



1<sup>ο</sup> ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΙΩΝΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ 15<sup>ο</sup>

Η Συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \cdot \eta\mu x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Το

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

No 5

Τάξη : Β΄ Λυκείου  
Μάθημα : Άλγεβρα  
Κεφάλαιο : 1<sup>ο</sup>  
Διδακτική ενότητα : 5<sup>η</sup>  
Ημερομηνία : 29-10- 2018  
Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος

## Η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha \cdot \eta\mu x+\beta \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

# ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

## Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

**ΕΡΩΤΗΣΗ 1η:** Πως προκύπτει η γραφική παράσταση της  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu(x+\varphi)$  όταν είναι γνωστή η γραφική παράσταση της  $g(x)=\rho \cdot \eta\mu x$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 2η:** Ποια είναι τα συμπεράσματα για την περίοδο και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu(x+\varphi)$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η:** Τι λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η:** Τι λέγεται γραμμική τριγωνομετρική εξίσωση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η:** Τι λέγεται συμμετρική τριγωνομετρική εξίσωση;

### β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

**ΕΡΩΤΗΣΗ 6η:** Αν  $\alpha, \beta \neq 0$  τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\alpha \cdot \eta\mu x + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu x = \rho \cdot \eta\mu(x+\varphi)$   
όπου  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  και  $\varphi \in \mathbb{R}$  με  $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho}$ ,  $\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho}$ .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 7η:** Τι λέγεται διαφορά φάσεως των καμπυλών  $y = \rho \cdot \eta\mu(x+\varphi)$  και  $y = \rho \cdot \eta\mu x$ ;

## Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

### α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να βρείτε την περίοδο, την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = 2\eta\mu(x + \frac{\pi}{4})$  και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση,

2. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

ι)  $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 1$

ιι)  $\sqrt{2}\eta\mu x + \sqrt{6}\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

3. Ορθογώνιο τρίγωνο  $ABM$  είναι ορθογώνιο στο  $M$ .

Να βρεθεί η γωνία  $A = \omega$  έτσι ώστε να ισχύει  $(MA) + (MB) = 2\sqrt{6}$  όταν  $(AB) = 4$

4. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 5\eta\mu x + 12\sigma\upsilon\nu x + 3$$

5. Με συρματοπλέγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γής σχήματος ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα  $h$  m και μια οξεία γωνία  $\theta$  rad.

Ι) Να αποδείξετε ότι  $h = \frac{40}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + 1}$

ιι) Για ποια τιμή του  $\theta$  το  $h$  παίρνει την μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

**β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.**

6. Να επιλυθεί στο  $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$  η εξίσωση  $3\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi = 2$

7. Να επιλυθεί η ανίσωση  $\eta\mu\chi - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi + 1 \geq 0$ .

8. Να γράψετε στη μορφή  $f(\chi) = \rho \eta\mu(\chi + \varphi)$  τις συναρτήσεις

ι)  $f(\chi) = \sqrt{3}\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$

ιι)  $f(\chi) = -\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$

9. Να επιλυθεί η ανίσωση

$$\sqrt{3}\eta\mu 4\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi \geq \sqrt{2}$$

10. Δύο ρεύματα με την ίδια κυκλική συχνότητα  $\omega$  και με εντάσεις  $I_1 = 2\eta\mu\omega t$  και  $I_2 = 2\eta\mu(\omega t + \frac{2\pi}{3})$  διαρρέουν έναν αγωγό. Ναδειχθεί ότι το άθροισμά τους έχει την ίδια κυκλική συχνότητα.

## ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

## 1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

**ΕΡΩΤΗΣΗ 1η**

Μπορεί η διαφορά φάσεως των καμπυλών  $y = \rho \cdot \eta\mu\chi$ ,  $y = \rho \cdot \eta\mu(\chi + \varphi)$  να είναι αρνητικός αριθμός;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 2η**

Πως προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(\chi) = 2 \cdot \eta\mu(\chi - \frac{\pi}{4})$  με μετατόπιση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η**

Πως μετασχηματίζεται η συνάρτηση  $f(\chi) = \alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$  στη μορφή  $f(\chi) = \rho \cdot \eta\mu(\chi + \varphi)$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Η συνάρτηση  $f(\chi) = \rho \cdot \eta\mu(\chi + \varphi) + \kappa$ ,  $\rho > 0$  έχει ακρότατα τα  $\kappa + \rho, \kappa - \rho$ .

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η**

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Η συνάρτηση  $f(\chi) = \frac{1}{g(\chi) + \kappa}$  με  $g(\chi) = \rho \cdot \eta\mu(\chi + \varphi)$ ,  $\rho > 0$  έχει μέγιστο το  $\frac{1}{\kappa + \rho}$  και ελάχιστο το  $\frac{1}{\kappa - \rho}$ .

## 2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$f(x)=a\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x$	$\sqrt{2}\ \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
Διαφορά φάσεως	$\rho\cdot\eta\mu(x+\phi)$
$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$	$2\pi$
Περίοδος της $y = \rho\cdot\eta\mu(x+\phi)$	προς τα δεξιά κατά $\phi$
προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \rho\cdot\eta\mu x$	$\phi$
Η $y = \rho\cdot\eta\mu(x+\phi)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \rho\cdot\eta\mu x$	προς τα αριστερά κατά $\phi$

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

Α) Η συνάρτηση  $y = \rho\cdot\eta\mu(x+\phi)$  είναι ..... με περίοδο  $T = \dots$ , έχει μέγιστο ίσο με ..... και ελάχιστο ίσο με .....

β) Η  $f(x) = a\cdot\eta\mu x + \beta\cdot\sigma\upsilon\nu x$  μετατρέπεται σε  $f(x) = \dots$ , όπου  $\rho = \dots$  και  $\phi \in \mathbb{R}$

με .....

γ) Η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sqrt{2}\ \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$  προκύπτει .....

.....

Διατάξτε από τη μικρότερη στην μεγαλύτερη τις τιμές των φάσεων των συναρτήσεων

α)  $f(x) = 2\ \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

β)  $g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

γ)  $h(x) = 2\ \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ .

### 3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η συνάρτηση  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu(x+\phi)$  έχει

- Α  μέγιστο το  $\rho$  και ελάχιστο το  $-\rho$ .
- Β  μέγιστο το  $-\rho$  και ελάχιστο το  $\rho$ .
- Γ  μέγιστο το  $|\rho|$  και ελάχιστο το  $-|\rho|$ .

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Η εξίσωση  $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$  έχει λύση, όταν

- Α   $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$
- Β   $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$
- Γ   $\alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3<sup>Η</sup>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu(x+\phi)$  είναι

- Α  ευθεία.
- Β  παραβολή
- Γ  ημιτονοειδής καμπύλη.

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Η συνάρτηση  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu(x+\phi) + \kappa$ ,  $\rho > 0$  έχει

- Α  μέγιστο το  $\rho$  και ελάχιστο το  $-\rho$ .
- Β  μέγιστο το  $\kappa \cdot \rho$  και ελάχιστο το  $-\kappa \cdot \rho$ .
- Γ  μέγιστο το  $\kappa + \rho$  και ελάχιστο το  $\kappa - \rho$ .

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Η συνάρτηση  $f(x)=2 \cdot \eta\mu(x - \frac{\pi}{4})$  έχει γραφική παράσταση που προκύπτει από την μετατόπιση

της γραφικής παράστασης της  $y=2\eta\mu\chi$  κατά  $\frac{\pi}{4}$  προς τα

- Α  δεξιά.
- Β  αριστερά.
- Γ  άνω.



## 4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

### Ερώτηση α)

..... γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ημιτονοειδής καμπύλη;

### Ερώτηση β)

..... η συνάρτηση  $f(x)=ρ.ημ(x+φ)$  έχει μέγιστο το  $ρ$  και ελάχιστο το  $-ρ$ ;

### Ερώτηση γ)

..... την παράσταση  $α.ημx+β.συνx$  στην  $ρ.ημ(x+φ)$ ;

### Ερώτηση δ)

..... η γραφική παράσταση της  $y= ρ.ημ(x+φ)$  προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά  $φ$  μονάδες προς τα αριστερά της  $y=ρ.ημx$ ;

### Ερώτηση ε)

..... η συνάρτηση  $y=ρ.ημ(ωx+φ)$  έχει περίοδο  $0 < T < 2π$ ;

## 5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

### Διατυπώσεις των θεμάτων.

11. Να βρείτε την περίοδο, την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x)=\eta\mu(x-\frac{\pi}{2})$  και στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση,

12.Να επιλύσετε τις εξισώσεις

ι)  $\eta\mu 2x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu 2x = 1$

ιι)  $3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x = \sqrt{13}$

13. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$

14. Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $(AB)=6\text{cm}$ , να βρεθεί σημείο  $\Gamma$  τέτοιο, ώστε να ισχύει  $A\Gamma + \Gamma B = 8 \text{ cm}$ .

15. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

### 3.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Να επιλύσετε την εξίσωση

$$2\eta\mu\chi(\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi) = \sqrt{2} - 1$$

17.Μια μπάρα AB μήκους 2m τοποθετείται οριζόντια μεταξύ δύο κάθετων τοίχων . Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε (OA)+(OB) να γίνει μέγιστο, όπου O το σημείο τομής του επιπέδου που περιέχει την AB και είναι παράλληλο στο επίπεδο του πατώματος και των δύο τοίχων.

ι) Να εκφράσετε το (OA)+(OB) σε συνάρτηση του θ, όπου θ η γωνία OAB.

ιι)Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το (OA)+(OB) γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.

18.Δίνεται κύκλος κέντρου ο και διαμέτρου AB . Αν Μ σημείο του κύκλου , Κ η προβολή του Μ στην AB και θ η γωνία ΜΑΟ

ι) Να δείξετε ότι η περίμετρος Ρ του τριγώνου ΜΚΟ ισούται με  $P=1+\eta\mu 2\theta+\sigma\upsilon\nu 2\theta$

ιι)Για ποια τιμή του θ το Ρ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;

19.Να επιλυθεί η ανίσωση  $\eta\mu 3\chi+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3\chi < \frac{\sqrt{3}}{2}$

20. Να επιλυθεί το σύστημα 
$$\begin{cases} \eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2} \\ \chi-\psi=\pi \end{cases}$$