ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΟ 1Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ 3ο ΜΕΡΟΣ

M_{23}:Για να αποδείξουμε μια διανυσματική ισότητα, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των σημείων τους
α) Παίρνουμε το ένα μέλος
β) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες
γ) Κάνουμε πράξεις
δ) Καταλήγουμε στο συμπέρασμα

<u>Παράδειγμα</u>

Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{0}$

<u>Επίλυση</u>

Έχουμε $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=(X_B-X_A,\ \Psi_B-\Psi_A)+(X_\Gamma-X_B,\ \Psi_\Gamma-\Psi_B)+(X_A-X_\Gamma,\ \Psi_A-\Psi_\Gamma)=$

$=(X_B-X_A+X_\Gamma-X_B+X_A-X_\Gamma,\ \Psi_B-\Psi_A+\Psi_\Gamma-\Psi_B+\Psi_A-\Psi_\Gamma)=(0,0)=\vec{0}$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Αν Α,Β,Γ τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΚΛΜ να δείξετε ότι ισχύει $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{0}$

E-mails:**raidosi@yahoo.gr**
iraidos@gmail.com

M_{24}: Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της $4^{ης}$ κορυφής του παραλληλογράμμου Δ όταν είναι γνωστές οι άλλες τρεις Α,Β,Γ .

$1^{ος}$ τρόπος:

α) Παίρνουμε τις σχέσεις $\vec{ΑΔ} // \vec{ΒΓ}$

$\vec{ΔΓ} // \vec{ΑΒ}$

β) Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ορίζουσας

γ) Προκύπτει σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

δ) Συμπεραίνουμε για το αποτέλεσμα

$2^{ος}$ τρόπος:

α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου Ο του ΑΦ από τους τύπους

$x_0=\frac{X_A+X_Γ}{2}, y_0=\frac{Ψ_A+Ψ_Γ}{2}$

β) Παίρνουμε τους τύπους $x_0=\frac{X_B+X_Δ}{2}, y_0=\frac{Ψ_B+Ψ_Δ}{2}$ και επιλύουμε ως προς $X_Δ$, $Ψ_Δ$.

γ) Συμπεραίνουμε για το Δ ($X_Δ$, $Ψ_Δ$).

<u>Παράδειγμα</u>

Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με γνωστές τις κορυφές Α(-1,6),Β(2,1) και Γ(4,4) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ.

<u>Επίλυση</u>

Έστω (Χ, Ψ) οι συντεταγμένες του Δ. Τότε:

$$\vec{ΑΔ} // \vec{ΒΓ} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X_Δ - X_A & Ψ_Δ - Ψ_A \\ X_Γ - X_B & Ψ_Γ - Ψ_B \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X+1 & Ψ-6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

3Χ+3-2Ψ+12=0 $\Leftrightarrow$ 3Χ-2Ψ+15=0 (1).

$$\vec{ΔΓ} // \vec{ΑΒ} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X_Γ - X_Δ & Ψ_Γ - Ψ_Δ \\ X_B - X_A & Ψ_B - Ψ_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-X & 4-Ψ \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

-20+5Χ-12+3Ψ=0 $\Leftrightarrow$ 5Χ+3Ψ-32=0 (2)

Από το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε $\begin{array}{l|l} 3X - 2Ψ = -15 & 3 \\ 5X + 3Ψ = 32 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 9X - 6Ψ = -45 \\ 10X + 6Ψ = 64 \end{array}\right\} (+): 19Χ=19 \Leftrightarrow$

Χ=1 οπότε Ψ=9.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με γνωστές τις κορυφές Α(0,0),Β(5,3) και Γ(8,6) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ.

M$_{25}$: Για να δείξουμε ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα ΚΜ, ΛΝ διχοτομούνται αρκεί να δείξουμε ότι τα μέσα τους Α και Α΄ αντίστοιχα ταυτίζονται δηλαδή οι συντεταγμένες τους είναι ίσες.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο με Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΚΜ και ΛΝ διχοτομούνται.

<u>Επίλυση</u>

Έστω ότι η κορυφή Δ του τετραπλεύρου είναι στην αρχή των αξόνων. Έστω ακόμη Ρ το μέσο του ΝΛ. Τότε:

$$X_P = \frac{X_K + X_M}{2} = \frac{\frac{X_A + X_B}{2} + \frac{X_\Gamma}{2}}{2} = \frac{X_A + X_B + X_\Gamma}{4}$$

$$\Psi_P = \frac{\Psi_K + \Psi_M}{2} = \frac{\frac{\Psi_A + \Psi_B}{2} + \frac{\Psi_\Gamma}{2}}{2} = \frac{\Psi_A + \Psi_B + \Psi_\Gamma}{4}$$

Επίσης

$$X_{P'} = \frac{X_N + X_\Lambda}{2} = \frac{\frac{X_A}{2} + \frac{X_B + X_\Gamma}{2}}{2} = \frac{X_A + X_B + X_\Gamma}{4}$$

$$\Psi_{P'} = \frac{\Psi_N + \Psi_\Lambda}{2} = \frac{\frac{\Psi_A}{2} + \frac{\Psi_B + \Psi_\Gamma}{2}}{2} = \frac{\Psi_A + \Psi_B + \Psi_\Gamma}{4}$$

οπότε προφανώς Ρ=Ρ΄ αφού τα σημεία Ρ και Ρ΄ έχουν τις ίδιες συντεταγμένες.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε , Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται.

M$_{26}$: Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά.

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA}$ = (-χ-1, -χ), $\vec{OB}$ = (2χ-1, χ-1) και $\vec{O\Gamma}$ = (-1,3).
Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\chi \in \Re$.

<u>Επίλυση</u>

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι συγγραμμικά. Έστω ότι υπάρχει $\lambda \in \Re$ ώστε:

$\vec{AB} = \lambda \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = \lambda(\vec{BO} + \vec{O\Gamma}) \Leftrightarrow$ (χ+1,χ)+(2χ-1,χ-1)=λ(-(2χ-1,χ-1)+(-1,3)) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (2χ-1-χ-1,χ-1-χ)=λ(-2χ+1-1,-χ+1+3)=λ(-2χ,-χ+4) $\Leftrightarrow$ (χ-2,-1)=(-2λχ,-λχ+4λ) άρα

$$\left.\begin{array}{l} \chi - 2 = -2\lambda\chi \\ -1 = -\lambda\chi + 4\lambda \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} \chi - 2 = -2\lambda\chi \\ \chi = \dfrac{4\lambda+1}{\lambda} \end{array}\right\} \text{άρα } \frac{4\lambda+1}{\lambda} - 2 = -2\lambda\frac{4\lambda+1}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$4\lambda+1-2\lambda=-8\lambda^2-2\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2+4\lambda+1=0$.

Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο IR αφού έχει Δ<0. Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \Re$ ώστε: $\vec{AB} = \lambda\vec{B\Gamma}$, που σημαίνει ότι τα Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς τα Α,Β,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά , να αποδείξετε ότι και τα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ δεν είναι επίσης συγγραμμικά.

M_{27}: Για να βρούμε την τρίτη κορυφή Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν δίνονται οι δυο άλλες Α,Β και το βαρύκεντρο G

α) Παίρνουμε τους τύπους $X_G = \dfrac{X_A + X_B + X_\Gamma}{3}, \Psi_G = \dfrac{\Psi_A + \Psi_B + \Psi_\Gamma}{3}$ και αντικαθιστούμε τα δεδομένα

β) Επιλύουμε ως προς X_Γ, Ψ_Γ.

<u>Παράδειγμα</u>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών Α(7,6), Β(1,3) και του βαρυκέντρου G(4,3). Να βρεθούν οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής.

<u>Επίλυση</u>

Από τις σχέσεις $X_G = \dfrac{X_A + X_B + X_\Gamma}{3}, \Psi_G = \dfrac{\Psi_A + \Psi_B + \Psi_\Gamma}{3}$ έχουμε $4 = \dfrac{7+1+X_\Gamma}{3} \Leftrightarrow 12 = 8 + X_\Gamma$ $\Leftrightarrow X_\Gamma = 4$ και $3 = \dfrac{6+3+\Psi_\Gamma}{3} \Leftrightarrow 9 = 9 + \Psi_\Gamma \Leftrightarrow \Psi_\Gamma = 0$. Βρίσκουμε $(X_\Gamma, \Psi_\Gamma) = (4,0)$.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών Α(0,5), Β(2,-3) και του βαρυκέντρου G(-3,4). Να βρεθούν οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής.

M$_{28}$: Για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

1^{ος} τρόπος:

Όταν είναι γνωστά τα $|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|,(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ παίρνουμε και αντικαθιστούμε στον τύπο

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

2^{ος} τρόπος:

Όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ παίρνουμε τον τύπο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ $\vec{\beta}=(2,1)$.Να γράψετε τις σχέσεις μεταξύ των χ,ψ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις

α) $|\vec{\alpha}| = 5$ **β)** $(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \perp (4\vec{i}+\vec{j})$

<u>Επίλυση</u>

α) Έχουμε $|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2+\psi^2} = 5 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2 = 25.$

β) Είναι $\vec{\alpha}-\vec{\beta} = (\chi\vec{i}+\psi\vec{j}) - (2\vec{i}+\vec{j}) = \chi\vec{i}+\psi\vec{j}-2\vec{i}-\vec{j} = (\chi-2)\vec{i}+(\psi-1)\vec{j}$

και επειδή $(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \perp (4\vec{i}+\vec{j})$ θα έχουμε $[(\chi-2)\vec{i}+(\psi-1)\vec{j}] \perp (4\vec{i}+\vec{j}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\chi-2).4+(\psi-1).1 = 0 \Leftrightarrow 4\chi-8+\psi-1 = 0 \Leftrightarrow \psi = -4\chi+9.$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Εστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ $\vec{\beta}=(2,1)$.Να γράψετε τις σχέσεις μεταξύ των χ,ψ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις **α)** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **β)** $(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \parallel (4\vec{i}+\vec{j})$

M$_{29}$: Για υπολογιστικές ασκήσεις με γινόμενα διανυσμάτων, μέτρα, γωνίες έχουμε υπόψη τα παρακάτω

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$
2. $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$
3. Ισχύουν οι ταυτότητες
   α) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}$
   β) $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}\ \ -2\alpha\beta$
   γ) $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\,(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2$
   δ) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\beta}\vec{\gamma}+2\vec{\gamma}\vec{\alpha}$
4. $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
5. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho} = \vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\rho}$

Παράδειγμα

Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\chi}, \vec{\psi}, \vec{z}$ **με** $\vec{\chi} \neq \vec{\psi}, \vec{\psi} \neq \vec{z}, \vec{\chi} \neq \vec{z}$ **ισχύει η σχέση** $\left|\vec{\chi} - \vec{\psi}\right| = \left|\vec{\chi} - \vec{z}\right|$. **Αν** $\vec{\alpha} = 2\vec{\chi} - \vec{\psi} - \vec{z}$ **και** $\vec{\beta} = \vec{\psi} - \vec{z}$, **να δείξετε ότι** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Επίλυση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ **αφού** $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ **και** $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (2\vec{\chi} - \vec{\psi} - \vec{z}) \cdot (\vec{\psi} - \vec{z}) = 2\vec{\chi}\vec{\psi} - \vec{\psi}^2 + \vec{\psi}\vec{z} - \vec{z}\vec{\psi} + \vec{z}^2$ **(1)**

Η σχέση $\left|\vec{\chi} - \vec{\psi}\right| = \left|\vec{\chi} - \vec{z}\right|$ **δίνει ισοδύναμα** $\left|\vec{\chi} - \vec{\psi}\right|^2 = \left|\vec{\chi} - \vec{z}\right|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\vec{\chi} - \vec{\psi})^2 = (\vec{\chi} - \vec{z})^2 \Leftrightarrow \vec{\chi}^2 - 2\vec{\chi}\vec{\psi} + \vec{\psi}^2 = \vec{\chi}^2 - 2\vec{\chi}\vec{z} + \vec{z}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\vec{\chi}\vec{\psi} - 2\vec{\chi}\vec{z} - \vec{\psi}^2 + \vec{z}^2 = 0$ **(2)**

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Αν για τα διανύσματα θέσης των σημείων Α και Β ισχύουν οι σχέσεις $\vec{OA} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ **και** $\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ **να δείξετε ότι** $\vec{OA}\,\vec{OB} = 4\left|\vec{\alpha}\right|^2 - 9\left|\vec{\beta}\right|^2$.

Καλό διάβασμα. Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!