ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

Β.1.2

Λόγος

Ευθυγράμμων

τμημάτων

Το

2Ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

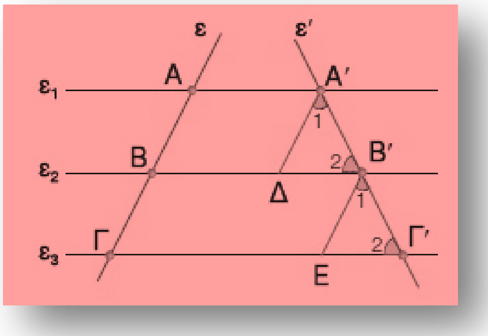
ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών

1. Να αποδείξετε ότι : Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει και κατόπιν να εφαρμόσετε το παρπάνω σε ένα τραπέζιο.

Απόδειξη

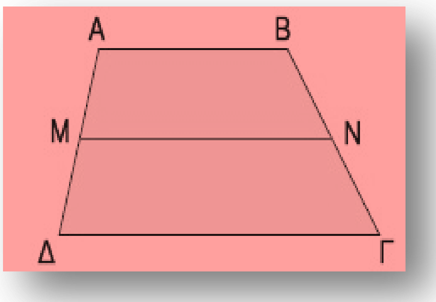
Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Α, Β, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ να είναι ίσα μεταξύ τους.



Αν μια άλλη ευθεία ε΄ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄ αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Β΄, Β΄Γ΄ είναι ίσα μεταξύ τους.
Πράγματι, αν φέρουμε Α΄Δ // ε, Β΄Ε // ε και συγκρίνουμε τα τρίγωνα Α΄Β΄Δ και Β΄Γ΄Ε παρατηρούμε ότι έχουν:
Α΄Δ = Β΄Ε γιατί Α΄Δ = ΑΒ, Β΄Ε = ΒΓ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΑ΄ΔΒ, ΒΒ΄ΕΓ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε ΑΒ = ΒΓ.
$Β_2΄ = Γ_2΄$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ε_2$, $ε_3$ που τέμνονται από την ε΄.
$Α_1΄ = Β_1΄$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Α΄Δ, Β΄Ε που τέμνονται από την ε΄.
Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε Α΄Β΄ = Β΄Γ΄.

Εφαρμογή στο τραπέζιο

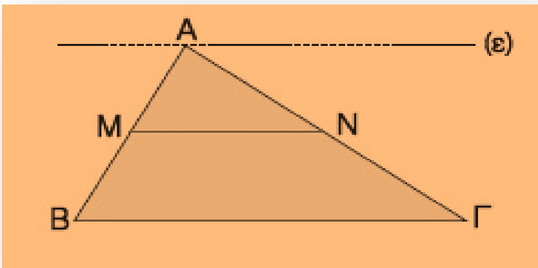
Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) αν από το μέσο Μ της ΑΔ φέρουμε ευθεία ΜΝ παράλληλη προς τις βάσεις του, τότε οι παράλληλες ΑΒ, ΜΝ, ΔΓ, αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΔ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΒΓ. Άρα ΒΝ = ΝΓ.



2. Να αποδείξετε ότι : Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Σέ ένα τρίγωνο ΑΒΓ, αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ και από το μέσο Μ της ΑΒ φέρουμε ΜΝ // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ αφού ορί- ζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.



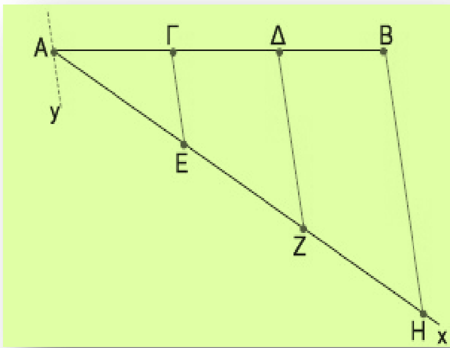
Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

3. Να διαιρέσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη .

Επίλυση

Μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη ως εξής:

Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ΄ αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ. Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αy παράλληλες προς τη ΒΗ.



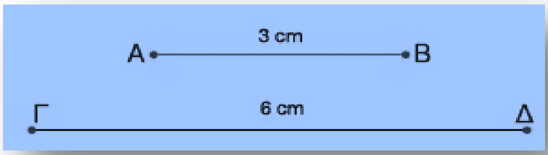
Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύ-γραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6, ..., ν ίσα τμήματα.

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

4. Τι καλείται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι είναι αυτός ίσος ;

- Ο **λόγος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει ΓΔ = λ·ΑΒ.



$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{6}{3} = 2 \text{ αφού ΓΔ=6=2·3=2·ΑΒ}$$

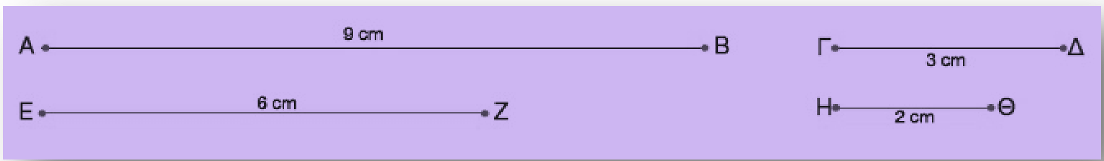
- Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

5. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ ; Τι καλείται αναλογία ; Ποιοι όροι καλούνται άκροι και ποιοι μέσοι σε μία αναλογία;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι **ανάλογα** προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ, όταν ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}.$$



Π.χ. $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{9}{3} = 3 = \frac{6}{3} = \frac{EZ}{H\Theta}$

Η ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα **β, γ** ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

6. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

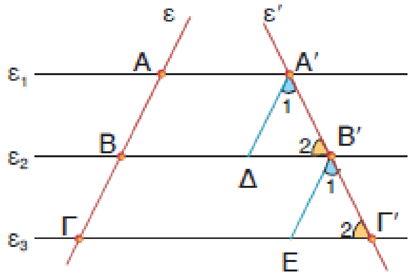
Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ



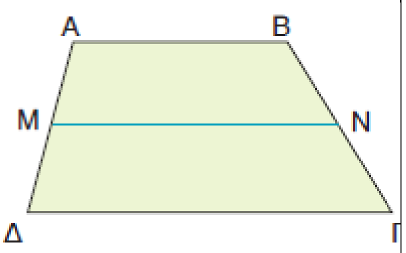
Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 και μια ευθεία ε που τις τέμνει στα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Αν ε' είναι μια άλλη ευθεία που τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα σημεία A', B', Γ', τότε ισχύει:

………………………

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

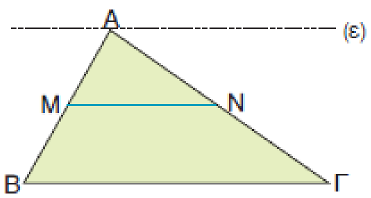
Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Αν M είναι το μέσο της $A\Delta$ και MN παράλληλη προς τις βάσεις, τότε

……………………………………



Αν M είναι το μέσο της AB και $MN \parallel B\Gamma$, τότε

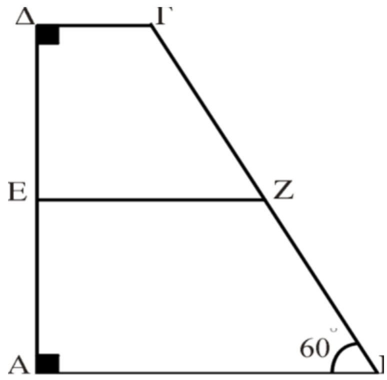
……………………………



Αν από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1. Στις παρακάτω προτάσεις πρέπει να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Οι προτάσεις στηρίζονται στην ιδιότητα της διαμέσου ενός ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσά του, (είναι ίση με το μισό της).



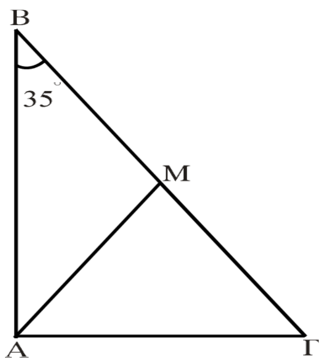
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι

Α = Δ = 90° και Β = 60°.

Αν ΓΔ = 2x και ΒΓ = 8x, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου ισούται με:

α) 3x β) 4x γ) 5x

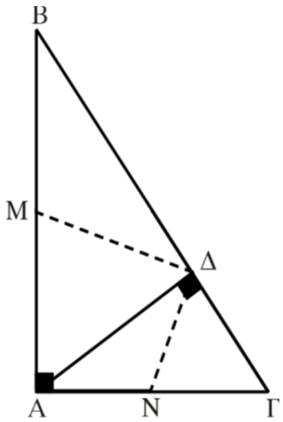
δ) 6x ε) 7x



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = 90° και Β = 35°. Αν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ τότε η γωνία ΑΜΒ ισούται με:

α) 55° β) 70° γ) 110°

δ) 100° ε) 125°

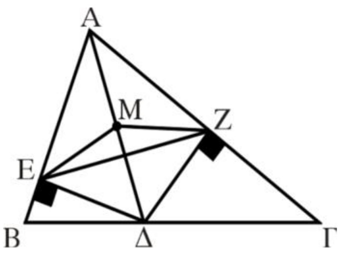


Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και το ΑΔ ύψος του. Αν Μ είναι μέσο της ΑΒ και Ν μέσο της ΑΓ τότε η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΜΔΝ ισούται με:

α) ΑΓ + ΒΓ β) ΑΒ + ΒΓ

γ) ΑΒ + ΑΓ δ) 2ΑΜ

ε) ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι σκαληνό. Το Δ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ. Αν ΔΕ ⊥ ΑΒ, ΔΖ ⊥ ΑΓ και Μ μέσο της ΑΔ, τότε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που ορίζονται από τα πέντε σημεία Α, Ε, Δ, Ζ, Μ είναι:

α) 2 β) 3 γ) 4 δ) 5 ε) 6

2.Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).

- *Άρα απομένει να αποδείξουμε ακόμη ότι ΕΖ = ΔΗ*
- *Όμως είναι και ΗΔ =* $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$*, γιατί ΗΔ είναι διάμεσος του ορθογωνίου ΑΗΒ και ισούται με το μισό της υποτείνουσας*
- *Άρα έχουμε ΖΕ = ΗΔ*
- *Το τμήμα ΕΖ συνδέει τα μέσα των ΑΓ και ΓΒ και είναι ΕΖ =* $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$
- *Επειδή το ΔΕ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, θα είναι ΔΕ // ΒΓ και το ΔΕΖΗ θα είναι τραπέζιο*

3.Οι γωνίες Β και Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ορθές. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, να δείξετε ότι ΚΛ $\perp$ ΒΔ.

Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).

- *Ενώνουμε το Κ με τα Β και Δ*
- *Όμοια ΚΔ =* $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$
- *Επειδή ΒΚΔ ισοσκελές και ΚΛ διάμεσος*
- *Το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και επειδή ΚΑ = ΚΓ θα είναι ΚΒ =* $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$

4. Να κάνετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ , Λ , Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα 4 τρίγωνα ΑΚΜ, ΒΚΛ, ΓΛΜ, ΚΛΜ είναι ίσα.

5.Να κάνετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ , Λ , Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΛΜ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, (ρόμβος).

6. Να κάνετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να πάρετε ένα τυχαίο σημείο Δ στην ΒΓ. Αν Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι η ΚΛ θα περάσει από το μέσο της ΑΔ.

7.Να κάνετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.
(Υπόδειξη: Στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ είναι …………)

8.Να κάνετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. Αν Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

9. Να κάνετε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ// ΓΔ και ΑΒ>ΓΔ. Έστω Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να ενώσετε το Δ με το Ζ και να το προεκτείνετε. Η προέκτασή του τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Η.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΓΖ και ΒΖΗ είναι ίσα.

β) Να δείξετε ότι το τμήμα ΕΖ είναι παράλληλο στην ΑΗ και ίσο με το μισό της.

γ) Να δείξετε ότι ΕΖ = (ΑΒ+ΔΓ)/2.

10.Να κάνετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^0$) και να φέρετε το ύψος του ΑΔ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των καθέτων πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΛΔ είναι ισοσκελή.

β) Να δείξετε ότι η γωνία ΚΔΛ είναι ορθή.