση $2\mu x - 3 = x$ έχει αρνητική λύση, η συνάρτηση $f(x) = (1 - |3\mu + 1|)x^2$ να παρουσιάζει μέγιστο.

3. Συμμετρία

15. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτε από τα δύο:

α. $f(x) = x^2|x|$

β. $f(x) = x|x|$

γ. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$

δ. $f(x) = x|x| + 3$

ε. $f(x) = x^3 - x|x|$

στ. $f(x) = x(1 - |x|) + 1$

ζ. $f(x) = \dfrac{x^3}{x - 1}$

η. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 8}$

θ. $\dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$

ι. $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3}{x^2 + 1}$

ια. $f(x) = 2x^3 - x + 1$

ιβ. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$

16. Ομοίως:

α. $f(x) = |x+1| + |x-1| + 2$

β. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

γ. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

δ. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

ε. $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(2-x)^2} + x \cdot \sqrt[3]{(2+x)^2}$

17. Ομοίως:

α. $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x<0 \\ x+1 & , x \geq 0 \end{cases}$ **β.** $f(x) = \begin{cases} -3x+4 & , x<0 \\ 3x+4 & , x>0 \end{cases}$

18. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη στο , η οποία είναι συγχρόνως άρτια και περιττή. Να δείξετε ότι f(x) = 0, για κάθε x∈ .

19. Δίνεται η συνάρτηση f: → με την ιδιότητα, για κάθε x, y ∈ :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Να δείξετε ότι:

α. f(0) = 0 **β.** H f είναι περιττή

20. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού , τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, α) , α ≠ 0. Είναι δυνατόν η f να είναι περιττή; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

21. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το . Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ είναι άρτια.

22. Αν η συνάρτηση f(x) είναι άρτια τότε να εξετάσετε αν η συνάρτηση g(x) = |f(x)| είναι άρτια, περιττή ή τίποτα απ' τα δύο.