M_1: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση α΄ βαθμού ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
α) Βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών
β) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
γ) Κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
δ) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
ε) Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και καταλήγουμε στη μορφή αx=β
στ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα ανάλογα με τις τιμές των α, β.

Παράδειγμα 1ο

$$\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4} \quad (1)$$

Επίλυση

Η (1) γράφεται $20\frac{1-4x}{5}-20\frac{x+1}{4}=20\frac{x-4}{20}+20\frac{5}{4}$
4(1-4x)-5(x+1)=x-4+5.5
4-16x-5x-5=x-4+25
-16x-5x-x=25-4-4+5
-22x = 22
x = -1

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x+7}{4}-\frac{2x+5}{3}=\frac{2-x}{4}-\frac{2+x}{2}$

M_2: Για να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση α΄ βαθμού έχει μία λύση αρκεί να ακολουθήσουμε τη M_1 και να καταλήξουμε στη σχέση αx=β με $\alpha \neq 0$.

Παράδειγμα 2ο

Να προσδιορισθεί ο λ, ώστε η εξίσωση: $\lambda^2 x-\frac{2}{\lambda}=4\chi+1$ (1), να έχει μοναδική λύση.

Επίλυση
Πρέπει $\lambda \neq 0$
Η (1) γράφεται $\lambda^3\chi - 2 = 4\lambda\chi+\lambda$
$\lambda^3\chi - 4\lambda\chi = \lambda+2$
$\lambda(\lambda^2-4)\chi = \lambda+2$
$\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)\chi = \lambda+2$ (2)
Για να έχει μοναδική λύση η (2) πρέπει $\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \neq 0$ δηλαδή $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$.

Εφαρμογή 2η από τον μαθητή

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \Re$ για τις οποίες η εξίσωση:
$\lambda^2(x-2)+3(x-5)=5(\lambda-3)+10$ δεν έχει λύση στο $\Re$.

M_3: Για να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση α΄ βαθμού είναι αδύνατη αρκεί να ακολουθήσουμε τη M_1 και να καταλήξουμε στη σχέση αx=β με α=0 και $\beta \neq 0$.

Παράδειγμα 3ο

Να προσδιορισθεί ο λ, ώστε η εξίσωση $(\lambda^2+3)x-4(x-\lambda)=\lambda^2+3$, να είναι αδύνατη.

Επίλυση

Η εξίσωση **$(\lambda^2+3)x-4(x-\lambda)=\lambda^2+3$ γράφεται $\lambda^2\chi+3\chi-4\chi+4\lambda=\lambda^2+3$ οπότε**
$\lambda^2\chi-\chi=\lambda^2-4\lambda+3$ δηλαδή $(\lambda^2-1)\chi=\lambda^2-(3+1)\lambda+3.1$ δηλαδή $(\lambda-1)(\lambda+1)\chi = (\lambda-1)(\lambda-3)$ (1)
Η (1) είναι αδύνατη όταν $(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ και $(\lambda-1)(\lambda-3) \neq 0$ δηλαδή $\lambda = -1$.

Εφαρμογή 3η από τον μαθητή

Να λυθεί η εξίσωση: $4x-8(2x-3)=-5x+7(1-x)$

M_4: Για να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση α΄ βαθμού είναι αόριστη ή ταυτότητα αρκεί να ακολουθήσουμε τη M_1 και να καταλήξουμε στη σχέση αx=β με α =0 και β=0.

Παράδειγμα 4ο
Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η εξίσωση $(\lambda+1)\chi-2(\lambda+2\chi) = \lambda(\lambda-2)-9$ (1) να είναι ταυτότητα.

Επίλυση

Η (1) γράφεται $\lambda\chi+\chi-2\lambda-4\chi = \lambda^2-2\lambda-9$
$\lambda\chi-3\chi = \lambda^2-9$
$(\lambda-3)\chi = (\lambda-3)(\lambda+3)$ (2)
Η Εξίσωση (2) είναι ταυτότητα όταν $\lambda-3 = 0$ και $(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$ δηλαδή $\lambda = 3$.

Εφαρμογή 4η από τον μαθητή

Να λυθεί η εξίσωση: $9-3x+6-2(x+2)=5(7-x)-24$

M_5: Για να επιλύσουμε μια παραμετρική εξίσωση α΄ βαθμού ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

1) Μετατρέπουμε την εξίσωση στη μορφή αx=β όπου α, β παραστάσεις της παραμέτρου.

2) Παραγοντοποιούμε τις παραστάσεις α, β και ονομάζουμε (1) τη σχέση που καταλήξαμε.

3) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

α) Αν $\alpha \neq 0$ (εξετάζουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου ισχύει το παραπάνω), τότε η εξίσωση έχει μια λύση την x=$\frac{a}{\beta}$.

β) Αν α=0, τότε παίρνουμε την τιμή της παραμέτρου που μηδενίζει την παράσταση, τις αντικαθιστούμε στην (1) και συμπεραίνουμε αν η εξίσωση είναι αδύνατη ή αόριστη.

Παράδειγμα 5ο

Να επιλυθεί η εξίσωση: λ(λχ-4)=λχ-4 (1)

Επίλυση

Η (1) γράφεται $\lambda^2\chi-4\lambda=\lambda\chi-4$

$\lambda^2\chi-\lambda\chi=4\lambda-4$

$\lambda(\lambda-1)\chi = 4(\lambda-1)$ (2)

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

1^{η}.**Για** $\lambda(\lambda-1) \neq 0$ δηλαδή $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η (2) έχει μοναδική λύση την $\chi = \frac{4}{\lambda}$

2^{η}.**Για** $\lambda(\lambda-1) = 0$ δηλαδή λ = 0 ή λ=1 έχουμε:

α) Για λ = 0 η (2) δίνει 0 χ = -4 αδύνατη.

Β) Για λ = 1 η (2) δίνει 0 χ = 0 ταυτότητα.

<u>Εφαρμογή 5η από τον μαθητή</u>

Να λύσετε την εξίσωση, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ: $\lambda^2(\chi-1)+3\lambda=(\chi+2)$

M_6: Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα:

α) Ονομάζουμε x τον άγνωστο του προβλήματος.

β) Θέτουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, αν χρειάζονται

γ) Με βάση τα δεδομένα της άσκησης σχηματίζουμε εξίσωση α΄ βαθμού.

δ) Επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση.

ε) Επαληθεύουμε τη λύση της.

στ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα

Παράδειγμα 6ο

Ένας μαθητής παίζει το παιχνίδι της σκοποβολής σε ένα Λούνα Παρκ με τους εξής όρους. Σε κάθε επιτυχή σκόπευση κερδίζει 20 δρχ. ενώ σε κάθε ανεπιτυχή σκόπευση χάνει 50 δρχ. Αν μετά 20 βολές έχει κερδίσει 190 δρχ., να βρεθεί πόσες επιτυχείς και πόσες ανεπιτυχείς σκοπεύσεις είχε.

Επίλυση

Έστω χ οι επιτυχείς βολές , οπότε 20 – χ είναι οι ανεπιτυχείς ($\chi > 0$).
Για τις επιτυχείς βολές κερδίζει 20χ ενώ για τις ανεπιτυχείς χάνει 50(20-χ).
Αν μετά 20 βολές έχει κερδίσει 190 δρχ. τότε θα ισχύει

$20\chi - 50(20-\chi) = 190$
$20\chi-1000+50\chi = 190$
$70\chi = 190+1000$
$70\chi=1190$
$\chi = 17$

άρα οι επιτυχείς βολές είναι 17 και οι ανεπιτυχείς 3.

<u>Εφαρμογή 6η από τον μαθητή</u>

Να βρεθεί ένας αριθμός που τα $\frac{2}{3}$ του και τα $\frac{3}{4}$ του δίνουν 170.

Μ$_7$: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού στην ελληνική μορφή $\alpha\chi^2 + \gamma = 0$

α) Επιλύουμε ως προς χ^2 δηλαδή $\chi^2 = \frac{-\gamma}{\alpha}$ (1)

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

I. Αν $\frac{-\gamma}{\alpha} > 0$ και $\chi = \sqrt{\frac{-\gamma}{\alpha}}$

II. Αν $\frac{-\gamma}{\alpha} < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

Μ$_8$: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού στην ελλειπή μορφή $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$

Α) Κάνουμε παραγοντοποίηση

Β) Μηδενίζουμε κάθε παράγοντα

Γ) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_9 : Για να επιλύσουμε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού στην μορφή $αχ^2 + βχ + γ = 0$, $α \neq 0$ με την μέθοδο της συμπλήρωσης

α) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το α

β) Προσθέτουμε κατάλληλο αριθμό (το τετράγωνο του μισού του αριθμού που βρίσκεται μεταξύ των $χ^2$,χ) και στα δύο μέλη ώστε να σχηματιστεί στο $1^ο$ μέλος η ταυτότητα $(α \pm β)^2$.

γ) Προκύπτει η μορφή $χ^2 = κ$ την οποία επιλύουμε ως προς χ , αν έχει λύση.

δ) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{10}: Για να επιλύσουμε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού με βάση την διακρίνουσα $Δ = β^2 – 4αγ$ πρέπει να γνωρίζουμε τα παρακάτω :

$Δ = β^2 – 4αγ$	Η εξίσωση $αχ^2 + βχ + γ = 0$, $α \neq 0$
$Δ > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες δηλαδή $χ_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$
$Δ = 0$	Έχει μία ρίζα διπλή , δηλαδή $χ = \dfrac{-β}{2α}$
$Δ < 0$	Δεν έχει πραγματική ρίζα

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{11} : Για να επιλύουμε ότι η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, αρκεί να δείξουμε ότι :

$1^{ος}$ τρόπος : $\Delta > 0$

$2^{ος}$ τρόπος : $\alpha \cdot \gamma < 0$, δηλαδή οι συντελεστές α και γ είναι ετερόσημοι.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{12} : Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει διπλή ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta = 0$.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{13} : Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση δεν έχει πραγματική ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta < 0$

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{14} : Για να δείξουμε ότι ένας αριθμός κ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha\kappa^2 + \beta\kappa + \gamma = 0$ δηλαδή για χ=κ η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ επαληθεύεται.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>**Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**</u>

M_{15}: Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα
Α) Ονομάζουμε χ, ψ τα ζητούμενα μεγέθη και θέτουμε τους περιορισμούς , αν χρειάζονται.
Β) Με βάση τα δεδομένα σχηματίζουμε εξισώσεις.
Γ) Συνδυάζοντας τις εξισώσεις προκύπτει εξίσωση δευτέρου βαθμού.
Δ) Επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση.
Ε) Επαληθεύουμε τις λύσεις.
ΣΤ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>**Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**</u>

M_{16}: Για να δείξουμε ότι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει ρητές ρίζες αρκεί να δείξουμε $\Delta = \kappa^2$, κεQ.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>**Εφαρμογή 1η από τον μαθητή**</u>

M_{17}: Για να επιλύσουμε την εξίσωση της μορφής $αx^2+β|x|+γ=0$ (1)
α) Θέτω $|x|=y\geq 0$, οπότε $|x|^2=x^2=y^2$
β) Μετασχηματίζω την (1) στη μορφή $αy^2+βy+γ=0$ την οποία επιλύω.
γ) Αντικαθιστούμε τις τιμές του y στη $|x|=y$ και επιλύουμε ως προς x.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{18}: Για να επιλύσουμε μια ρητή εξίσωση:
α) Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών και βάζουμε περιορισμό ΕΚΠ$\neq 0$.
β) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.
γ) Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει μετά την απαλοιφή των παρονομαστών.
δ) Εξετάζουμε αν οι λύσεις της εξίσωσης αντίκεινται στους περιορισμούς του ΕΚΠ.
ε) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{19}: Για να επιλύσουμε μια διτετράγωνη εξίσωση:
α) Θέτω $x^2=y\geq 0$ (1), οπότε προκύπτει η επιλύουσα της διτετράγωνης $αy^2+βy+γ=0$(2)
β) Επιλύουμε τη (2).
γ) Αντικαθιστώ τις λύσεις της (2) στην (1) και επιλύουμε ως προς x.
δ) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις της εξίσωσης.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{20}: Για να επιλύσουμε ένα σύστημα 2x2 με μια εξίσωση πρωτοβάθμια και την άλλη δευτεροβάθμια εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντικαταστάσεως:

α) Επιλύουμε την πρωτοβάθμια ως προς έναν άγνωστο και την ονομάζουμε (1).

β) Αντικαθιστούμε την (1) στη δευτεροβάθμια και την επιλύουμε. Τις λύσεις που προκύπτουν τις αντικαθιστούμε στην (1).

γ) Συμπεραίνουμε για τις λύσεις του συστήματος.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{21}: Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα:

α) Ονομάζουμε x και y τα ζητούμενα του προβλήματος.

β) Θέτουμε περιορισμούς, αν χρειάζεται.

γ) Με βάση τα δεδομένα της άσκησης σχηματίζουμε σύστημα.

δ) Επιλύουμε το παραπάνω σύστημα.

ε) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{22}: Για να δείξουμε ότι η ευθεία ε: $y=\beta x+\gamma$ τέμνει την παραβολή c: $y=\alpha x^2$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2=\beta x+\gamma \Leftrightarrow \alpha x^2-\beta x-\gamma=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta>0$.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_{23}: Για να δείξουμε ότι η ευθεία ε: $y=\beta x+\gamma$ εφάπτεται με την παραβολή c: $y=\alpha x^2$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2=\beta x+\gamma \Leftrightarrow \alpha x^2-\beta x-\gamma=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=0$.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_{24}: Για να δείξουμε ότι η ευθεία ε: $y=\beta x+\gamma$ δεν τέμνει την παραβολή c: $y=\alpha x^2$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2=\beta x+\gamma \Leftrightarrow \alpha x^2-\beta x-\gamma=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta<0$.

Παράδειγμα

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

M_{25}: Για να επιλύσουμε προβλήματα στα οποία μεσολαβούν τύποι της Φυσικής πρέπει να γνωρίζουμε τους τύπους:

α) $h=\frac{1}{2}gt^2$ (ελεύθερη πτώση)

β) $S=Ut$ (κίνηση ευθύγραμμη)

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>

M_{26}: Για να έχει 4 άνισες πραγματικές ρίζες μια διτετράγωνη εξίσωση πρέπει η επιλύουσά της να έχει δύο πραγματικές θετικές και άνισες ρίζες, δηλαδή για την επιλύουσα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα $\Delta>0$, $S>0$ και $P>0$.

Παράδειγμα

Επίλυση

<u>Εφαρμογή 1η από τον μαθητή</u>