ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΟ 1Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ 4ο ΜΕΡΟΣ

M_{30}: Για να αποδείξουμε ανισότητα με μέτρα διανυσμάτων έχουμε υπόψη ότι

α) $\left|\text{συν}\,(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right| \le 1$

β) $|\vec{\alpha}| \ge 0$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$ αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ οξεία και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$ αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ αμβλεία

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $\vec{\alpha} \neq \pm\vec{\beta}$ **, να δείξετε ότι** $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|} + \dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|} \ge 1$ **.**

Επίλυση

Είδαμε ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|$,επομένως

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|} \ge \frac{1}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|} \ge \frac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} \qquad \textbf{(1)}$$

και $$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|} \ge \frac{1}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|} \ge \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} \qquad \textbf{(2)}$$

Προσθέτοντας τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$\frac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|} + \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|} \ge \frac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} + \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} = \frac{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} = 1.$$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να αποδείξετε ότι $\left|\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\right| \le \left|\vec{\alpha}\right| . \left|\vec{\beta}\right|$**.**

M$_{31}$: Για να αποδείξουμε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ αρκεί να δείξουμε ότι

1^{ος} τρόπος: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

2^{ος} τρόπος: $x_1x_2+y_1y_2=0$

3^{ος} τρόπος: $\lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$

Παράδειγμα

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ $\vec{\beta}=(2,4)$.Να γράψετε τις σχέσεις μεταξύ των χ,ψ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β) $(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \perp (3\vec{i}+5\vec{j})$

Επίλυση

α)Από τον τύπο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}= x_1x_2+y_1y_2$ με αντικατάσταση προκύπτει:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2x+4y$ και επειδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, ισχύει: $2x+4y=0$ ή $x+2y=0$ ή $x=-2y$

β) Βρίσκουμε το $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Ισχύει

$\vec{\alpha}= x\vec{i} + y\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ άρα $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta} =(2x-6)\vec{i} +(2y-12)\vec{j} =2[(x-3)\vec{i} +(y-6)\vec{j}]$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}= x_1x_2+y_1y_2$ και έχουμε:

$(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})(3\vec{i}+5\vec{j})=2[(x-3)\vec{i}+(y-6)\vec{j}](3\vec{i}+5\vec{j})=2(3x-9+5y-30)=2(3x+5y-39)$ και επειδή τα διανύσματα $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ και $3\vec{i}+5\vec{j}$ είναι κάθετα, ισχύει $3x+5y-39=0$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ $\vec{\beta}=(-3,5)$.Να γράψετε τις σχέσεις μεταξύ των χ,ψ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

α) $2\vec{\alpha}\perp 3\vec{\beta}$

β) $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\perp(2\vec{i}+5\vec{j})$

M$_{32}$: Για να υπολογίσουμε τη γωνία $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})$

1^{ος} τρόπος:

Παίρνουμε τον τύπο

$$συν(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$$

2^{ος} τρόπος:

Παίρνουμε τον τύπο $συν(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

Παράδειγμα

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})$.

Επίλυση

Η γωνία $(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})$ παρουσιάζεται στο εσωτερικό γινόμενο: $\vec{\alpha}\,\vec{\gamma}$:

$\vec{\alpha}\,\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|συν(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})$ (1)

Έχουμε $\vec{\alpha}\,\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2+3\vec{\alpha}\,\vec{\beta}=2|\vec{\alpha}|^2+3|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2.1^2+3.1.2συν\frac{\pi}{3}=2+3=5.$

Εξάλλου $|\vec{\gamma}|^2=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+9\vec{\beta}^2+12\vec{\alpha}\,\vec{\beta}=$

$=4|\vec{\alpha}|^2+9|\vec{\beta}|^2+12|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=4.1^2+9.2^2+12.1.2\frac{1}{2}=4+36+12=52.$

Από την (1): $5=1.\sqrt{52}$ συν $(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})\Leftrightarrow$ συν $(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})=\dfrac{5}{\sqrt{52}}=\dfrac{5\sqrt{52}}{52}=0{,}692$ που σημαίνει ότι γνωρίζουμε τη γωνία: $(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})\cong 46^o$ αφού $0^o\leq(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}})\leq 180^o$.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$.

Μ33: Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 // \vec{\beta}$

α) Παίρνουμε $\vec{\gamma}_1 = \kappa.\ \vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}_2 = \lambda.\ \vec{\beta}$

β) Αντικαθιστούμε στην σχέση $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$

γ) Υπολογίζουμε τις τιμές των κ,λ

δ) Συμπεραίνουμε για το $\vec{\gamma}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (5, -5)$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 // \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-3, -4)$.

<u>Επίλυση</u>

Έστω $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$ (1) όπου $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 // \vec{\gamma}$.Τότε $\vec{\gamma}_1 = \kappa\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 = \lambda\vec{\beta}$ οπότε η (1) γράφεται:

$\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (5,-5)=\kappa(2,1)+\lambda(-3,-4) \Leftrightarrow (5,-5)=(2\kappa,\kappa)+(-3\lambda,-4\lambda)$

$\Leftrightarrow (5,-5)=(2\kappa-3\lambda,\kappa-4\lambda)$

απ' όπου $\begin{array}{r|l} 1 & 2\kappa - 3\lambda = 5 \\ -2 & \kappa - 4\lambda = -5 \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2\kappa - 3\lambda = 5 \\ -2\kappa + 8\lambda = 10 \end{array}\right\}(+): 5\lambda = 15 \Leftrightarrow \lambda=3$ και $\kappa=7$ άρα $\vec{\gamma}_1 = 7\vec{\alpha} = (14,7)$

και $\vec{\gamma}_2 = 3\vec{\beta} = (-9, -12)$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (6, -3)$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}_2 // \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (5, -5)$.

M34: Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma_1} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma_2} \perp \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (\chi_1,\psi_1)$, $\vec{\beta} = (\chi_2,\psi_2)$

α) Παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{v} = (-\psi_1,\chi_1)$, $\vec{w} = (-\psi_2,\chi_2)$ που είναι κάθετα αντίστοιχα στα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ γιατί $\vec{\alpha}\,.\,\vec{v} = \chi_1.(-\psi_1)+\psi_1.\chi_1 = 0$ και $\vec{w}\,.\,\vec{\beta} = \chi_2(-\psi_2)+\chi_2\psi_2 = 0$

β) Παίρνουμε $\vec{\gamma_1} = \kappa.\ \vec{v}$, $\vec{\gamma_2} = \lambda.\ \vec{w}$ οπότε η σχέση $\vec{\gamma} = \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2}$ δίνει $\vec{\gamma} = \kappa.\ \vec{v} + \lambda.\ \vec{w}$ και υπολογίζουμε τις τιμές των κ,λ

γ) Αντικαθιστούμε τα κ,λ στις σχέσεις $\vec{\gamma_1} = \kappa.\ \vec{v}$, $\vec{\gamma_2} = \lambda.\ \vec{w}$.

δ) Συμπεραίνουμε για το $\vec{\gamma}$.

Παράδειγμα

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (5, -5)$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma_1} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma_2} \perp \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (2,1)$, $\vec{\beta} = (-3, -4)$

Επίλυση

Έστω $\vec{\alpha}_1=(-1,2)$($\vec{\alpha}_1 \perp \vec{\alpha}$) και $\vec{\beta}_1=(-4, 3)$($\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}$) και $\vec{\gamma} = \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2}$ (1) όπου $\vec{\gamma_1} // \vec{\alpha}_1$ και $\vec{\gamma_2} // \vec{\beta}_1$.Τότε $\vec{\gamma_1} = \kappa\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\gamma_2} = \lambda\vec{\beta}_1$ οπότε η (1) δίνει:

$\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha}_1 + \lambda\vec{\beta}_1 \Leftrightarrow (5,-5)=\kappa(-1,2)+\lambda(-4,3) \Leftrightarrow (5,-5)=(-\kappa-4\lambda, 2\kappa+3\lambda)$

απ' όπου $\begin{array}{r|l} -2 & \kappa + 4\lambda = -5 \\ 1 & 2\kappa + 3\lambda = -5 \end{array}\Big\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -2\kappa - 8\lambda = 10 \\ 2\kappa + 3\lambda = -5 \end{array}\Big\}$ άρα : $-5\lambda = 5 \Leftrightarrow \lambda=-1$ και $\kappa=-1$,

συνεπώς $\vec{\gamma_1} = -1(-1,2)=(1,-2)$ και $\vec{\gamma_2} = -1(-4, 3)=(4,-3)$.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (1, -4)$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma_1}, \vec{\gamma_2}$ αντίστοιχα με $\vec{\gamma_1} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma_2} \perp \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (2,2)$, $\vec{\beta} = (-3, -3)$

M35: Για να υπολογίσουμε την προβολή του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ δηλαδή $\vec{\beta_1} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

α) Παίρνουμε την σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta_1}|$ και επιλύουμε ως προς $|\vec{\beta_1}|$

β) Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε το $|\vec{\beta_1}|$.

Παράδειγμα

Να βρείτε το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{\alpha} = (2, 4)$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (4, 3)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Επίλυση

Από τη θεωρία έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\ \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$. Όμως το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ γίνεται:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$=2.4+4.3=20 (1)

Επίσης αφού $\vec{\beta} \parallel \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$, ισχύει: $\left|\vec{\beta}\,\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right| \sqrt{4^2+3^2}\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right| = \frac{20}{5}$ =4.

Όμοια προκύπτει και ότι $\left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|$ =2$\sqrt{5}$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να βρείτε το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{\alpha} = (3, 5)$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (5, 2)$ καθώς και το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

> M36: Για την επίλυση προβλημάτων , συνήθως της Γεωμετρίας
> α) Μετατρέπουμε τις φιλολογικές εκφράσεις σε μαθηματικές .
> β) Επισημαίνουμε τις διαφορές δεδομένων και ζητουμένων.
> γ) Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα καθώς και την προβολή διανύσματος σε διάνυσμα.

Παράδειγμα 1ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB}^2 - \vec{A\Gamma}^2 = 2\,\vec{\Delta M}.\vec{\Gamma B}$ (2Ο Θεώρημα διαμέσου).

Επίλυση

$$\vec{AB}^2 - \vec{A\Gamma}^2 = (\vec{AB}+\vec{A\Gamma})(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}) = 2\,\vec{\Delta M}.\vec{\Gamma B} = 2(\text{προβ}_{\vec{\Gamma B}}\vec{AM})\,\vec{\Gamma B} = 2\,\vec{\Delta M}.\vec{\Gamma B}$$

Παράδειγμα 2ο

Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90^{O}), να αποδείξετε ότι
$\left|\vec{A\Delta}\right|^2 = \vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma}$.

Επίλυση

Είναι $\vec{A\Delta}^2 = \vec{A\Delta}.\vec{A\Delta} = (\vec{AB}+\vec{B\Delta})(\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}) = \vec{AB}.\vec{A\Gamma}+\vec{AB}.\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Gamma}.\vec{B\Delta}+\vec{B\Delta}.\vec{\Gamma\Delta} =$

$=0+(\pi\rho o\beta_{\vec{\Gamma\Delta}}\vec{AB})\vec{\Gamma\Delta}+(\pi\rho o\beta_{\vec{B\Delta}}\vec{A\Gamma})\vec{B\Delta}+\vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Delta B}.\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}.\vec{B\Delta}+\vec{B\Delta}.\vec{\Gamma\Delta} = \vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma}+\vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma}$

$-\vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Delta}.\vec{\Delta\Gamma}$

Εφαρμογή για τον μαθητή 1η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι
$\vec{AB}^2+\vec{A\Gamma}^2 = 2\,\vec{AM}^2+\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}^2$ **(1^{O} Θεώρημα διαμέσου).**

Εφαρμογή για τον μαθητή 2η

Αν ΑΔ είναι ύψος τριγώνου ΑΒΓ , να αποδείξετε ότι
$\vec{BA}^2+\vec{BA}.\vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Delta}.\vec{B\Gamma}$.

Καλό διάβασμα. Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!!