



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Υπουργείο Παιδείας,

Έρευνας και Θρησκευμάτων



ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ

ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΟΛΟΥ

A.1.10

Πράξεις

με ρητές

αλγεβρικές παραστάσεις

Το

10^ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- **ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ**
- **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
- **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ**

• ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Για να εκτελέσουμε τις 4 γνωστές μας πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, αρκεί

- να θυμηθούμε το πώς γίνονται οι πράξεις με τα απλά κλάσματα, αλλά επιπλέον και
- να γνωρίζουμε καλά παραγοντοποίηση!

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο ή περισσότερες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Παραγοντοποιούμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές.
 2. Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές μεταξύ τους, το ίδιο και τους παρονομαστές. Στην πράξη, αυτό που κάνουμε είναι απλώς να γράψουμε όλους τους όρους σε ένα μεγάλο κλάσμα!
 3. Κάνουμε απλοποίηση.
-

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Για να διαιρέσουμε δυο ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό και αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα.
 2. Συνεχίζουμε με τα βήματα που αναφέραμε στον πολλαπλασιασμό.
-

ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Για να προσθέσουμε ή ν' αφαιρέσουμε δυο ή περισσότερες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις, οι οποίες είναι ετερώνυμες, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα (αν είναι ομώνυμες προχωρούμε κατευθείαν στο 5^ο βήμα):

1. Παραγοντοποιούμε όλους τους παρονομαστές.

2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.

3. Σχεδιάζουμε τα γνωστά μας «καπελάκια». Το κόλπο, τώρα, είναι σε κάθε καπελάκι να βάλουμε ό,τι λείπει απ' τον αντίστοιχο παρονομαστή, ώστε να «φτάσει» το Ε.Κ.Π.

4. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με το καπελάκι.

5. Τα κλάσματα είναι πια ομώνυμα. Γράφουμε ένα μεγάλο κλάσμα με τον κοινό παρονομαστή και προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές. Προσοχή στα πρόσημα!

6. Αφού τελειώσουμε, αν θέλουμε παραγοντοποιούμε τον αριθμητή κι ελέγχουμε αν γίνεται απλοποίηση.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1^η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
$(x + 4) \cdot \frac{x^2 y}{x^2 - 16} =$ $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5} =$	<p>Για να πολλαπλασιάσουμε μια ακέραια με μια ρητή παράσταση, πολλαπλασιάζουμε την ακέραια παράσταση με τον αριθμητή του κλάσματος, δηλαδή:</p> $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\gamma} \cdot \alpha = \frac{\beta \cdot \alpha}{\gamma}$ <p>Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητές παραστάσεις, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:</p> $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

2^η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κάνετε τις διαιρέσεις:	ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
$\frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} =$	<p>Για να διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις, αντιστρέφουμε τον διαιρέτη και κάνουμε πολλαπλασιασμό,</p> <p>δηλαδή:</p> $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

3^η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:	ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
$\frac{3x^2 + 2x - 3}{x + 3} - \frac{2x}{x + 3} =$ $\frac{3x^2 + 2x - 3}{x + 3} + \frac{2x}{x + 3} =$ $\frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{3x - 6} + \frac{x + 8}{3x^2 - 12} =$	<p>Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε - αφαιρούμε τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή, δηλαδή:</p> $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$ <p>Για να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, εργαζόμαστε ως εξής:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές. • Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών. • Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. • Εκτελούμε τις πράξεις και στο τέλος κάνουμε τις απλοποιήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Πράξεις

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\alpha. \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$$

$$\beta. \frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{3x - 6} + \frac{x + 8}{3x^2 - 12}$$

$$\gamma. \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\delta. \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\epsilon. \frac{x + 2}{y - 4} \cdot \frac{y^2 - xy}{4 - x^2}$$

$$\sigma\tau. (x + 4) \cdot \frac{x^2 y}{x^2 - 16}$$

$$\zeta. \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\eta. \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x + 3}{x - 3}$$

$$\theta. \frac{\alpha^{2\nu} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^\nu + 1}$$

$$\iota. \frac{x^4 - x^2 - 4x + 4}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x}$$

$$\iota\alpha. \frac{\omega^2 - 9}{\omega + 3} : \frac{\omega + 3}{\omega^2 - 3^2}$$

$$\iota\beta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\iota\gamma. \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{2}$$

$$\iota\delta. \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5xy^2}$$

$$\iota\epsilon. \frac{4x}{3x} + \frac{1}{5x^3y}$$

$$\iota\sigma\tau. \frac{1}{x + 3} - \frac{2}{x}$$

$$\iota\zeta. \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$$

$$\iota\eta. \frac{1}{2x - 4} - \frac{1}{3x - 6} + \frac{x + 8}{3x^2 - 12}$$

$$\iota\theta. \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{2x}{x + 3}$$

$$\kappa. \frac{\alpha - 2\beta}{\alpha + 2\beta} + \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha - 2\beta} - \frac{8\alpha\beta}{\alpha^2 - 4\beta^2}$$

$$\kappa\alpha. \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\kappa\beta. \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\kappa\gamma. \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x - 1}$$

$$\kappa\delta. \frac{2x + 4}{x^2 - 2x} + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{6x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\kappa\epsilon. \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\kappa\sigma\tau. \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\kappa\zeta. \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + \frac{\alpha - 3}{\alpha^2 + 2\alpha} - \frac{3}{\alpha + 2}$$

$$\kappa\eta. \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$$

$$\kappa\theta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\lambda. \frac{x^{2v}}{x^v - 1} - \frac{x^{2v}}{x^v + 1} - \frac{1}{x^v - 1} + \frac{1}{x^v + 1}$$

2. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\alpha. \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$$

$$\beta. \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{3}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$\gamma. \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

$$\delta. \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x} - 2 \right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right)$$

$$\epsilon. \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$$

$$\sigma\tau. \frac{x - \frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$\zeta. \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

$$\eta. \frac{3}{1 + \frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}} + \frac{3}{1 + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}}$$

$$\theta. \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

$$\iota. \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$$

$$\iota\alpha. \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \cdot \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 1}$$

$$\iota\beta. \frac{1}{(x + y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x + y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\iota\gamma. \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} \right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2 y - x y^2} \cdot (x + y)$$

$$\iota\delta. \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \left(\frac{x}{y} + 1 \right) \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - y^2} \right)$$

$$\iota\epsilon. \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)$$

Συνδυαστικές

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος. Ποιος είναι ο ακέραιος αυτός;

(Υπόδειξη: Ονομάστε $333333 = x$)

4. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

5. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, x, y ισχύει ότι $\alpha y = \beta x$, να

αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ είναι ίση με 1.

6. Να αποδείξετε την ισότητα: $\frac{x^{10}}{x^5 - 1} - \frac{x^{10}}{x^5 + 1} - \frac{1}{x^5 - 1} + \frac{1}{x^5 + 1} = 2$

7. Να αποδείξετε την ισότητα: $\frac{x^v}{x^v + 1} + \frac{1}{x^v - 1} - \frac{2}{x^{2v} - 1} = 1$

8. Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$ και $B = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$.

α. Να καθορίσετε τα πεδία ορισμού των κλασμάτων A και B.

β. Να υπολογίσετε την παράσταση $A - B$.

9. Αν είναι $x = 3\sqrt{2} - 2$ και $y = 3\sqrt{2} + 2$ τότε

να υπολογίσετε την παράσταση: $\frac{x^2 \cdot y^2}{x \cdot y}$