



ΜΑΘΗΜΑ 13^ο

Τριγωνομετρικοί

Αριθμοί

Της Γωνίας 2α

Το

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

No 3

Τάξη : Β΄ Λυκείου
Μάθημα : Άλγεβρα
Κεφάλαιο : 1^ο
Διδακτική ενότητα : 3^η
Ημερομηνία : 11-10-2018
Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος

Τριγωνομετρικοί

αριθμοί

της γωνίας 2α

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η: Ποιοι τύποι λέγονται τύποι αποτετραγωνισμού ή υποβιβασμού;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η: Ποιος είναι ο τύπος του ημίτονου διπλάσιου τόξου;
Αποδείξτε τον.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η: Ποιοι είναι οι τύποι του συνημίτονου διπλάσιου τόξου;
Αποδείξτε τους.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η: Ποιος είναι ο τύπος της εφαπτομένης διπλάσιου τόξου;
Αποδείξτε τον.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η: Ποιος τύπος εκφράζει το $\eta\mu 3\alpha$ σε συνάρτηση του $\eta\mu\alpha$;
Αποδείξτε τον.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6η: Ποιος τύπος εκφράζει το $\sigma\upsilon\nu 3\alpha$ σε συνάρτηση του $\sigma\upsilon\nu\alpha$;
Αποδείξτε τον.

Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να αποδείξετε ότι

$$i) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$$

$$ii) \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$$

2. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

$$i) \sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\chi}{2} = 0$$

$$ii) \epsilon\phi 2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi$$

3. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$$

4. Να αποδείξετε ότι

$$\epsilon\phi(45^\circ-\alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \epsilon\phi 2\alpha$$

και με την βοήθεια του παραπάνω τύπου να υπολογιστεί η $\epsilon\phi 15^\circ$.

10. Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu(120^\circ+\chi) + \sigma\upsilon\nu(240^\circ+\chi) = 0$$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 15° ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

α) $\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$

β) $\epsilon\varphi \frac{A}{2} = \epsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{2} = \eta\mu\alpha.$$

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
συν2α	$\frac{1-\sigma\upsilon 2\alpha}{2}$
ημ ² α	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$

Συμπληρώστε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν.

Αφού $15^\circ = 30^\circ/2$, τότε παίρνουμε $\eta\mu 15^\circ =$

.....

.....δηλαδή $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$.

Αφού $22,5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ τότε παίρνουμε $\eta\mu 22,5^\circ =$

.....

.....δηλαδή $\eta\mu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

Διατάξτε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

α) $\eta\mu 0, \eta\mu \alpha, \eta\mu 2\alpha, \eta\mu 3\alpha, \eta\mu 4\alpha, \eta\mu 12\alpha$ όταν $\alpha=30^\circ$.

β) $\eta\mu 0, \sigma\upsilon\upsilon \alpha, \epsilon\varphi \alpha, \sigma\varphi 2\alpha, \epsilon\varphi 5\alpha, \eta\mu 5\alpha$ όταν $\alpha=15^\circ$.

γ) $\eta\mu 0, \sigma\upsilon\upsilon 0, \epsilon\varphi 0, \eta\mu \alpha, \sigma\upsilon\upsilon \alpha, \epsilon\varphi \alpha, \sigma\varphi \alpha, \eta\mu 2\alpha, \sigma\upsilon\upsilon 2\alpha, \epsilon\varphi 2\alpha, \sigma\varphi 2\alpha$ όταν $\alpha=22,5$

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Όταν ισχύει η σχέση $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, τότε ο $\eta\mu 2\alpha$ είναι

Α

θετικός

Β

αρνητικός

Γ

μηδέν.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Ο τύπος $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi \alpha}{1-\epsilon\varphi^2 \alpha}$ ισχύει όταν $2\alpha=180^\circ$;

Α

Ναι, ισχύει.

Β

Όχι δεν ισχύει.

Γ

Ισχύει όταν $1-\epsilon\varphi^2 \alpha \neq 0$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Πότε ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\upsilon^2 \alpha = \sigma\upsilon\upsilon 2\alpha + \eta\mu^2 \alpha$;

Α

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Β

Όταν $\alpha > 0$

Γ

Όταν $\alpha < 0$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Ο υπολογισμός της γωνίας 15° γίνεται με τους τύπους

A της διαφοράς 2 γωνιών αφού $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

B του διπλασίου τόξου αφού $15^\circ = 30^\circ / 2$

Γ του τριπλασίου τόξου αφού $15^\circ = 45^\circ / 3$

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

Ερώτηση α)

..... δεν ισχύει ο τύπος

$$\epsilon\alpha = \frac{\epsilon\alpha + \epsilon\beta}{1 - \epsilon\alpha\epsilon\beta};$$

Ερώτηση β)

..... χρησιμοποιούμε τον
τύπο $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha$;

Ερώτηση γ)

..... χρησιμοποιούμε τους
τύπους υποβιβασμού ή
αποτετραγωνισμού;

Ερώτηση δ)

..... χρησιμοποιούμε τους
τύπους του τριπλασίου τόξου;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

1) Να δείξετε ότι:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} 1+\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} & \text{ii)} \frac{\sigma\varphi\alpha + 1}{\sigma\varphi\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha} & \text{iii)} \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \\ \text{iv)} \frac{\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha & \text{v)} \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2 & \end{array}$$

2) Αν $4\eta\mu 2x + 3\sigma\upsilon\nu 2x = 3$, να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi x = 0$ ή $\varepsilon\varphi x = \frac{4}{3}$

3) Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$, να δείξετε ότι: **i)** $\eta\mu 2x = \alpha^2 - 1$ και **ii)** $-\sqrt{2} \leq \alpha \leq \sqrt{2}$.

4) Να λυθούν οι εξισώσεις: **i)** $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu x = 1$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu x = 3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} - 2$ **iii)** $\eta\mu 2x - \sqrt{3}$
 $\sigma\upsilon\nu x = 0$.

5) Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu x$, να δείξετε ότι $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 2\sigma\upsilon\nu 2x$.

6) Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$.

α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$

β. Αν $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\varepsilon\varphi 2\alpha$.

7) Να δείξετε ότι: **i)** $\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1)\eta\mu x$.

ii) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους $\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$.

8) Να δείξετε ότι: **i)** $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$ **ii)** $\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$,

iii) $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \eta\mu 2\alpha$

9) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $1 = 2\eta\mu^2 \frac{A}{2}$, να υπολογίσετε την γωνία A

10) Αν $\sigma\upsilon\nu 56^\circ = 0,56$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 28° .

11) Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{2}{7}$ και $\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} + \varepsilon\varphi^2 \frac{\beta}{2} + \varepsilon\varphi^2 \frac{\gamma}{2} = 1$

12) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$