



# ΜΑΘΗΜΑ 10<sup>ο</sup>

## Τριγωνομετρικές

### συναρτήσεις

# Το

# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

περιλαμβάνει

- ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

No 1

Τάξη : Β΄ Λυκείου  
Μάθημα : Άλγεβρα  
Κεφάλαιο : 1<sup>ο</sup>  
Διδακτική ενότητα : 1<sup>η</sup>  
Ημερομηνία : 25-10-2018  
Διδάσκων καθηγητής : Ηλίας Ράιδος

ΕΝΟΤΗΤΑ 1<sup>Η</sup>

01

τριγωνομετρικές

συναρτήσεις.

# ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

## Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

### α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

**ΕΡΩΤΗΣΗ 1η:** Τι λέγεται τριγωνομετρική συνάρτηση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 2η:** Ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 3η:** Τι λέγεται πρωτεύουσα ή βασική περίοδος μιας συνάρτησης  $f$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 4η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση ημίτονο και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 5η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση συνημίτονο και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 6η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση εφαπτομένη και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 7η:** Πως ορίζεται η συνάρτηση συνεφαπτομένη και πως συμβολίζεται;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 8η:** Ποια είναι η περίοδος των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 9η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\sigma\phi x$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 10η:** Ποια είναι τα ακρότατα και η περίοδος της συνάρτησης  $f(x)=\rho \cdot \eta\mu\omega x$ , όπου  $\omega, \rho > 0$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 11η:** Ποια είναι τα ακρότατα και η περίοδος της συνάρτησης  $f(x)=\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ , όπου  $\omega, \rho > 0$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 12η:** Ποια είναι η περίοδος των συναρτήσεων  $f(x)=\rho \cdot \epsilon\phi\omega x$ ,  $g(x)=\rho \cdot \sigma\phi\omega x$  όπου  $\omega, \rho > 0$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 13η:** Τι λέγεται ημιτονοειδής καμπύλη;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 14η:** Πως γίνεται ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=\eta\mu\chi + \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 15η:** Πως γίνεται ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)=\alpha \cdot \eta\mu\omega x$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\omega > 0$ ;

**β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης**

**ΕΡΩΤΗΣΗ 16η:** Τι λέγεται περιοδική συνάρτηση;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 17η:** Τι λέγεται περίοδος της συνάρτησης  $f$ ;

**ΕΡΩΤΗΣΗ 18η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\eta\mu x;$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 19η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x;$$

**ΕΡΩΤΗΣΗ 20η:** Ποια είναι η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\epsilon\phi x;$$

# ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

**M<sub>1</sub>**: Για να βρούμε την περίοδο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης  $f$  πρέπει να έχουμε υπόψην τα παρακάτω:

1<sup>η</sup> μορφή : Αν  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$  ή  $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$  τότε  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$

2<sup>η</sup> μορφή : Αν  $f(x) = \rho \epsilon\phi(\omega x)$  ή  $f(x) = \rho \sigma\phi(\omega x)$  τότε  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$

## Παράδειγμα

## Επίλυση

## Εφαρμογή για τον μαθητή

**M<sub>2</sub>**: Για να βρούμε τα ακρότατα μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης έχουμε

1<sup>η</sup> μορφή : Αν  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$  ή  $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x)$   
τότε  $\max f = |\rho|$  και  $\min f = -|\rho|$

2<sup>η</sup> μορφή : Αν  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$  ή  $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x) + \kappa$   
τότε  $\max f = |\rho| + \kappa$  και  $\min f = -|\rho| + \kappa$ .

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις εφαπτομένη και συνεφαπτομένη δεν έχουν ακρότατα.

## Παράδειγμα

## Επίλυση

## Εφαρμογή για τον μαθητή

M<sub>3</sub>: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$

A) Βρίσκουμε την περίοδο της  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$  οπότε εργαζόμαστε στο  $[0, \frac{2\pi}{|\omega|}]$

B) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

Στην 1<sup>η</sup> γραμμή, σε διάστημα πλάτους  $T$  παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά  $\frac{T}{4}$  ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις  $\omega x$ ,  $\eta\mu(\omega x)$ ,  $\rho \eta\mu(\omega x)$  και  $\rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$  και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

$x$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{2T}{4} = \frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{4T}{4} = T$
$\omega x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta\mu(\omega x)$	0	1	0	-1	0
$\rho \cdot \eta\mu(\omega x)$	0	$\rho$	0	$-\rho$	0
$f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + \kappa$	$\kappa$	$\rho + \kappa$	$\kappa$	$-\rho + \kappa$	$\kappa$

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη  $(x, f(x))$

Δ) Σχεδιάζουμε την ημιτονοειδή γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

### Παράδειγμα

### Επίλυση

### Εφαρμογή για τον μαθητή

M<sub>4</sub>: Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu(\omega x) + \kappa$  εργαζόμαστε παρόμοια με εκείνη της συνάρτησης  $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$

### Παράδειγμα

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

M<sub>5</sub>: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \sin(\omega x) + \kappa$

A) Βρίσκουμε την περίοδο της  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$  οπότε εργαζόμαστε στο  $(-\frac{\pi}{2|\omega|}, \frac{\pi}{2|\omega|})$

B) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

Στην 1<sup>η</sup> γραμμή, σε διάστημα πλάτους  $T$  παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά  $\frac{T}{4}$

ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις  $\omega x$ ,  $\sin(\omega x)$ ,  $\rho \sin(\omega x)$  και  $\rho \sin(\omega x) + \kappa$  και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

$x$	$-\frac{\pi}{2 \omega }$	$-\frac{\pi}{2 \omega } + \frac{T}{4}$	0	$-\frac{\pi}{2 \omega } + \frac{3T}{4}$	$\frac{\pi}{2 \omega }$
$\omega x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\omega x)$	-----	-1	0	1	-----
$\rho \cdot \sin(\omega x)$	-----	$-\rho$	0	$\rho$	-----
$f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x) + \kappa$	-----	$-\rho + \kappa$	$\kappa$	$\rho + \kappa$	-----

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη  $(x, f(x))$

Δ) Σχεδιάζουμε την γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

**Παράδειγμα**

**Επίλυση**

**Εφαρμογή για τον μαθητή**

Μ<sub>6</sub>: Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \sin(\omega x) + \kappa$

A) Βρίσκουμε την περίοδο της  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$  οπότε εργαζόμαστε στο  $(0, \frac{\pi}{|\omega|})$

B) Κάνουμε πίνακα μεταβολών.

Στην 1<sup>η</sup> γραμμή, σε διάστημα πλάτους  $T$  παίρνουμε τιμές που αυξάνουν ανά  $\frac{T}{4}$

ενώ στις επόμενες γραμμές διαδοχικά τις  $\omega x$ ,  $\sin(\omega x)$ ,  $\rho \sin(\omega x)$  και  $\rho \sin(\omega x) + \kappa$  και τις αντίστοιχες τιμές τους δηλαδή τον πίνακα

$x$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{\pi}{ \omega }$
$\omega x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$\sin(\omega x)$	-----	1	0	-1	-----
$\rho \cdot \sin(\omega x)$	-----	$\rho$	0	$-\rho$	-----
$f(x) = \rho \cdot \sin(\omega x) + \kappa$	-----	$\rho + \kappa$	$\kappa$	$-\rho + \kappa$	-----

Γ) Σημειώνουμε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα ζεύγη  $(x, f(x))$

Δ) Σχεδιάζουμε την γραμμή που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

### Παράδειγμα

### Επίλυση

### Εφαρμογή για τον μαθητή



## Β. ΠΑΡΑΔΕΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

### α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=2\eta\mu x$ ,  $g(x)=0,5\eta\mu x$ ,  $h(x)=-2\eta\mu x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=\eta\mu x$ ,  $g(x)=\eta\mu 3x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

3. Να δειχθεί ότι είναι περιττές οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x} + \epsilon\phi x \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 + \eta\mu x.$$

4. Εστω η συνάρτηση  $f(x)=2\eta\mu \frac{x}{2}$ . Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

5. Ένα παιχνίδι κρέμεται από το ταβάνι με ένα ελατήριο και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει το ύψος του από το πάτωμα είναι  $h=1+\frac{1}{3}\sin 3t$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

I) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

II) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

III) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**β) Συμπληρωματικά παραδείγματα και εφαρμογές.**

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=\sin 2x$ ,  $h(x)=3\sin 2x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

2. Έστω η συνάρτηση  $f(x)=4\eta\mu \frac{x}{3}$ . Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

3. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\eta\mu 4x,$$

$$g(x)=3\sin \frac{x}{2}-1$$

$$h(x)=\epsilon\phi(x-\frac{\pi}{4})+1$$

4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f(x)=3\eta\mu 4x-2$  και  $g(x)=3f(x)$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Η απόσταση  $x$  του πιστονιού από το ένα άκρο του κυλίνδρου δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t)=\frac{1}{4}\eta\mu 3t, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.}$$

I) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

II) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 12$ .

# ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

## 1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Μπορεί η περίοδος  $T$  μιας συνάρτησης  $f$  να είναι αρνητικός αριθμός;

### ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Η συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu x$  είναι περιττή.

### ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Οι συναρτήσεις  $f(x)=\epsilon\phi x$  και  $g(x)=\sigma\phi x$  δεν είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Η μελέτη μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης μπορεί να περιοριστεί στη μελέτη της στην αντίστοιχη της περίοδο  $T$ .

### ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:  
Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega \cdot x)$  με  $\rho, \omega > 0$  έχει μέγιστη τιμή το  $\rho$ , ελάχιστη το  $-\rho$  και η περίοδός της είναι  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

## 2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$f(x)=\eta\mu x$	* $[0,\pi]$ γνησίως φθίνουσα
$\epsilon\phi x$	* παρουσιάζουν ακρότατα
$\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$	* δέχονται κατακόρυφες ασύμπτωτες
$\epsilon\phi x, \sigma\phi x$	* $T=2\pi$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	* $R_1= \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \}$ .
$\sigma\phi x$	* $R_1= \{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0 \}$ .

**Συμπληρώστε τις προτάσεις που ακολουθούν:**

Αν  $f(x)= a \cdot \eta\mu\omega x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$  τότε

α) Μέγιστη τιμή .....Ελάχιστη τιμή.....

β) Περίοδος  $T =$  .....

Αν  $f(x)= a \cdot \epsilon\phi\omega x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$ , τότε

α) Μέγιστη τιμή .....Ελάχιστη τιμή.....

β) Περίοδος  $T =$  .....

**Διατάξτε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που ακολουθούν.**

α)  $\eta\mu 0$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{5}$ ,  $\eta\mu \frac{3\pi}{4}$ ,  $\eta\mu \frac{5\pi}{6}$

β)  $\sigma\upsilon\nu 0$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4}$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6}$

γ)  $\epsilon\phi 0$ ,  $\epsilon\phi \frac{5\pi}{6}$ ,  $\epsilon\phi \frac{\pi}{5}$ ,  $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$

### 3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Η περίοδος  $T$  μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης είναι

Α  συνάρτηση του  $\chi$ .

Β  πραγματικός αριθμός  $T > 0$ .

Γ  πραγματικός αριθμός.

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Η συνάρτηση  $f(\chi) = \eta\mu\chi$  είναι περιοδική με περίοδο

Α   $T = 2\pi$

Β   $T = \pi$

Γ   $T = \pi/2$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(\chi) = \epsilon\phi\chi$  ;

Α   $A = \mathbb{R}$

Β   $A = \mathbb{R}_1 = \{\chi \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\chi \neq 0\}$ .

Γ   $A = \mathbb{R}_1 = \{\chi \in \mathbb{R} \mid \eta\mu\chi \neq 0\}$ .

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα  $[0, \pi/2]$ ,  $[3\pi/2, 2\pi]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[\pi/2, 3\pi/2]$

Α  τότε  $f(\chi) = \eta\mu\chi$

Β  τότε  $f(\chi) = \sigma\upsilon\chi$

Γ  τότε  $f(\chi) = \epsilon\phi\chi$

#### ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Ποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν κατακόρυφες ασύμπτωτες

Α  Η  $f(\chi) = \eta\mu\chi$

Β  Η  $f(\chi) = \sigma\upsilon\chi$

Γ  Οι  $f(\chi) = \epsilon\phi\chi$  και  $g(\chi) = \sigma\phi\chi$ .

## 4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: ΟΤΑΝ.....

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις

Πότε.....

με όταν....

### Ερώτηση α)

..... μία τριγωνομετρική  
συνάρτηση δέχεται κατακόρυφη  
ασύμπτωτη;

### Ερώτηση β)

..... μία συνάρτηση είναι  
περιοδική με περίοδο  $T \in \mathbb{R}^*$  ;

### Ερώτηση γ)

..... ορίζεται η συνάρτηση  
 $f(x) = \sin x$  ;

### Ερώτηση δ)

..... μία τριγωνομετρική  
συνάρτηση παρουσιάζει  
ακρότατα;

### Ερώτηση ε)

..... μία καμπύλη είναι  
ημιτονοειδής;

## 5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

11. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=2\sin x$ ,  $g(x)=0,5\sin x$ ,  $h(x)=-2\sin x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

12. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x)=\sin x$ ,  $g(x)=\sin 3x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

13. Εστω η συνάρτηση  $f(x)=2\eta\mu \frac{x}{2}$ . Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της; Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

14. Η παλίρροια σε μία θαλάσσια περιοχή περιγράφεται από την συνάρτηση  $y=3\eta\mu(\frac{\pi}{6}-t)$ , όπου  $y$  η στάθμη του ύψους των υδάτων σε μέτρα και  $t$  ο χρόνος σε ώρες.

I) Να βρείτε τη υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη μικρότερη άμπωτη.

II) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 12$ .

15. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\eta\mu 2x$ .

Να βρείτε τον τύπο της αντίθετης συνάρτησης της  $f$ .

Να γίνει ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της αντίθετης της  $f$  στο ίδιο σύστημα αξόνων με την  $f$ .

### 3.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f(x)=\eta\mu x$  και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x)=1+\eta\mu x$  και  $h(x)=-1+\eta\mu x$ , όπου  $x\in[0,2\pi]$ .

17. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f(x)=\eta\mu x$  και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x)=\eta\mu 3x$  και  $h(x)=\eta\mu \frac{x}{3}$ , όπου  $x\in[0,2\pi]$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=2\eta\mu \frac{x}{3}$ .

α) Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης;

β) Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης;

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

19. Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση την συνάρτηση  $f(x)=\epsilon\phi \frac{x}{2}$

20. Ένα παιχνίδι κρέμεται από το ταβάνι με ένα ελατήριο. Η απόσταση του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 1,5m. Όταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει, τότε το ύψος του από το πάτωμα δίνεται από τον τύπο  $h=1,5+\frac{1}{3}\sin 3t$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

α) Να υπολογίσετε την διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψους.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(t)$  για  $t\in[0,6\pi]$