ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Υπουργείο Παιδείας,
Έρευνας και Θρησκευμάτων
ΠΕΡΙΦ/ΚΗ Δ/ΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ & Β/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΑΓΝΗΣΙΑΣ

1ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΟ 1Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ 1ο ΜΕΡΟΣ

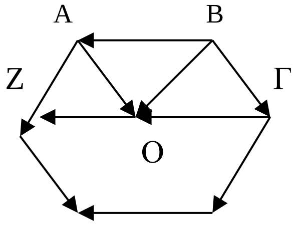
M_7: Για την επίλυση ενός προβλήματος απαιτείται η μέγιστη ανάλυση των δεδομένων του, δηλαδή η «καταγραφή» όλων των δυνατών πληροφοριών που εξάγονται από την εκφώνηση.
Στις ασκήσεις με γεωμετρικό σχήμα προσπαθούμε να συμβολίζουμε τα μεγέθη με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό γραμμάτων.

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{ΒΑ}$ και $\vec{ΒΓ}$,ίσου μέτρου, τα οποία σχηματίζουν γωνία 120^o μεταξύ τους. Να προσδιοριστούν τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε το ΑΒΓΔΕΖ να αποτελεί κανονικό εξάγωνο.

<u>Επίλυση</u>

Για τον προσδιορισμό των κορυφών Δ, Ε και Ζ του κανονικού εξαγώνου, αρκεί να εκφραστούν οι πλευρές π.χ. $\vec{ΓΔ}, \vec{ΔΕ}$ και $\vec{ΑΖ}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{ΒΑ}$ και $\vec{ΒΓ}$.



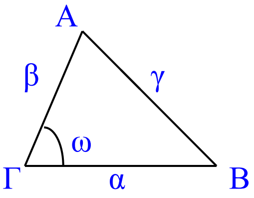
Εστω $\vec{AO} = \vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$ τότε έχουμε $\vec{\Gamma O} = \vec{\alpha}$, $\vec{BO} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ οπότε
$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ από το παραλληλόγραμμο ΒΓΔΟ , $\vec{AZ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ από το παραλληλόγραμμο ΒΑΖΟ
και $\vec{\Delta E} = \vec{\alpha}$ από το παραλληλόγραμμο ΓΟΕΔ.

Εφαρμογή για τον μαθητή

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ **και** $\left|\vec{A\Delta}\right| = \left|\vec{\Delta\Gamma}\right|$ **είναι ρόμβος .**

M_8: Για εύρεση γωνιών ή πλευρών τριγώνου θα έχουμε υπόψη μας πάντα τους νόμους ημιτόνων και συνημίτονων:

$$\frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma}$$



$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega$$

Αρχικά χαράζουμε ευθείες κάθετες μεταξύ τους στα Α και Β παράλληλες των διευθύνσεων Βορρά –Νότου και Ανατολής-Δύσης αντίστοιχα, και προσδιορίζουμε τα σημεία Β και Γ σχηματικά σύμφωνα με την εκφώνηση.

Παράδειγμα

Ένα εμπορικό πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α με μοναδικό ενδιάμεσο σταθμό το λιμάνι Β για παραλαβή εμπορεύματος και τελικό προορισμό την πόλη Γ. Η απόσταση του λιμανιού Α από το λιμάνι Β είναι 10 ναυτικά μίλια και η απόσταση του λιμανιού Β από την πόλη Γ είναι 8 ναυτικά μίλια. Αν το πλοίο κάνει κίνηση ευθύγραμμη με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 30^o βορειοδυτικά προκειμένου να ταξιδέψει για το Β και γωνία 15^o νοτιοδυτικά για να συνεχίσει από εκεί προς τη Γη, να βρεθεί:
α) η απόσταση που θα διένυε το πλοίο κινούμενο ευθύγραμμα, αν όλη του η προμήθεια για την πόλη Γ προέρχονταν από το λιμάνι Α,
β) η γωνία $\Gamma\overset{\frown}{A}B$

Επίλυση

Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία $\varphi=30^o$ (εντός εναλλάξ).
α) Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων για την ΑΓ, όπου
$A\hat{B}\Gamma = 15^o + \varphi = 15^o + 30^o = 45^o$.

Είναι $A\Gamma^2 = AB^2+B\Gamma^2-2\,AB.\,B\Gamma.\sigma\upsilon\nu\,A\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 10^2+8^2-2.8.10.\sigma\upsilon\nu45^o=100+64-2.80.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=164-80\sqrt{2}=50,863$. Άρα ΑΓ= 7,13 ναυτικά μίλια.
β) Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\theta}{B\Gamma} = \frac{\eta\mu45^o}{A\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{8\cdot\sqrt{2}}{7,13\cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{7,13} = 0,79^o$$

Άρα ημθ=0,79 και επειδή $0<\theta<90^o$, λόγω σχήματος, προκύπτει $\theta=52,484^o$.

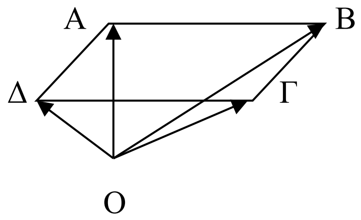
<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Ένα πλοίο ξεκινά από ένα λιμάνι Ο και διανύει απόσταση 550 μιλίων με κατεύθυνση 60^o Νοτιοδυτικά .Στη συνέχεια κατευθύνεται με 10^o Βορειοδυτικά διανύοντας απόσταση 700 μιλίων . Να βρεθεί η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Ο και η κατεύθυνση που πρέπει να πάρει ώστε να επιστρέψει στο λιμάνι κατευθείαν.

M_9: Για να εκφράσουμε ένα διάνυσμα σε συνάρτηση άλλων διανυσμάτων:
- Ξεκινάμε από την αρχή του δοσμένου διανύσματος,
- Ακολουθούμε διαδρομή από διαδοχικά διανύσματα με τελικό προορισμό το πέρας του διανύσματος

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται το παρακάτω σχήμα
με



$\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$,$\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ και $\vec{O\Delta} = \vec{\delta}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τη βοήθεια των διανυσμάτων $\vec{\varepsilon},\vec{\delta},\vec{\zeta}$.

β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\theta}$ με τη βοήθεια των διανυσμάτων $\vec{\gamma},\vec{\delta},\vec{\varepsilon}, \vec{\kappa}$.

γ) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\chi}$ τέτοιο ώστε $\vec{\chi}+\vec{\beta}=\vec{\zeta}$.

<u>Επίλυση</u>

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε $\vec{O\Gamma}=\frac{1}{2}\vec{AB}$.

α) Να υπολογιστούν τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{O\Gamma}$ και $\vec{\Gamma B}$ σε συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα , να επαληθεύσετε την ευκλείδεια πρόταση
« Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την Τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της »,
στο τρίγωνο ΟΑΒ.

M_{10}: Για να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα

1ος τρόπος:
Κάνουμε πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στη μορφή $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ ή $\vec{\beta}=\kappa\vec{\alpha}, \lambda\in R^*$

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνονται τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$. Αν είναι $\vec{\alpha}=2\vec{\gamma}-3\vec{\delta}$ και $\vec{\beta}=\frac{4}{3}\vec{\gamma}-2\vec{\delta}$,να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.

<u>Επίλυση</u>

Εξετάζουμε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούν να πάρουν τη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{\beta}$. Αν υπάρχει τέτοιο x, θα πρέπει:
$2\vec{\gamma}-3\vec{\delta}=\frac{4}{3}x\vec{\gamma}-2x\vec{\delta}$, δηλαδή $2=\frac{4}{3}x$ και $-3=-2x$, δηλαδή $x=\frac{3}{2}$. Άρα με $x=\frac{3}{2}$ ισχύει $\vec{\alpha}=\frac{3}{2}\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ όχι παράλληλα , να βρεθεί ο λεR ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}-(\lambda+1)\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

2ος τρόπος:
Βρίσκουμε μια από τις δυο σχέσεις $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ ή $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||$

__Παράδειγμα__

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$ **ισχύει** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ **και** $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$**, να αποδείξετε ότι** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

__Επίλυση__

Εξισώνουμε τους λόγους της εκφώνησης με κ, δηλαδή $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$=κ(η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε κάθε άσκηση που έχει αναλογία στα δεδομένα της εκφώνησης). Προκύπτει: $|\vec{\alpha}|$ =2κ, $|\vec{\beta}|=3\kappa$ και $|\vec{\gamma}|$=5κ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \qquad (1)$$

Από τη σχέση $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ έχουμε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ =- $\vec{\gamma}$, οπότε το πρώτο μέλος της (1) γίνεται:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|=5\kappa \qquad (2)$$

ενώ το δεύτερο: $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$=2κ+3κ=5κ $\qquad$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει η ζητούμενη.

__Εφαρμογή για τον μαθητή__

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$ **ισχύει** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ **και** $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{5}=\frac{|\vec{\gamma}|}{8}$**, να αποδείξετε ότι** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

3ος τρόπος:

Εξετάζουμε αν $\vec{\alpha}//\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}//\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$

__Παράδειγμα__

Δίνεται ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ στο οποίο είναι $\vec{AB}\parallel\vec{\Delta E}\parallel\vec{\Gamma Z}, \vec{B\Gamma}\parallel\vec{EZ}\parallel\vec{A\Delta}$ και $\vec{\Gamma\Delta}\parallel\vec{ZA}$.Να αποδείξετε ότι $\vec{BE}\parallel\vec{ZA}$.

Επίλυση

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι καθένα από τα διανύσματα $\vec{BE}$ και $\vec{ZA}$ είναι παράλληλο με ένα τρίτο διάνυσμα. Θέτουμε $\vec{BA}=\vec{\alpha}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$, $\vec{\Gamma\Delta}=\vec{\gamma}$ και προσπαθούμε να εκφράσουμε τα άλλα διανύσματα ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Έχουμε $\vec{\Gamma K}=\vec{\alpha}$ από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΚ. Επομένως $\vec{K\Delta}=-\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, άρα και $\vec{ZE}=-\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ από το παραλληλόγραμμο ΖΚΔΕ. Επειδή $\vec{\Gamma\Delta}\parallel\vec{ZA}$, ισχύει $\vec{ZA}=\lambda\vec{\gamma}$ (1).Εκφράζουμε τώρα το $\vec{BE}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.
Είναι $\vec{BE}=\vec{BA}+\vec{AZ}+\vec{ZE}=\vec{\alpha}-\lambda\vec{\gamma}-\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=(1-\lambda)\vec{\gamma}$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\vec{ZA}\parallel\vec{\gamma}$ και $\vec{BE}\parallel\vec{\gamma}$, άρα $\vec{ZA}\parallel\vec{BE}$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Αν $\vec{OA}=\vec{O'A'}$ **και** $\vec{OB}=\vec{O'B'}$**, να δείξετε ότι**

α) $\vec{AA'}=\vec{BB'}$ **και**

β) $\vec{AB}=\vec{A'B'}$

M_{11}: Για να αποδείξουμε μια ισότητα με διάνυσμα χωρίς υποθέσεις τότε

1^{ος} τρόπος:

Για την ισότητα της μορφής $\vec{MA}+\vec{MB}+\ldots$.παίρνουμε τη βασική σχέση $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MO}$ με Ο μέσο τα Α,Β …..και αντικαθιστούμε. Κάνουμε πράξεις και από το ένα μέλος φτάνουμε στο άλλο.

Παράδειγμα

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου του παραλληλογράμμου ισχύει

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=4\vec{MO}$$

Επίλυση

Από το τρίγωνο ΜΑΓ προκύπτει $\vec{MA}+\vec{M\Gamma}=2\vec{MO}$. Ομοίως από το τρίγωνο ΜΒΔ προκύπτει $\vec{MB}+\vec{M\Delta}=2\vec{MO}$.Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες αυτές και έχουμε:

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=4\vec{MO}$$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε , Ζ των διαγωνίων ΑΓ , ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\vec{AB}-\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}-\vec{\Delta A}=4\vec{EZ}$.

2^{ος} τρόπος:

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα με σημείο θέσης ένα από τα σημεία της σχέσης και από το ένα μέλος καταλήγουμε στο άλλο.

Παράδειγμα

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{AZ}+\vec{B\Delta}+\vec{\Gamma E}$

Επίλυση

Εισάγουμε παντού το ίδιο γράμμα (όποιο θέλουμε), έστω το Α. Δηλαδή γράφουμε: $\vec{BE}=\vec{BA}+\vec{AE}$, $\vec{\Gamma Z}=\vec{\Gamma A}+\vec{AZ}$, $\vec{B\Delta}=\vec{BA}+\vec{A\Delta}$, $\vec{\Gamma E}=\vec{\Gamma A}+\vec{AE}$ οπότε η ισότητα γίνεται: $\vec{A\Delta}+\vec{BA}+\vec{AE}+\vec{\Gamma A}+\vec{AZ}=\vec{AZ}+\vec{BA}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma A}+\vec{AE}$

Εφαρμογή για τον μαθητή

Αν Κ είναι ένα σημείο του επιπέδου του τριγώνου ΑΒΓ και Λ, Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα , να αποδειχθεί ότι

$\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=\vec{K\Lambda}+\vec{KM}+\vec{KN}$.

3^{ος} τρόπος:

Χρησιμοποιούμε την μεταβατική ιδιότητα δηλαδή $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$.

Παράδειγμα

Δίνονται δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΓΖ (η διαγώνιος ΑΓ είναι κοινή). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

Επίλυση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{EB}\uparrow\uparrow\vec{\Delta Z}$. Συγκρίνουμε καθένα από τα διανύσματα αυτά με ένα τρίτο διάνυσμα ή με έναν γραμμικό συνδυασμό άλλων διανυσμάτων. Έχουμε: $\vec{\Delta Z}=\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma Z}$ (1) και $\vec{EB}=\vec{EA}+\vec{AB}$ (2)

Τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα διότι έχουμε $\vec{\Gamma Z}=\vec{EA}$ από το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ και $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{AB}$ από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως $\vec{\Delta Z}=\vec{EB}$.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα με $\vec{AB}=\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$**. Να δείξετε ότι** $\vec{E\Theta}=\vec{ZH}$**.**

M_{12}: Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Μ που ορίζεται από μια ισότητα:

α) Εκφράζουμε σε όλους τους όρους της ισότητας που μας δίνεται ένα γράμμα συνήθως το Α

β) Κάνουμε πράξεις και προκύπτει

γ) η μορφή $\vec{MA}=f(\vec{AB},\vec{A\Gamma},\vec{B\Gamma},....)$ δηλαδή το 2^{o} μέλος είναι σταθερό διάνυσμα

δ) Άρα το Μ είναι γνωστό

<u>Παράδειγμα</u>

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και ζητείται σημείο Μ για το οποίο:

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta} \quad \textbf{(1)}$$

<u>Επίλυση</u>

Αν G βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε:

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=3\vec{MG}.$$

Τότε η **(1)** γράφεται: $\vec{M\Delta}=3\vec{MG}$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Δ, Μ και G είναι συνευθειακά. Το G όμως ανήκει στη διαγώνιο ΒΔ, αφού στο ΑΒΓ η ΒΟ είναι διάμεσός του. Συνεπώς το Μ ανήκει στη διαγώνιο ΒΔ και είναι σημείο που κατασκευάζεται αφού η σχέση

$\vec{M\Delta}=3\vec{MG}$ γράφεται:

$$\vec{MG}+\vec{G\Delta}=3\vec{MG}\Leftrightarrow \vec{G\Delta}=2\vec{MG}\Leftrightarrow \vec{MG}=\frac{1}{2}\vec{G\Delta}$$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Δίνεται πεντάπλευρο ΑΒΓΔΕ και ζητείται σημείο Μ τέτοιο ώστε $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}+\vec{ME}$.

M_{13}: Για να αποδείξουμε ότι δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο κέντρο

1^{os} τρόπος:

Παίρνοντας για G το κέντρο του ενός τριγώνου ισχύει η σχέση G

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ (1) όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) και τα δεδομένα της εκφώνησης καταλήγουμε στη σχέση $\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{G\Gamma'}=\vec{0}$ οπότε G είναι κέντρο και του Α΄Β΄Γ΄.

<u>Παράδειγμα</u>

Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν $\vec{A\Gamma'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$ **και** $\vec{\Gamma B'} = \frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$ **.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

<u>Επίλυση</u>

Αν G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{G\Gamma'}=\vec{0}$. Για την απόδειξη αυτής της σχέσης γράφουμε αριστερά τα δεδομένα και δεξιά το ζητούμενο

Δεδομένα	Ζητούμενο
$\vec{A\Gamma'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$	$\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{G\Gamma'}=\vec{0}$
$\vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$	
$\vec{\Gamma B'} = \frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$	
$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$	

Εισάγουμε αριστερά παντού το G, ώστε να εμφανιστούν τα $\vec{GA},\vec{GB},\vec{G\Gamma}$ ή τα $\vec{GA'},\vec{GB'},\vec{G\Gamma'}$.Είναι:

$$\vec{A\Gamma'} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AG}+\vec{G\Gamma'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{BA'} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \vec{BG}+\vec{GA'} = \frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$$

$$\vec{\Gamma B'} = \frac{1}{3}\vec{\Gamma A} \Leftrightarrow \vec{\Gamma G}+\vec{GB'} = \frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη, προσπαθώντας να κάνουμε πλήρη χρήση των δεδομένων, οπότε έχουμε:

$(\vec{AG}+\vec{BG}+\vec{\Gamma G}) + (\vec{G\Gamma'}+\vec{GA'}+\vec{GB'}) = \frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A})$ ή $\vec{0} + (\vec{G\Gamma'}+\vec{GA'}+\vec{GB'}) = \vec{0}$ ή $\vec{G\Gamma'}+\vec{GA'}+\vec{GB'}=\vec{0}$

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν $\vec{A\Gamma'} = \frac{2}{5}\vec{AB}$, $\vec{BA'} = \frac{2}{5}\vec{B\Gamma}$ **και** $\vec{\Gamma B'} = \frac{2}{5}\vec{\Gamma A}$ **.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

2ος τρόπος:

Εκφράζουμε το διάνυσμα $\vec{GG'}$ με τις κορυφές Α,Β,Γ, και χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ οπότε καταλήγουμε στη σχέση $\vec{GG'}=\vec{0}$, άρα τα G, G΄συμπίπτουν.

<u>Παράδειγμα</u>

Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν $\vec{A\Gamma'}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BA'}=\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$ **και** $\vec{\Gamma B'}=\frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$ **.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

<u>Επίλυση</u>

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με κέντρα βάρους G και G΄αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το $\vec{GG'}$ με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

$$\vec{GG'}=\vec{GA}+\vec{A\Gamma'}+\vec{\Gamma'G'}$$
$$\vec{GG'}=\vec{GB}+\vec{BA'}+\vec{A'G'}$$
$$\vec{GG'}=\vec{G\Gamma}+\vec{\Gamma B'}+\vec{B'G'}$$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$3\vec{GG'}=(\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma})+\vec{A\Gamma'}+\vec{BA'}+\vec{\Gamma B'}+(\vec{A'G'}+\vec{B'G'}+\vec{\Gamma'G'})$ ή $3\vec{GG'}=\vec{A\Gamma'}+\vec{BA'}+\vec{\Gamma B'}$

διότι

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ και $\vec{A'G'}+\vec{B'G'}+\vec{\Gamma'G'}=\vec{0}$

Αλλά χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\vec{A\Gamma'}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BA'}=\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma B'}=\frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$ και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι $3\vec{GG'}=\vec{0}$. Άρα τα G και G΄ συμπίπτουν.

<u>Εφαρμογή για τον μαθητή</u>

Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύουν $\vec{A\Gamma'}=\frac{2}{5}\vec{AB}$, $\vec{BA'}=\frac{2}{5}\vec{B\Gamma}$ **και** $\vec{\Gamma B'}=\frac{2}{5}\vec{\Gamma A}$ **.Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν κοινό κέντρο βάρους.**

M_{14}: Για να εκφράσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

α) Παίρνουμε τη σχέση $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ (1)
β) Αντικαθιστούμε τα δεδομένα
γ) Βρίσκουμε τις τιμές των κ , λ
δ) Αντικαθιστούμε στη σχέση (1)

<u>Παράδειγμα</u>

Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ = (4, -3) σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ = (1,2) και $\vec{\beta}$ =(2,5).

__Επίλυση__

Έστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ οι ζητούμενες συνιστώσες ώστε: $\vec{u} // \vec{\alpha}$ και $\vec{v} // \vec{\beta}$. Τότε $\vec{u} = k\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = \lambda\vec{\beta}$, $k,\lambda \in$ IR.

Επομένως $\vec{\gamma} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow$ (4, -3)= k(1, 2)+λ(2, 5) $\Leftrightarrow$ (4, -3)=(k+2λ, 2k+5λ) οπότε: $\left.\begin{array}{r} -2 \mid k + 2\lambda = 4 \\ 1 \mid 2k + 5\lambda = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2k - 4\lambda = -8 \\ 2k + 5\lambda = -3 \end{array}\right\} (+) : \lambda = -11$ και k=26.

Άρα $\vec{u} = k\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u}$ =26(1, 2)=(26, 52) και $\vec{v} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{v}$ =-11(2, 5)=(-22, -55).

__Εφαρμογή για τον μαθητή__

Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ = (14, -13) σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ = (1,2) και $\vec{\beta}$ =(3,7).

Καλό διάβασμα. Εύχομαι επιτυχία στον στόχο σας!!!!!!!!!!!!!!