5^{o} Γυμνάσιο Βόλου

Εργασία

Στις

Ταυτότητες

Επιμέλεια εργασίας

Ρενάτα –Γεωργία Ράιδου

Μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου

Σχολικό έτος 2001-2002

Ταυτότητες

Α. Ορισμός

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα

Β. Ταυτότητες 1^{ου} βαθμού

1. $\alpha = \alpha$
2. $\alpha+\beta = \beta+\alpha$
3. $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$
4. $\alpha+0=0+\alpha = \alpha$
5. $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha = 0$
6. $\alpha\beta = \beta\alpha$
7. $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
8. $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$
9. $\alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$
10. $\alpha.1=1.\alpha =\alpha$
11. $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.\alpha = 1$

Γ. Ταυτότητες 2ου βαθμού

12. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

13. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

14. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

15. $(\alpha+\beta +\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2 +\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$

16. $(\alpha-\beta +\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2 +\gamma^2+ 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

17. $(\alpha-\beta -\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2 +\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

18. $\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2] = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$

Δ. Ταυτότητες 3ου βαθμού

19. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

20. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

21. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

22. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

23. $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\beta\gamma(\beta+\gamma)+3\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+6\alpha\beta\gamma$

Ε. Ταυτότητες ανωτέρου βαθμού

24. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots..+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$ αν ν θετικός ακέραιος.

25. $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots..-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$ αν ν περιττός θετικός ακέραιος

ΣΤ. Ταυτότητες επωνύμων

NEWTON

26. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$

27. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)=\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi+\alpha\beta\gamma$

DE MOIVRE

28. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\beta^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

LAGRANGE

29. $(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2=(\alpha\psi-\beta\chi)^2$

30. $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

EULER

31. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

32. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

Ζ. Ταυτότητες με συνθήκες

33. Αν α=β=γ τότε η ταυτότητα του Euler γίνεται $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
34. Αν α+β+γ=0 τότε η ταυτότητα του Euler γίνεται $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
35. Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0$ τότε η ταυτότητα του Euler γίνεται α+β+γ =0 ή $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 = 0$ οπότε α-β = 0 και β-γ = 0 και γ-α = 0 $\Leftrightarrow$ α=β=γ.

Η. Μετασχηματισμοί ταυτοτήτων

36. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
37. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
38. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

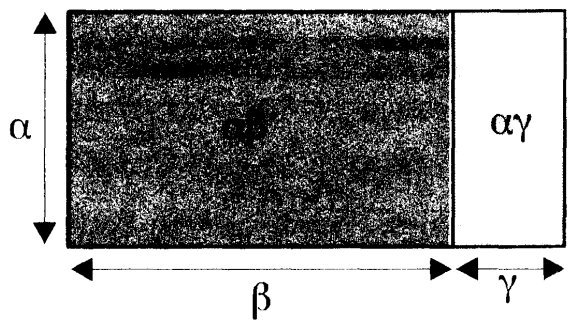
Θ. Γεωμετρική ερμηνεία

Αξιοσημείωτων ταυτοτήτων

1^η ταυτότητα

Η ισότητα (ταυτότητα) είναι η γνωστή μας επιμεριστική ιδιότητα. Το σχήμα 1 μας δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία της, δηλαδή το ορθογώνιο με πλευρές α και β + γ (το μεγάλο) έχει εμβαδόν α (β + γ) (το γινόμενο των δύο διαστάσεών του). Το εμβαδόν όμως του μεγάλου ορθογωνίου μπορούμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνίων με διαστάσεις α, β και α, γ αντίστοιχα. Οπότε το άθροισμα των εμβαδών τους θα είναι αβ + αγ που είναι και το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας.

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$



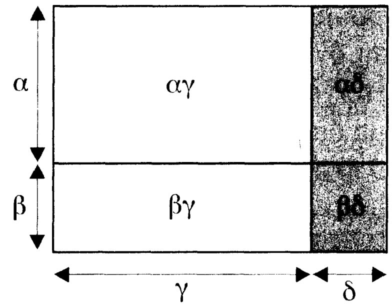
Σχήμα 1

1η Δραστηριότητα για τον μαθητή

Δώστε τώρα εσείς μια γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας $\alpha\,(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$.

2η ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$$



Σχήμα 2

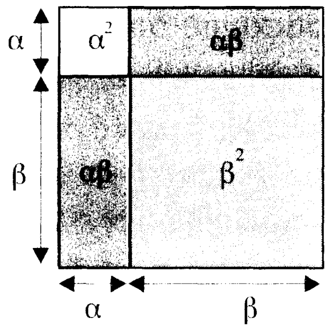
Η ισότητα αναφέρεται και ως επιμεριστική ιδιότητα. Το σχήμα 2 εξηγεί ότι το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου με πλευρές (διαστάσεις) α + β και γ + δ μπορούμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με διαστάσεις (α, γ), (β, γ), (α, δ) και (β, δ) αντίστοιχα.

2η Δραστηριότητα για τον μαθητή.

Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας $(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta$.

3η ταυτότητα

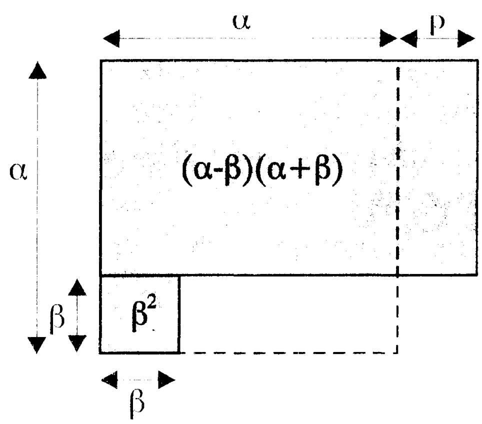
$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$



Σχήμα 3

Η ισότητα είναι η γνωστή μας ταυτότητα του αθροίσματος. Το σχήμα δίνει μια εξήγηση της ταυτότητας γεωμετρικά. Το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με πλευρά α + β μπορούμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα των εμβαδών δύο τετραγώνων με διαστάσεις α και β αντίστοιχα και δύο ορθογωνίων με διαστάσεις α και β.

$4^{η}$ ταυτότητα

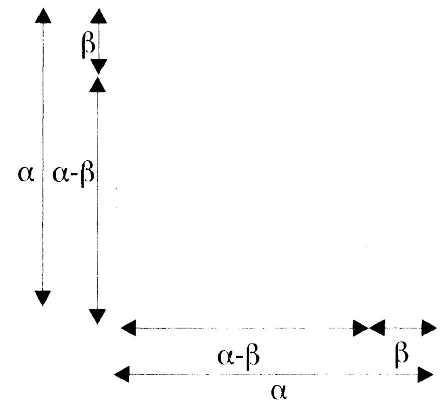


Σχήμα 5

Η ισότητα είναι η γνωστή μας ταυτότητα του γινομένου αθροίσματος επί διαφορά. Το σχήμα 4 δίνει μια εξήγηση της ταυτότητας γεωμετρικά. Το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις α - β και α + β μπορούμε να το εκφράσουμε σαν διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές α και β αντίστοιχα.

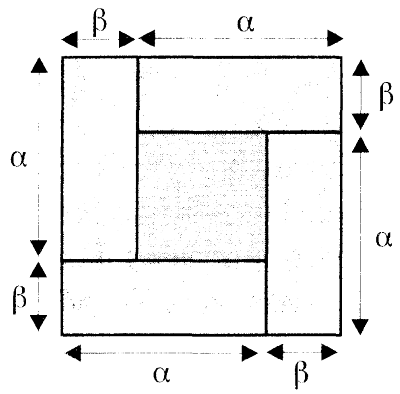
3η Δραστηριότητα για τον μαθητή

i. Γράψτε την ισότητα που εκφράζεται από το σχήμα 4.
ii. Ποια γνωστή ταυτότητα προκύπτει από την ισότητα αυτή.



Σχήμα 4

2). *Μπορείτε να αναγνωρίσετε ποιας ταυτότητας είναι γεωμετρική ερμηνεία το παρακάτω σχήμα;*



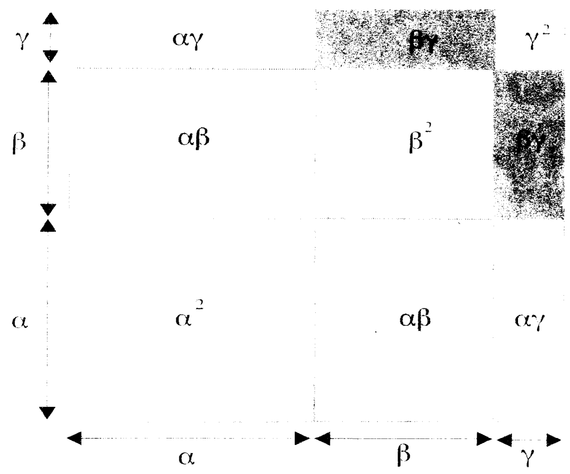
5η ταυτότητα

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Η ισότητα είναι η γνωστή μας ταυτότητα

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$.

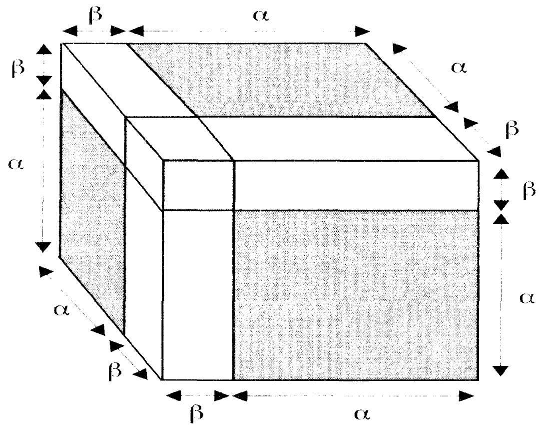
Το σχήμα 6 μας δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία αυτής της ταυτότητας. Το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου με πλευρά α + β + γ μπορούμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα των εμβαδών 3 τετραγώνων με πλευρές α, β, και γ αντίστοιχα και 3 ορθογωνίων με πλευρές (α, β), (β, γ) και (α, γ) αντίστοιχα.



Σχήμα 6

$6^{η}$ ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$



Σχήμα 7

Η ισότητα είναι η γνωστή μας ταυτότητα $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Το στερεό μας δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία αυτής της ταυτότητας. Τον όγκο του κύβου με πλευρά $\alpha + \beta$ μπορούμε να τον εκφράσουμε σαν άθροισμα των όγκων δύο κύβων με πλευρές α και β αντίστοιχα και 3 ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με διαστάσεις α, α, β και 3 ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με διαστάσεις α, β, β.

I. Προσωπικότητες

LEONHARD EULER

JOSEPH LOUIS LAGRANGE