ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Ιωάννης Βανδουλάκης**, Μαθηματικός **Χαράλαμπος Καλλιγάς**, Μαθηματικός - Πληροφορικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης **Νικηφόρος Μαρκάκης**, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης **Σπύρος Φερεντίνος**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Χαράλαμπος Τσίτουρας**, Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας **Γεώργιος Μπαραλός**, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών **Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου**, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Κλειώ Γκιζελή**, Ζωγράφος **Ιόλη Κυρούση**, Γραφίστρια
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Βαρβάρα Δερνελή**, Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ	**Αθανάσιος Σκούρας**, Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Μανώλης Χάρος**, Ζωγράφος
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η **Θεοδώρα Αστέρη**, Εκπαιδευτικός Α/θμιας Εκπαίδευσης

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα βοήθημα για τον συνάδελφο εκπαιδευτικό που δίνει καθημερινά μάχη μέσα στη τάξη. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου, καθώς και τις συγκεκριμένες προδιαγραφές και οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου. Το ανά χείρας βιβλίο έχει ως στόχο να βοηθήσει τον διδάσκοντα εκπαιδευτικό να εφαρμόσει τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις που προτείνει το νέο Πρόγραμμα Σπουδών, να του δώσει ιδέες για την οργάνωση της διδασκαλίας του, να του επισημάνει σημεία της ύλης τα οποία οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ή τείνουν να παρανοούν και τέλος να του προτείνει συμπληρωματικές πηγές για να ανανεώσει και να επεκτείνει τις γνώσεις του.

Περιέχει:

(α) Ενδεικτικές διδακτικές ενέργειες για τη διδασκαλία των ενοτήτων του σχολικού βιβλίου.

(β) Προτεινόμενο διδακτικό υλικό για κάθε ενότητα και τρόπο αξιοποίησής του.

(γ) Υποδειγματικές απαντήσεις των ερωτήσεων, ασκήσεων, προβλημάτων του σχολικού βιβλίου.

(δ) Πρόσθετες ερωτήσεις, ασκήσεις και προβλήματα.

(ε) Επισημάνσεις για τις παρανοήσεις και τις εναλλακτικές ιδέες των μαθητών και τρόπους αντιμετώπισής τους.

(στ) Ενδεικτικό ετήσιο προγραμματισμό της ύλης.

(ζ) Προτεινόμενη βιβλιογραφία και άλλες πηγές πληροφόρησης (π.χ. δικτυακούς τόπους, κτλ).

Το σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι ότι η αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια των καθηγητών τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος τη αναγκαία σύνθεση. Οι δραστηριότητες που προτείνονται και προηγούνται της θεωρίας, έχουν στόχο να υπάρξει ο προβληματισμός και η αναζήτηση που θα οδηγήσει στην ανάγκη της ανάπτυξης της κατάλληλης θεωρίας. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η θεωρία είναι το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Οδηγός σ' αυτό το βηματισμό πρέπει να είναι, πάντα, ο συνάδελφος εκπαιδευτικός, που χωρίς τη δική του ουσιαστική συμβολή τίποτα δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΑΞΙΟΝ ΕΣΤΙ στο πέτρινο πεζούλι
αντικρύ του πελάγους η Μυρτώ να στέκει
σαν ωραίο οκτώ ή σαν κανάτι
με την ψάθα του ήλιου στο ένα χέρι

Απόσπασμα από το «Άξιον Εστί» του Οδυσσέα Ελύτη

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Στο μάθημα των μαθηματικών η δραστηριότητα είναι μια έννοια κλειδί γύρω από την οποία διαρθρώνονται σχεδόν όλες οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις. Για το λόγο αυτό θα αναφερθούμε με συντομία στα βασικά χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας και θα δώσουμε τέσσερα παραδείγματα που αφορούν την ανάπτυξή της.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ως δραστηριότητα είναι δυνατό να ορίσουμε μια κατάσταση – πρόβλημα ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος ([6]). Όποια ορολογία και αν υιοθετήσουμε, είναι κοινά αποδεκτό ότι η λειτουργία μιας δραστηριότητας χρησιμεύει αφενός για την κατασκευή από τους ίδιους τους μαθητές της νέας γνώσης και αφετέρου για να δώσει την ευκαιρία ποικίλων εφαρμογών των ήδη αποκτηθεισών γνώσεων.

Εργασία πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως **προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα** ([6]). Επιδιώκοντας τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, μέσω επεξεργασίας καταλλήλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας.

Σύμφωνα με πολλούς συγγραφείς ([2], [6], [9], [11], [12], κ.ά.) ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας που έχει ως στόχο την κατασκευή νέας γνώσης, είναι τα παρακάτω:

1. Η εκφώνηση να γίνεται εύκολα κατανοητή ώστε ο μαθητής να μπορεί να διαβλέψει τη μορφή μιας απάντησης στο πρόβλημα. Αυτό είναι ανεξάρτητο της ικανότητάς του να προτείνει τη σωστή απάντηση. Η απάντηση, συχνά, δεν είναι προφανής, αλλά με βάση τις γνώσεις του ο μαθητής μπορεί να εμπλακεί σε μια διαδικασία αναζήτησης διεξόδου.
2. Προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα απαιτείται να κατασκευαστεί η γνώση που αποτελεί το τελικό προϊόν της διαδικασίας μάθησης (είτε από τους ίδιους τους μαθητές, είτε με τη διευκόλυνση του διδάσκοντος).
3. Το δίκτυο των εμπλεκομένων εννοιών σε μία δραστηριότητα πρέπει να είναι ευρύ, αλλά πάντα μέσα στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των μαθητών.
4. Η διατύπωση του προβλήματος πρέπει να είναι αρκετά ανοικτή ώστε να αφήνει περιθώρια διερεύνησης και διαδικασίες διαισθητικής προσέγγισης.
5. Να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές, μόνοι τους ή στα πλαίσια της ομάδας, να διατυπώνουν και να επεξεργάζονται ενδιάμεσες προτάσεις.

Για να κατανοηθεί πληρέστερα η διαδικασία που ονομάζουμε **δραστηριότητα** παραθέτουμε τα παρακάτω παραδείγματα, στα οποία φαίνονται ορισμένα από τα πιο πάνω χαρακτηριστικά.

1ο Παράδειγμα **Ο πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψηφίων φυσικών αριθμών.**

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το **0;**
- Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;
- Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα **12** και διαφορά **2**. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;
- Σύγκρινε τα αθροίσματα **3+6** και **6+3** και μετά τα αθροίσματα **(5+4)+2** και **5+(4+2)**.
- Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.

Ο στόχος της δραστηριότητας αυτής είναι να φτάσουν οι μαθητές στην εικασία, στη συνέχεια στη διαπίστωση και τέλος στη διατύπωση των ιδιοτήτων της πρόσθεσης.
Παράλληλη ενέργεια είναι η «ανάγνωση» και η ανακάλυψη της δομής ενός τετραγωνικού πίνακα, ο οποίος παρουσιάζει την πρόσθεση των μονοψηφίων φυσικών αριθμών.

Μέσα από την παρατήρηση – στη συγκεκριμένη περίπτωση της δομής του πίνακα – οι μαθητές μαθαίνουν σταδιακά να ερευνούν, να αιτιολογούν, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών προτάσεων και στη συνέχεια να γενικεύουν τις εκτιμήσεις τους και να προσπαθούν να τις εκφράσουν με μαθηματική διατύπωση. Επειδή η δραστηριότητα αυτή γίνεται στην αρχή σχεδόν του σχολικού έτους, είναι δυνατόν ο ρόλος του διδάσκοντα να είναι, σε κάποιο βαθμό, καθοδηγητικός, κυρίως ως προς τον τρόπο και τη μέθοδο που απαιτείται ώστε να είναι σε θέση οι μαθητές να ερευνούν ένα θέμα.

Για παράδειγμα, πριν απαντηθούν οι ερωτήσεις της δραστηριότητας είναι δυνατόν να προταθεί από το διδάσκοντα να αριθμηθούν οι γραμμές και οι στήλες ώστε να διαπιστωθεί ότι κάθε γραμμή ή στήλη έχει έντεκα μικρά τετράγωνα (και όχι εννέα). Η αρίθμηση αυτή είναι χρήσιμη διότι δίνει έμφαση στην έννοια του ζεύγους των δύο προσθετέων (γραμμή, στήλη), έννοια κλειδί για την εξέλιξη της δραστηριότητας.

- Στην ερώτηση «**Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;**» η απάντηση από τους μαθητές είναι εύκολη και συνήθως άμεση. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο διδάσκων είναι πιθανό να χρειαστεί να συμπληρώσει και να εμπλουτίσει φραστικά την απάντηση με στόχο να εθιστεί ο μαθητής στην όσο το δυνατόν πιστότερη μετάφραση από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα.

- Στην ερώτηση «**Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;**», το ζεύγος (γραμμή, στήλη) δίνει την προφανή απάντηση «δύο». Εδώ η πιθανή απορία – ερώτηση «Δηλαδή δεν μπορούμε να προσθέσουμε τρεις ή περισσότερους αριθμούς; Τότε στο Δημοτικό πως βάζαμε πολλούς αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο και τους προσθέταμε;» μπορεί να γίνει αφορμή από το διδάσκοντα ώστε να δραστηριοποιήσει τους μαθητές προς την κατεύθυνση της αναζήτησης της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης.

- Στην αναζήτηση των αριθμών που έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2, ο διδάσκων μπορεί να προτείνει στους μαθητές να γραμμοσκιάσουν τα μικρά τετράγωνα που περιέχουν τον αριθμό 12 και να τους προτρέψει να δώσουν απαντήσεις. Είναι πιθανό να προκύψει το ερώτημα: «**Η γραμμή του 5 και η στήλη του 7 ή αντίστροφα;**». Η λέξη «αντιμετάθεση» μπορεί και να προταθεί από το διδάσκοντα για να ενισχυθεί η πορεία προς την αντιμεταθετική ιδιότητα.

- Οι συγκρίσεις των αθροισμάτων **3+6** και **6+3** καθώς και **(5+4)+2** και **5+(4+2)** μπορεί να γίνουν και με τη βοήθεια του πίνακα. Είναι δυνατόν να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να ελέγξουν αποτελέσματα και σε μεγαλύτερους αριθμούς, πριν διατυπωθούν τα τελικά συμπεράσματα για τις ιδιότητες της πρόσθεσης.

Σημείωση: Αν ο διδάσκων επιθυμεί να επεκτείνει τη δραστηριότητα πέραν των αρχικών ερωτήσεων, μπορεί να ζητήσει να γραμμοσκιάσουν οι μαθητές διαγωνίως μικρά τετράγωνα με το ίδιο αριθμό και να ζητηθεί η διατύπωση ενός κανόνα, ο οποίος αποδίδει το πόσες φορές εμφανίζεται διαγωνίως ο κάθε αριθμός.

2ο Παράδειγμα **Το τοπικό γραφείο της UNICEF θα μοιράσει 150 τετράδια, 90 στυλό και 60 γόμες σε πακέτα δώρων ώστε τα πακέτα να είναι τα ίδια και να περιέχουν και τα τρία είδη**

➢ Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;
➢ Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;
➢ Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με τα λιγότερα δυνατά από κάθε είδος;

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ο μύθος (κατάσταση – πρόβλημα) που παρουσιάζεται συμβάλλει, αφενός στη συναισθηματική (πέραν της νοητικής) επένδυση των μαθηματικών και αφετέρου στη σύνδεση των μαθηματικών με βιωματικές ή και γνωστικές εμπειρίες των μαθητών.

- Η πρώτη ερώτηση έχει σκοπό να εισάγει την αναγκαιότητα της έννοιας του κοινού διαιρέτη, προκειμένου να αντιμετωπιστεί ένα πρακτικό πρόβλημα. Στόχος είναι η εισαγωγή της έννοιας του κοινού διαιρέτη, όχι μέσα από μια καθαρά μαθηματική διαδικασία, αλλά από την ανάγκη να λυθεί ή αντιμετωπιστεί πρακτικά κάποιο πρόβλημα. Είναι σημαντικό, πριν δοθεί άμεσα μια μαθηματική έννοια, όπου αυτό είναι εφικτό, να προηγείται η αναγκαιότητά της εμφάνισής της και να οδηγείται ο μαθητής, διαμέσου ανακαλυπτικής διαδικασίας, στη μαθηματική έννοια. Γίνεται αντιληπτό (είτε από τους ίδιους τους μαθητές, είτε μετά από έμμεση διευκόλυνση του διδάσκοντος) ότι η διαδικασία του ελέγχου αν το 10 είναι κοινός διαιρέτης ή όχι, δίνει έμμεσα αποτελέσματα που απαντούν στο δεύτερο μέρος της ερώτησης: «**πόσα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;**».

- Η δεύτερη ερώτηση: «**Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με όλα τα διαθέσιμα είδη;**» είναι πιθανό να οδηγήσει τους μαθητές σε μία γνωστική σύγχυση, διότι η συνηθισμένη διαδικασία για ένα μαθητή είναι η ανεύρεση μιας συγκεκριμένης και μονοσήμαντης απάντησης. Στην προκειμένη περίπτωση το γεγονός ότι οι αποδεκτές απαντήσεις είναι πολλές, είναι δυνατόν αρχικά, να δυσκολέψει τους μαθητές. Όμως η ανακάλυψη της καινούργιας γνώσης από το μαθητή συχνά απαιτεί την αλλαγή του μέχρι τώρα τρόπου σκέψης του. Η αλλαγή αυτή συνήθως χρειάζεται την έμμεση διευκόλυνση από το μέρος του διδάσκοντος, του οποίου ο ρόλος δεν πρέπει να είναι αυτός της αυθεντίας που επιβάλει τη γνώση δογματικά και εκ των έξω, αλλά αυτός του συνεργάτη - διευκολυντή. Στην κατεύθυνση αυτή είναι δυνατόν ο διδάσκων να προτείνει στους μαθητές να δοκιμάσουν διάφορους αριθμούς ως πιθανές απαντήσεις.

- Η τρίτη ερώτηση οδηγεί με επαγωγικό τρόπο τους μαθητές στην έννοια του ΜΚΔ, διότι ο αριθμός που ικανοποιεί τις συνθήκες της τρίτης ερώτησης είναι προφανώς ο ΜΚΔ των αριθμών 150, 90, 60.

3ο Παράδειγμα **Βρες την απόσταση δύο σημείων Α, Β του άξονα x'x με τετμημένες 2 και 5 αντίστοιχα και γενίκευσε τα συμπεράσματά σου;**

Αρχικά ζητάμε από τους μαθητές να απεικονίσουν σε άξονα x'x τα σημεία με τετμημένες 2 και 5 και να προσδιορίσουν οπτικά, με τη βοήθεια του σχήματος, τη μεταξύ τους απόσταση. Στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η απόσταση των σημείων εκφράζεται από τη διαφορά 5 – 2.

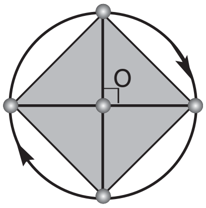
Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να διατυπώσουν μια γενικότερη απάντηση την οποία πρέπει να ελέγξουν με τη βοήθεια παραδειγμάτων. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας διαφορετικά ζεύγη σημείων στον άξονα x'x, να διαπιστώσουν ότι η απόσταση τους εκφράζεται από τη διαφορά των τετμημένων τους. π.χ. σημεία με τετμημένες αντίστοιχα 10 και 8, ή σημεία με τετμημένες 20 και 13.
Από τα παραπάνω είναι δυνατό να καταλήξουν οι μαθητές (μόνοι τους ή με τη βοήθεια του διδάσκοντα) στην εικασία ότι για κάθε ζεύγος σημείων Α, Β με τετμημένες x_1, x_2 αντίστοιχα, ισχύει ότι η απόσταση των σημείων δίνεται από τον τύπο $x_2 – x_1$ (όπου $x_2 > x_1$).

Η ορθότητα της παραπάνω λύσης προκύπτει από το σχήμα, από το οποίο παρατηρούμε ότι ΑΒ = ΟΒ – ΟΑ (όπου Ο αρχή του άξονα x'x). Γνωρίζουμε όμως ότι η τετμημένη x_2 του σημείου Β παριστάνει την απόσταση του σημείου Β από την αρχή του άξονα, όπως και ότι η τετμημένη x_1 του σημείου Α παριστάνει την απόσταση του σημείου Α από την αρχή του άξονα, άρα ΟΒ = x_2 και ΟΑ = x_1. Επομένως, η σχέση ΑΒ = ΟΒ – ΟΑ γίνεται ΑΒ = $x_2 – x_1$.

Η σχέση ΑΒ = $x_2 – x_1$ αποτελεί γενίκευση της έννοιας της απόστασης δύο σημείων που βρίσκονται στον άξονα x'x, εφόσον αναφέρεται σε κάθε ζεύγος σημείων του άξονα x'x. Εάν ο διδάσκων κρίνει σκόπιμο είναι δυνατό να θέσει το ίδιο πρόβλημα, αλλά στη θέση του άξονα x'x να είναι ο y'y.

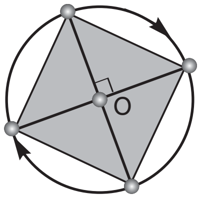
4ο Παράδειγμα

Σε κύκλο γράψε δύο κάθετες διαμέτρους και ένωσε τα άκρα τους. Τι τετράπλευρο σχηματίστηκε;

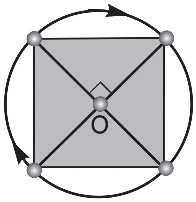


Η εκφώνηση είναι εύκολα κατανοητή και ο μαθητής είναι ικανός να διαβλέψει τη μορφή μιας απάντησης στο πρόβλημα.

Σε μια πρώτη ερευνητική φάση το πιο πιθανό σχήμα που θα κάνει ο μαθητής είναι τέτοιο ώστε η μία διάμετρος να είναι παράλληλη με τις υπαρκτές ή νοητές γραμμές του τετραδίου του και φυσικά η άλλη θα είναι η κάθετη προς αυτήν. Κατά συνέπεια, με βάση το σχήμα που έχει κατασκευάσει ο μαθητής, μία πιθανή απάντηση θα είναι ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος. Ο μαθητής οδηγήθηκε στο «λάθος» από τη συνήθεια να σχεδιάζει την τυχαία ευθεία σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση (οριζόντια). Στην ουσία, δηλαδή ακολούθησε ένα πρότυπο μοντέλο που χρησιμοποιεί για τη χάραξη ευθειών.



Σε μια δεύτερη φάση αναζήτησης διεξόδου, η αλλαγή κατεύθυνσης που θα προέλθει, είτε από τον ίδιο τον μαθητή είτε μετά από υπόδειξη του διδάσκοντος, ενδέχεται να βοηθήσει τη σωστότερη προσέγγιση. Η νέα προσέγγιση μπορεί να είναι ο σχεδιασμός διαφορετικών σχημάτων, όπου ο μαθητής προσπαθεί να διακρίνει κάποια μόνιμα και σταθερά στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να είναι π.χ. ότι όλες οι γωνίες του τετραπλεύρου είναι ορθές και όλες οι πλευρές του είναι ίσες, επομένως οδηγείται στο τετράγωνο.



Είναι φανερό ότι πρόκειται για μια πλούσια δραστηριότητα, γιατί:

1. Οι δρόμοι που οδηγούν στην επιβεβαίωση της διαίσθησης ή της εικασίας περί της ισότητας των γωνιών ή και των πλευρών είναι πολλοί. Είναι δυνατόν η επικύρωση και αποδοχή μιας λύσης να στηριχθεί σε γνωστές προτάσεις (π.χ. ιδιότητα της μεσοκαθέτου, συμμετρίες, άθροισμα γωνιών τριγώνου κλπ) ή σε εμπειρικές διαδικασίες (π.χ. συγκρίσεις πλευρών, μετρήσεις γωνιών κλπ).
2. Δίνεται η ευκαιρία να συζητηθεί η εγκυρότητα της κάθε προσέγγισης.
3. Επιτρέπει τον έλεγχο της ορθότητας ή μη των απαντήσεων των μαθητών μέσα από την ίδια τη δραστηριότητα.
4. Δίνει την δυνατότητα για ομαδική εργασία, εφ' όσον οι μαθητές μπορούν να χωρισθούν σε ομάδες και κάθε μια ομάδα να επιχειρήσει διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα.

Ακολουθεί σύντομη αναφορά στη φιλοσοφία του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και στις στρατηγικές σχεδιασμού των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ), στα πλαίσια της διαθεματικής προσέγγισης, καθώς και στην εξειδίκευσή τους, με τη βοήθεια κατάλληλου παραδείγματος, στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία είναι ήδη γνωστή από τις αρχές του 20ου αιώνα. Αρχικά εμφανίστηκε με τη μέθοδο των σχεδίων εργασίας (project method), μέθοδος που εστιάζεται σε σκόπιμες δραστηριότητες για την επίλυση προβλημάτων και στηρίζεται στα ενδιαφέροντα και στις εμπειρίες του κάθε παιδιού. Η διαθεματική προσέγγιση ήρθε ξανά στο προσκήνιο από τους νεώτερους παιδαγωγούς, οι οποίοι αμφισβήτησαν το φορμαλισμό του παραδοσιακού σχολείου και υποστήριξαν ότι ο κατακερματισμός της γνώσης δημιουργεί δυσκολίες στους μαθητές στο να ανακαλύψουν τις σχέσεις που συνδέουν τα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, να κατανοήσουν ότι ο κόσμος που μας περιβάλλει είναι ενιαίος και αδιαίρετος ([4]). Αντίθετα, η διαθεματική προσέγγιση αντιλαμβάνεται τη γνώση ως ενιαία ολότητα. Κατά τη διδασκαλία επιλέγεται ένα διδακτικό αντικείμενο, το οποίο προσεγγίζεται ολόπλευρα από διαφορετικές επιστημονικές οπτικές με συλλογικές διαδικασίες. Τη θέση δηλαδή των επιμέρους μαθημάτων παίρνει μια βιωματική εργασία ερευνητικής μορφής. Η ενιαιοποίηση του περιεχομένου διδασκαλίας, που γίνεται με τη διαθεματική προσέγγιση, δεν αποτελεί τεχνική συνένωση των γνώσεων, αλλά μια πολύπλευρη διερεύνηση του γνωστικού αντικειμένου. Η επιτυχία στο μαθησιακό αποτέλεσμα προϋποθέτει ακόμα την εφαρμογή ενεργητικών, συμμετοχικών συνεργατικών μεθόδων διδασκαλίας, όπως η μέθοδος επίλυσης προβλημάτων, η ανακαλυπτική μέθοδος, η βιωματική-επικοινωνιακή μέθοδος, κ.ά. Σε αντίθεση με τις μέχρι τώρα παραδοσιακές μεθοδολογικές προσεγγίσεις, όπου τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα διδάσκονται χωριστά, η διαθεματική προσέγγιση καταργεί τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των μαθημάτων και ενιαιοποιεί το περιεχόμενο της διδασκαλίας με στόχο την ολόπλευρη εξέταση των φαινομένων. Η εφαρμογή της διαθεματικής προσέγγισης ευνοεί τη χαλάρωση της ταξινόμησης και της περιχάραξης που χαρακτηρίζουν τα παραδοσιακά προγράμματα. Αποδυναμώνει τον απόλυτο διαχωρισμό στα περιεχόμενα των διαφορετικών μαθημάτων (ταξινόμηση), καθώς και την περιχάραξη, δηλαδή, τον αυστηρό εξωτερικό έλεγχο στην επιλογή, στην οργάνωση και στο ρυθμό προσέγγισης της γνώσης. Η διαθεματική προσέγγιση δίνει, επίσης, μεγάλη σημασία στο ρόλο του κινήτρου στη μάθηση, γεγονός που συμβάλλει στην ουσιαστική εμπλοκή του παιδιού στη μαθησιακή διαδικασία. Αυτό αφορά κυρίως τη δημιουργία εσωτερικών κινήτρων, όπως το ενδιαφέρον για ένα θέμα, η περιέργεια, η αναγνώριση της προσφοράς του κάθε μαθητή και κυρίως η βελτίωση της αυτοεκτίμησής του.

Με τη διαθεματική προσέγγιση[1] ωφελούνται και οι αδύνατοι μαθητές, οι οποίοι δυσκολεύονται να ακολουθήσουν τους ρυθμούς της τάξης τους. Οι μαθητές αυτοί αδικούνται από τις παραδοσιακές διδακτικές μεθόδους, ενώ αντίθετα με μεθόδους όπως αυτή των σχεδίων εργασίας, η οποία αναλύεται αμέσως παρακάτω, δημιουργείται το έδαφος να δραστηριοποιηθούν ανάλογα με τα ενδιαφέροντά τους.

Η διαθεματική προσέγγιση αναφέρεται στις διαφορετικές οπτικές μέσα από τις οποίες εξετάζεται ένα θέμα, στα διαφορετικά νοήματα που αποδίδονται σε μια έννοια, καθώς αυτή «διατρέχει» τα διάφορα γνωστικά αντικείμενα. Για παράδειγμα, η έννοια της «διάταξης» στα Μαθηματικά μπορεί να αποδίδει μια σχέση που υφίσταται σε μια μορφή κοινωνικής οργάνωσης (Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή-Ιστορία) ή ό,τι παράγεται (εδώ μας ενδιαφέρει η σειρά) κατά την εξέταση της κλασματικής απόσταξης του πετρελαίου (Χημεία) ή να είναι οι κλίμακες στη Φυσική (ενεργειακή κλίμακα, χωρική κλίμακα κτλ.). Ένα διαθεματικό θέμα μπορεί να είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αφού πέρα από το μαθηματικό περιεχόμενο

[1] Η παράγραφος αυτή καθώς και η επόμενη έχουν ως πηγή το άρθρο του **Α. Σκούρα** στο περιοδικό **Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων** (2002, Τεύχος 7, σσ. 101-110) με τίτλο «*Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις*».

ευνοείται μια ποικιλία συνδέσεων_με διάφορα γνωστικά αντικείμενα, όπως Ιστορία, Γεωγραφία κ.ά. Το γεγονός, όμως, ότι το μοντέλο που κυριαρχεί στο εκπαιδευτικό μας σύστημα βασίζεται στην αυτοτελή διδασκαλία των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων, καθιστά δύσκολη την ταυτόχρονη εξασφάλιση της απαιτούμενης «εσωτερικής συνοχής» και της «ενιαίας οριζόντιας ανάπτυξης περιεχομένων». Ως εκ τούτου, επιβάλλεται η κατά το δυνατόν οριζόντια διασύνδεση των Προγραμμάτων Σπουδών (Π.Σ.) των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων. Οριζόντια διασύνδεση στο επίπεδο των Π.Σ. σημαίνει κατάλληλη οργάνωση της διδακτέας ύλης κάθε γνωστικού αντικειμένου, με τρόπο που να εξασφαλίζεται η επεξεργασία θεμάτων από πολλές οπτικές γωνίες _με σκοπό αφενός μεν να αναδύεται με τον πιο φυσικό τρόπο η γνώση κάθε γνωστικού αντικειμένου, αφετέρου δε να γίνονται και οι απαραίτητες προεκτάσεις και συνδέσεις αυτής της γνώσης (και στο επιθυμητό βάθος κάθε φορά), ώστε και με τη διαμόρφωση στάσεων και αξιών, να επιτευχθεί η ολιστική προσέγγιση της γνώσης.

Η διαθεματικότητα μπορεί να αποτελέσει τη γέφυρα για τη σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, αφού ο αυτός συνιστά και την αναφορά και συμπυκνώνει την ουσία. Για τα Μαθηματικά η διαδικασία μέσω της οποίας παράγονται τα αποτελέσματα θα πρέπει να είναι εμπλουτισμένη με διαθεματικές προσεγγίσεις, ώστε αρχικά να αποκτούν περιεχόμενο οι νέες έννοιες και στη συνέχεια, μέσω συνδέσεων, το απαιτούμενο βάθος (αλλά και την εφαρμοσιμότητα) κάθε φορά. Αυτές οι συνδέσεις διευκολύνονται μέσα από τον προσδιορισμό ορισμένων θεμελιωδών εννοιών των διαφόρων επιστημών, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν βασικούς κρίκους οριζόντιας διασύνδεσης των διαφόρων μαθημάτων. Θα μπορούσαμε, με βάση το παραπάνω σκεπτικό, να θεωρήσουμε ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να κινείται (μπορεί και σύγχρονα) σε δύο άξονες. Ο πρώτος άξονας αναφέρεται στην εισαγωγή νέων εννοιών, στην παραγωγή δηλαδή νέας γνώσης, και ο δεύτερος στο πεδίο εφαρμογής (σε μια διευρυμένη προοπτική) αυτής της γνώσης. Η λέξη «κλειδί» κατά τον πρώτο άξονα είναι η «αναγκαιότητα», ενώ στο δεύτερο άξονα η λέξη «ενεργός», κάτι που υποδηλώνει μεταφορά και αναγνώριση της γνώσης έξω από συνήθη (μαθηματικά) πλαίσια εφαρμογής της. Έχοντας οι μαθητές την εμπειρία μιας ποιοτικής, σφαιρικής εισαγωγής σε μια μαθηματική έννοια, θα διευκολυνθούν στη συνέχεια σε μια περισσότερο τυπική περιγραφή των εννοιών που εμπλέκονται. Από τη σκοπιά του ειδικού οι συνιστώσες ενός θέματος μπορεί να ιδωθούν ως τμήμα ενός όλου.

Σε επίπεδο εφαρμογής η μέθοδος των σχεδίων εργασίας είναι δυνατό να σημαίνει την οργάνωση –ανάπτυξη ενός έργου (δραστηριότητας – προβλήματος). Συνήθως η ανάπτυξη γίνεται με τη βοήθεια των συγχρόνων παιδαγωγικών και διδακτικών αντιλήψεων (ενεργητική μάθηση, οικοδόμηση της γνώσης από τον ίδιο το μαθητή, ομαδοσυνεργατική μάθηση κλπ).

Η ανάπτυξη του σχεδίου εν γένει περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

(α) εύρεση του θέματος, (β) διατύπωση σκοπών, (γ) μέθοδος (κατά κανόνα ομαδοσυνεργατική, μαθητοκεντρική), (ε) σχεδιασμός – προετοιμασία (καθορισμός επί μέρους ενεργειών και χρονικός προγραμματισμός, οργάνωση σε υποομάδες με συγκεκριμένα καθήκοντα, καταγραφή υλικών ή άλλων μέσων που είναι πιθανό να χρειαστούν κλπ), (στ) υλοποίηση (π.χ συλλογή δεδομένων από βιβλιογραφία, επισκέψεις, συνεντεύξεις, παρατηρήσεις, επαφές με ειδικούς, πειράματα, καταγραφές κ.λπ.), (ζ) επεξεργασία δεδομένων – εξαγωγή συμπερασμάτων, (η) αξιολόγηση (έλεγχος επίτευξης των στόχων) και (θ) κοινοποίηση αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια παρατίθεται, σε συντομία, ένα υπόδειγμα ανάπτυξης του παρακάτω σχεδίου εργασίας.

Ο άνθρωπος από τα πρώτα του βήματα φαίνεται να αναζήτησε τρόπους σύγκρισης μεγεθών όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια, ο όγκος, ο χρόνος και το βάρος ή η μάζα των διαφόρων αντικειμένων που χρησιμοποιούσε, αντάλλασσε, εμπορευόταν κλπ. Οι ανθρώπινες επιλογές για τον καθορισμό των «μέτρων και σταθμών» είχαν ανέκαθεν και κοινωνικό, πολιτιστικό, οικονομικό, ιστορικό, επιστημονικό και πολιτικό χαρακτήρα.

➢ Προσπάθησε να βρεις και να καταγράψεις σε πίνακα τα «μέτρα και σταθμά» για τα βασικά μεγέθη (μήκος, επιφάνεια, όγκος, χρόνος και βάρος) που χρησιμοποιήθηκαν από το 3000 π.Χ. μέχρι σήμερα, από διάφορους λαούς: Αιγυπτίους, Βαβυλώνιους, Ινδούς, Κινέζους, Αρχαίους Έλληνες, Ρωμαίους, Άγγλους, Γάλλους, Ολλανδούς, Αμερικάνους, Ευρωπαίους και Νεοέλληνες.

➢ Πότε, με ποιο τρόπο, για ποιο λόγο και από ποιους έγιναν προσπάθειες να επικρατήσει ένα διεθνές σύστημα μέτρησης μεγεθών; Γιατί απέτυχαν μερικές προσπάθειες από αυτές;

Κριτήρια επιλογής θέματος

(1) Συνδέεται, σχεδόν, με το σύνολο των υπολοίπων μαθημάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται: Μαθηματικά, Πληροφορική, Φυσική, Χημεία, Ιστορία κλπ

(2) Διαχρονικό, διότι η έννοια της μέτρησης είναι συνυφασμένη για πολλές χιλιάδες χρόνια με τη ζωή του ανθρώπου

(3) Επίκαιρο, διότι άπτεται της καθημερινής ζωής των μαθητών

(4) Προσιτό και εύκολα κατανοητό

Σκοποί

(1) Η σύνδεση μεταξύ διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων (διαθεματική προσέγγιση της γνώσης).

(2) Η λειτουργία των μαθητών στο πρίσμα των σύγχρονων παιδαγωγικών μεθόδων μάθησης (ομαδοσυνεργατική μάθηση, ενεργητική μάθηση, βιωματική μάθηση, κλπ).

(3) Η ανάπτυξη δεξιοτήτων που σχετίζονται με τη σύγχρονη τεχνολογία.

(4) Η διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι στα γνωστικά αντικείμενα του Γυμνασίου.

(5) Η αναζήτηση, συγκέντρωση, ταξινόμηση και επεξεργασία του σχετικού με το θέμα πληροφοριακού υλικού.

Στόχοι

Οι μαθητές να γίνουν ικανοί ώστε:

(1) Να πραγματοποιήσουν έρευνες πεδίου.

(2) Να αναπτύξουν κριτική σκέψη σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που παρουσιάζουν τα διάφορα συστήματα μέτρησης.

(3) Να αναγνωρίζουν το ρόλο του επιστημονικού παράγοντα στις διάφορες επιλογές που αφορούν μέτρα και σταθμά.

(4) Να ευαισθητοποιηθούν σε θέματα λειτουργικότητας των μονάδων μέτρησης.

(5) Να είναι σε θέση να συγκρίνουν τα χρησιμοποιούμενα μέτρα και σταθμά σε διαφορετικές χώρες και σε ποικίλες χρονικές στιγμές, με διάφορα κριτήρια (πολιτιστικά, κλιματολογικά, οικονομικά κλπ).

Δραστηριότητες

Για την υλοποίηση των στόχων χρειάζεται να σχεδιασθούν οι εξής διδακτικές δραστηριότητες: (α) Χωρισμός σε ομάδες, (β)Αναζήτηση, συλλογή και επεξεργασία πληροφοριών, (γ) Καταγραφή και παρουσίαση των επιμέρους αποτελεσμάτων της συλλογής στοιχείων.

Ο χωρισμός πρέπει να γίνει με κάποιο ουσιαστικό κριτήριο, όπως: τα ειδικά ενδιαφέροντα, οι δεξιότητες και οι δυνατότητες των μαθητών. Θα ήταν δυνατόν μία ομάδα να συλλέξει πληροφορίες μέσω του διαδικτύου, άλλη ομάδα να ανατρέξει σε βιβλιοθήκες (σχολική, δημοτική, εθνική κλπ), άλλη ομάδα να έρθει σε επαφή με ειδικούς στο αντικείμενο επιστήμονες κλπ. Επίσης ο χωρισμός σε ομάδες θα μπορούσε να γίνει έτσι ώστε μία ομάδα να ασχοληθεί με τις μονάδες μήκους, επιφάνειας και όγκου, άλλη ομάδα με τις μονάδες χρόνου και μία άλλη με τις μονάδες βάρους.

Αξιολόγηση

Με την αξιολόγηση γίνεται προσπάθεια να διαπιστωθεί: (α) Ο βαθμός επίτευξης των διδακτικών στόχων, (β) Η καταλληλότητα της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε, (γ) Ο βαθμός της συνεργασίας που επιτεύχθηκε, (δ) Η διαθεματική προσέγγιση, (ε) Η αξιοποίηση πολλών και διαφορετικών πηγών πληροφόρησης, (στ) Η ανάπτυξη συνθετικής και δημιουργικής ικανότητας καθώς και η ανάπτυξη αυτενέργειας και πρωτοβουλιών, (ζ) Το ενδιαφέρον που έδειξαν οι μαθητές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Σύμφωνα με τα νέα μοντέλα διδασκαλίας των μαθηματικών η απόκτηση γνώσης είναι μια κατασκευαστική διαδικασία. Η γνώση και η κατανόηση γίνονται κτήμα του μαθητή όταν αυτός συμμετέχει ενεργά σε όλη τη μαθησιακή διαδικασία. Έτσι κάθε διδακτική ώρα πρέπει να είναι ώρα ενεργητικής συμμετοχής του μαθητή με κυρίαρχο στοιχείο την προσωπική του εργασία.

Για τον λόγο αυτό, η εξερεύνηση καταστάσεων, η ανακάλυψη νέων γνώσεων, η ερμηνεία των ήδη αποκτημένων γνώσεων και η βαθύτερη κατανόηση και συσχέτισή τους πρέπει να αποτελούν βασικό άξονα της διδασκαλίας.

Προτάσεις για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας

Πρώτο μέρος:

Δίνεται ένα πρόβλημα ή μία δραστηριότητα, μέσω της οποίας θα οδηγηθούμε στην **αναγκαιότητα εισαγωγής** μιας νέας έννοιας ή μιας μεθόδου. Η απάντηση και η προσέγγιση από τους μαθητές σε προβλήματα και δραστηριότητες εισαγωγής σε νέες έννοιες είναι διαισθητικές. Θα προσεγγίσουν το θέμα διαισθητικά για να αναπτύξουν εικασίες ή υποθέσεις που θα τις ελέγξουν εμπειρικά.

Δεύτερο μέρος:

Εδώ γίνεται η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, από το ειδικό στο γενικό, δηλαδή από τις εμπειρικές και διαισθητικές αντιλήψεις στις θεωρητικές εκφράσεις. Η νέα έννοια, τώρα, τοποθετείται στο επιστημονικό της στερέωμα ως **γνωστικό αντικείμενο**.

Τρίτο μέρος:

Η νέα έννοια θεωρείται πια γνωστή και χρησιμοποιείται για τη λύση προβλημάτων και εφαρμογών. Έτσι διευρύνεται η εμπειρία του μαθητή για τα πεδία εφαρμογής της νέας έννοιας. Δηλαδή, η νέα γνώση, τώρα, λειτουργεί ως **γνωστικό εργαλείο**. Είναι ενδιαφέρον να προτείνονται στους μαθητές και καταστάσεις, στις οποίες η νέα γνώση δεν είναι εφαρμόσιμη, ώστε να μπορούν να κατανοούν καλύτερα το πεδίο εφαρμογής της.

Παραδείγματα σχεδιασμού διδασκαλίας

Διδακτική προσέγγιση της έννοιας: «Δυνάμεις φυσικών αριθμών». (§ 1.3.)

Πρώτο μέρος: Η αναζήτηση και η έρευνα της έννοιας (1η Δραστηριότητα).

- Καταγράφουμε τα αποτελέσματα που προτείνονται από τους μαθητές:

Εμβαδά	Όγκοι
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
$4 \cdot 4 = 16$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
………	………

και ζητάμε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ένα γράμμα (μεταβλητή) για να εκφράσουν τα γινόμενα αυτά. Έστω

$\alpha \cdot \alpha$	$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

- Ζητάμε από τους μαθητές να περιγράψουν τα παραπάνω γινόμενα, δηλαδή από πόσους παράγοντες αποτελείται το καθένα και αν όλοι οι παράγοντες είναι ίδιοι.
  Γράφουμε και γινόμενα με περισσότερους παράγοντες, για παράδειγμα:
  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ κ.λ.π.
  και ζητάμε από τους μαθητές να βρουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη γραφή και στον υπολογισμό τέτοιων γινομένων.

- Παρουσιάζουμε στους μαθητές τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτού του είδους τα γινόμενα.

$2 \cdot 2 = 2^2$
$3 \cdot 3 = 3^2$
$4 \cdot 4 = 4^2$
$5 \cdot 5 = 5^2$
………
$\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$

και αντίστροφα όταν βλέπουμε μια δύναμη εννοούμε το αντίστοιχο γινόμενο:

$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$20^2 = 20 \cdot 20 = 400$
………
$x^2 = x \cdot x$
$\nu^2 = \nu \cdot \nu$
$\omega^2 = \omega \cdot \omega$ κ.λ.π.

και ακόμα

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 43$
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$
………
$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$

και επίσης:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 47$
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$
………
$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5$
κ.λ.π.

- καθώς και τον τρόπο που τα διαβάζουμε ή αναφερόμαστε σ' αυτά.
  - ✓ δεύτερη δύναμη του 2 ή τετράγωνο του 2
  - ✓ τρίτη δύναμη του .... ή κύβος του ....
  - ✓ τέταρτη δύναμη του ....
  - ✓ πέμπτη δύναμη του .... κ.λ.π.
- και δίνουμε την ορολογία που χρησιμοποιούμε στις δυνάμεις.

εκθέτης

$$\underbrace{3 \cdot 3}_{2\ \text{φορές}} = 3^2$$

βάση

Σημείωση: Σε αρκετές περιπτώσεις οι μαθητές συγχέουν το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ με το γινόμενο $\kappa \cdot \alpha$. Για το λόγο αυτό θεωρούμε σκόπιμο ο καθηγητής να επαναλάβει σε κατάλληλη στιγμή ότι: $\kappa \cdot \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha + \alpha}_{\kappa\text{–φορές}}$.

<u>Δεύτερο μέρος:</u> **Η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.**

Ο καθηγητής δίνει τον ορισμό της δύναμης φυσικού αριθμού με εκθέτη φυσικό.

<u>Τρίτο μέρος:</u> **Η χρήση της έννοιας για τη λύση προβλημάτων.**

1. **Να υπολογιστούν το τετράγωνο, ο κύβος, η τέταρτη, η πέμπτη και η έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;**

$$\begin{array}{lllll}
10^2 = 10\cdot10 & = & 100 & & \\
10^3 = 10\cdot10\cdot10 & = & 100\cdot10 & = & 1.000 \\
10^4 = 10\cdot10\cdot10\cdot10 & = & 1.000\cdot10 & = & 10.000 \\
10^5 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 & = & 10.000\cdot10 & = & 100.000 \\
10^6 = 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 & = & 100.000\cdot10 & = & 1.000.000
\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μία από τις δυνάμεις του 10 που υπολογίστηκαν έχει τόσα μηδενικά όσος είναι και ο εκθέτης της δύναμης.

Για παράδειγμα: $10^6 = 1.\underbrace{000.000}_{\text{έξι μηδενικά}}$

2. **Να εκτελεσθούν οι πράξεις: (α) $(2\cdot5)^4+(3\cdot2)^2$ (β) $(2+3)^3–8\cdot3^2$ (γ) $10^2+3^3–2^6+(2+3)^3$**

(α) $(2\cdot5)^4 + (3\cdot2)^2 = 10^4 + 6^2 = 10.000 + 36 = 10.036$

(β) $(2+3)^3 – 8\cdot3^2 = 5^3 – 8\cdot9 = 125 – 72 = 53$

(γ) $10^2+3^3–2^6+(2+3)^3=100+27–128+5^3=127–128+125=(127+125)–128=252–128=124$

3. Να γραφεί το ανάπτυγμα του αριθμού 4.987.604 με χρήση των δυνάμεων του 10.

Είναι: **4.987.604** =

= **4** εκατομμύρια **+9** εκατοντάδεςχιλιάδες**+8** δεκάδεςχιλιάδες**+7** χιλιάδες**+6** εκατοντάδες**+0** δεκάδες**+4** μονάδες=

$= \mathbf{4}\cdot1.000.000 + \mathbf{9}\cdot100.000 + \mathbf{8}\cdot10.000 + \mathbf{7}\cdot1.000 + \mathbf{6}\cdot100 + \mathbf{0}\cdot10 + \mathbf{4}\cdot1 =$

$= 4\cdot106 + 9\cdot10^5 + 8\cdot10^4 + 7\cdot10^3 + 6\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 4$

Η μορφή αυτή $\mathbf{4}\cdot10^6 + \mathbf{9}\cdot10^5 + \mathbf{8}\cdot10^4 + \mathbf{7}\cdot10^3 + \mathbf{6}\cdot10^2 + \mathbf{0}\cdot10^1 + \mathbf{4}$ του αριθμού **4.987.604** είναι **το ανάπτυγμα του αριθμού σε δυνάμεις του 10**.

Εδώ ενδείκνυται η αναφορά στην προτεραιότητα των πράξεων με χρήση της αναλυτικής γραφής της παράστασης. $3^4 + 2^3\cdot5 + 4\cdot(5 + 1)^2 = 3\cdot3\cdot3\cdot3 + 2\cdot2\cdot2\cdot5 + 4\cdot(5+1)\cdot(5+1)$

Η προτεραιότητα του πολλαπλασιασμού οδηγεί άμεσα στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός των δυνάμεων πρέπει να προηγείται.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Σχέδιο μαθήματος είναι η δομημένη περίληψη του μαθήματος, που περιγράφει την στρατηγική, την οποία έχει αποφασίσει ο διδάσκων να ακολουθήσει προκειμένου να διδάξει το μάθημα του σε συγκεκριμένη τάξη.

Το σχέδιο μαθήματος περιλαμβάνει: (α) τη διδακτέα ύλη, (β) τη μέθοδο διδασκαλίας και τη διδακτική μεθοδολογία που πιθανόν απαιτείται για κάθε διδασκόμενη έννοια, (γ) τα μέσα (υλικά και εποπτικά) που πιθανόν να χρειάζονται και (δ) το διδακτικό χρόνο που απαιτεί η ενότητα, (ε)το φύλλο εργασίας κατά βούληση του διδάσκοντα.

Πολλοί ασχολούμενοι με τη διδακτική θεωρούν ότι το να βασίζεται η διδασκαλία σε σχέδιο μαθήματος συντελεί στην επιτυχημένη διδασκαλία οποιουδήποτε μαθήματος.

Κάθε εκπαιδευτικός οφείλει να αφιερώνει χρόνο και ενέργεια για την προπαρασκευή του μαθήματος κάθε διδακτικής ώρας. Βασικό μέρος αυτής της προπαρασκευής είναι το σχέδιο μαθήματος, που η ποιότητά του επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα του μαθήματος, διότι μόνο με την προσεκτική προετοιμασία του μαθήματος εξασφαλίζεται ότι θα διδαχθούν επαρκώς και αποτελεσματικά οι κυριότερες έννοιες του εκάστοτε γνωστικού αντικειμένου.

Αν ένας διδάσκων αισθάνεται ότι έχει την ικανότητα να διδάξει χωρίς προετοιμασία **διακινδυνεύει, πάντα, να δώσει επιπόλαιη ή στρεβλή εικόνα του γνωστικού αντικειμένου, ή να μην κάνει σωστή διαχείριση του χρόνου (διδακτικής ώρας) ή και πολλές φορές να παραλείψει σημαντικές έννοιες, κατά τη διδασκαλία**.

Γενικά, όσοι ασχολήθηκαν με το σχέδιο μαθήματος, δέχονται ότι αυτό είναι απαραίτητο, διότι συντελεί με πολλούς τρόπους στην καλή παρουσίαση του μαθήματος και είναι πολύτιμο βοήθημα τόσο για τους διδάσκοντες, ακόμη και για όσους θεωρούν ότι κατέχουν πολύ καλά το περιεχόμενο του μαθήματος, όσο και για τους μαθητές, τους οποίους πρέπει να λάβει υπόψη του κατά τον σχεδιασμό.

Τα **πλεονεκτήματα** του σχεδίου μαθήματος είναι ότι:

- Διευκολύνει την άρτια οργάνωση της ύλης.
- Ευνοεί τον σαφή καθορισμό του σκοπού και του στόχου και των υποστόχων του μαθήματος.
- Δίνει την ευκαιρία δημιουργίας μετρήσιμων στόχων, ώστε να μπορεί να ελεγχθεί το ποσοστό επίτευξής τους και το ποσοστό επιτυχίας της διδασκαλίας.
- Χρησιμεύει ως οδηγός του διδάσκοντος κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.
- Προλαμβάνει ουσιώδεις παραλείψεις ή υπερβολές.
- Διευκολύνει τη μετάδοση γνώσεων.
- Εξοικονομεί χρόνο, σκέψη, προσπάθεια.
- Συντελεί στην έγκαιρη αντιμετώπιση τυχόν δυσκολιών και προβλημάτων.
- Συμβάλλει στην ορθή κατανομή του χρόνου.
- Προάγει την αυτοπεποίθηση του διδάσκοντος.

Οι βασικότερες εργασίες που απαιτούνται για να προετοιμαστεί σύντομα και σωστά το σχέδιο μαθήματος, είναι οι εξής:

α. Καθορισμός του γνωστικού αντικειμένου

Ο ακριβής προσδιορισμός του περιεχομένου του γνωστικού αντικειμένου του μαθήματος είναι αναγκαίος. Επιδιώκουμε πάντα να είναι συγκεκριμένος και πραγματοποιήσιμος στα πλαίσια του διατιθέμενου χρόνου της διδακτικής ώρας. Ο καθορισμός του θέματος της διδασκαλίας διευκρινίζεται από την απάντηση στο ερώτημα «**τι θα διδάξω;**» και δίνει τον τίτλο του μαθήματος, για το οποίο ετοιμάζουμε το σχέδιο.

β. Καθορισμός του στόχου

Ο σκοπός και ο στόχος του μαθήματος, που είναι συνάρτηση του γνωστικού αντικειμένου, προσδιορίζεται από την απάντηση στο ερώτημα «**γιατί οι μαθητές θα διδαχτούν το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο;**». Ο καθορισμός του στόχου και των υποστόχων συντελεί στη μεθοδικότερη οργάνωση του σχεδίου μαθήματος, στην αρτιότερη διευθέτηση της ύλης και διευκολύνει την πραγματοποίηση του επιδιωκόμενου σκοπού. Η επιδίωξη πολλών, **ταυτόχρονα**, στόχων οδηγεί σε αποτυχία.

Για να εξασφαλιστεί η επιτυχία στη διδασκαλία του μαθήματος πρέπει οι υποστόχοι στους οποίους αναλύεται ο στόχος να είναι σύντομοι, απλοί και σαφείς, ενώ προτείνεται ο στόχος του μαθήματος να τίθεται υπό μορφή προβλήματος, που διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών και τους προκαλεί να το λύσουν προκειμένου να ικανοποιηθούν από τη λύση του οι ίδιοι. Επιπλέον ο στόχος πρέπει να είναι πραγματοποιήσιμος στα πλαίσια μιας διδακτικής ώρας.

Η σαφήνεια του στόχου εξυπηρετεί τον διδάσκοντα, αφού προσανατολίζει τη διδασκαλία γύρω από αυτόν. Οι μαθητές, επίσης, παρακολουθούν με περισσότερο ενδιαφέρον και προσοχή το μάθημα, όταν γνωρίζουν με σαφήνεια το στόχο της διδασκαλίας. Σε ορισμένες περιπτώσεις η σαφής και ορθή διατύπωση του στόχου είναι ικανή να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να δημιουργήσει εξαίρετη διάθεση για το μάθημα.

Γενικά, η απόδοση της διδασκαλίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον σαφή καθορισμό του αντικειμενικού στόχου της διδασκαλίας. Ως αντικειμενικοί στόχοι της διδασκαλίας συνήθως τίθενται οι ακόλουθοι: (α) απόκτηση γνώσης, (β) κατανόηση γεγονότων ή φαινομένων, (γ) απόκτηση ικανοτήτων και δεξιοτήτων, (δ) εκτιμήσεων και (ε) η διαμόρφωση συμπεριφοράς, γιατί αυτό επιδιώκεται μέσα από τη διεργασία της μάθησης.

γ. Οργάνωση της ύλης

Οργάνωση της ύλης είναι ο καθορισμός της διαδικασίας κάθε φάσης της διδασκαλίας.

- Για τη φάση της προπαρασκευής, σημειώνονται ορισμένες προτάσεις, που αναφέρουν τι πρέπει να ειπωθεί ή τι πρέπει να γίνει(π.χ. πώς πρέπει να κινητοποιήσει ο διδάσκων τους μαθητές), ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη διανοητική και συναισθηματική προετοιμασία των μαθητών για το μάθημα που θα επακολουθήσει. Επίσης για την παρουσίαση σημειώνονται, σε σύντομες προτάσεις, τα ουσιώδη – κομβικά σημεία της διδασκαλίας.

  Στα μαθήματα πληροφοριών ή τα θεωρητικά γράφονται τα κύρια σημεία του περιεχομένου του μαθήματος (υποενότητες) με τη σειρά παρουσίασης και η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία κάθε υποενότητας.

  Στα μαθήματα δεξιότητας (πρακτικά) καταγράφονται όλες οι βαθμίδες της ενότητας και τα κύρια ή καίρια σημεία, που πρέπει να τονιστούν περισσότερο. Η χρησιμοποιούμενη μέθοδος δε θεωρείται αναγκαίο να σημειωθεί, διότι η παρουσίαση των δεξιοτήτων γίνεται, κυρίως, με τη μέθοδο της επιδείξεως.
- Για τη φάση της εφαρμογής σημειώνονται οι ερωτήσεις, ασκήσεις κλπ, που θα χρησιμεύσουν για την εμπέδωση των γνώσεων, την εξάσκηση των μαθητών σε προβλήματα, πράξεις, έργα κλπ.
- Για τη φάση της δοκιμασίας, γράφονται στα πληροφοριακά μαθήματα ένα τεστ, που αναφέρεται στο περιεχόμενο και τους σκοπούς του μαθήματος και στα μαθήματα δεξιότητας, ένα τεστ εκτελέσεως.

  Σε πολλές περιπτώσεις καλό είναι να καθορίζουμε και το κριτήριο επίδοσης, με το οποίο θα κριθεί η επιτυχία των μαθητών στο τεστ. Το κριτήριο επίδοσης είναι σκόπιμο να τίθεται υπόψη των μαθητών στην αρχή της δοκιμασίας.

δ. Επιλογή μεθόδου

Μετά τον προσδιορισμό του γνωστικού αντικειμένου και τον καθορισμό του στόχου ο διδάσκων, παράλληλα με την οργάνωση της ύλης, οφείλει να επιλέξει τη μέθοδο που θα χρησιμοποιήσει για τη διδασκαλία του σχεδιαζόμενου μαθήματος.

Η επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου διευκολύνεται αν απαντηθεί το ερώτημα: «**Πώς θα διδάξω αυτό το μάθημα σ' αυτούς τους μαθητές πιο αποτελεσματικά;**».

Υπάρχουν περιπτώσεις, για τη διδασκαλία διαφόρων ενοτήτων ενός συγκεκριμένου μαθήματος, που επιβάλλεται συνδυασμός μεθόδων διδασκαλίας, για καλύτερο διδακτικό αποτέλεσμα. Η επιλογή γίνεται μεταξύ της μεθόδου που θεωρητικά προσφέρεται περισσότερο και της μεθόδου που είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί, σύμφωνα με τις δυνατότητες που υπάρχουν.

Γενικά, το περιεχόμενο του μαθήματος "καθοδηγεί" συχνά τη μέθοδο διδασκαλίας του. Κυρίως, όμως, η διδακτική ικανότητα, η δεξιότητα χειρισμών, η εμπειρία, η φαντασία, η επινοητικότητα και η δημιουργικότητα του διδάσκοντα συντελούν στην επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου.

ε. Ανάθεση εργασίας

Εάν κριθεί σκόπιμο να ανατεθεί κάποια εργασία στους μαθητές, ή σε ομάδες μαθητών, πρέπει να σημειωθεί στο σχέδιο μαθήματος τι ακριβώς επιθυμούμε να κάνουν οι μαθητές: (α) οι συγκεκριμένες εφαρμογές του μαθήματος, εάν είναι μάθημα δεξιότητας, (β) τα προβλήματα ή οι ερωτήσεις που θα δοθούν, εάν είναι μάθημα πληροφοριών.

Θεωρείται σκόπιμο να γίνεται ένα είδος κριτικής της εργασίας που ανατίθεται στους μαθητές από τον διδάσκοντα και από τους συμμαθητές τους, οι οποίοι ενεργοποιούνται με αυτόν τον τρόπο. Στην κριτική συγκρίνεται η εργασία που έκαναν ή το αντικείμενο που κατασκεύασαν οι μαθητές ή οι ομάδες με το σχέδιο εργασίας που τους δόθηκε και με εργασίες άλλων ομάδων. Η κριτική θεωρείται εξαιρετικά χρήσιμη για την άσκηση των μαθητών στην ακριβή εκτέλεση ασκήσεων, κανόνων, σχεδίων, κατασκευών κλπ.

στ. Ανακεφαλαίωση

Η ανακεφαλαίωση θεωρείται ο πλέον κατάλληλος τρόπος, για το «κλείσιμο» ενός μαθήματος. Αποτελεί την τελευταία διδακτική ενέργεια κάθε ενότητας, με την οποία προβάλλονται τα κυριότερα σημεία του μαθήματος. Στο σχέδιο μαθήματος σημειώνονται ενδεικτικά τα σημεία που πρέπει να τονιστούν για να εντυπωθούν περισσότερο στους μαθητές.

ζ. Τα υλικά και εποπτικά μέσα

Τα απαραίτητα για την καλή παρουσίαση του μαθήματος, υλικά και εποπτικά μέσα καταχωρούνται στο σχέδιο μαθήματος. Αυτό εξυπηρετεί για να διαπιστωθεί αν υπάρχουν τα απαιτούμενα υλικά και εποπτικά μέσα, πριν εισέλθουμε στην αίθουσα διδασκαλίας. Έτσι αποφεύγονται άσκοπες διδακτικές ανωμαλίες και απρόοπτα κενά κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

η. Βιβλιογραφία

Οι κυριότερες πηγές των βοηθημάτων (βιβλία, περιοδικά κτλ) που χρησιμοποιήθηκαν για την αρτιότερη προπαρασκευή της διδασκαλίας, δηλαδή τη βιβλιογραφία, σημειώνονται στο σχέδιο (συγγραφέα, τίτλο, τόπο εκδόσεως, εκδότη, έτος εκδόσεως, αριθμό κεφαλαίου ή σελίδες στις οποίες υπάρχει η σχετική ύλη). Αυτό εξυπηρετεί για μελλοντική χρήση του ίδιου σχεδίου. Είναι σκόπιμο να χρησιμοποιείται η βιβλιογραφία για την υπόδειξη πηγών στους μαθητές, με τις οποίες θα μπορούν μελετήσουν περισσότερα γύρω από το σχετικό θέμα.

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

α. Καθορισμός του γνωστικού αντικειμένου.
6.3. Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών

β. Καθορισμός του στόχου.

- Να αναγνωρίζουν αν υπάρχει **αναλογία** στη μεταβολή δύο μεγεθών
- Να συμπληρώνουν πίνακες αναλόγων ποσών, όταν δίνεται ο **λόγος** τους
- Να υπολογίζουν το **λόγο δύο αναλόγων ποσών**, όταν δίνονται οι πίνακές τους
- Να χρησιμοποιούν το **ποσοστό** ως ειδική περίπτωση **συντελεστή αναλογίας**

γ. Οργάνωση της ύλης.
(1) Ανάπτυξη **προτεινόμενων δραστηριοτήτων** (20 min):
1η Οι μαθητές ανακαλύπτουν (Bruner) ότι όταν δύο ποσά μεταβάλλονται μαζί η μεταβολή δεν είναι πάντα ανάλογη
2η Η χρήση του συντελεστή και των πινάκων αναλογίας.
(2) Παρουσίαση **προτεινόμενων εφαρμογών** (20 min)

δ. Επιλογή μεθόδου.
Μέθοδος: Οικοδόμηση της γνώσης (σύμφωνα με τη Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης) μέσω της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών (Piaget) με την ανάπτυξη δραστηριοτήτων.
1η δραστηριότητα: Συγκρίνουν οι μαθητές τους λόγους **56:1**,**60**, **81:1**,**80**, **63:1**,**75**, **68:1**,**70** και βρίσκουν τους συντελεστές αναλογίας: **35**, **45**, **36** και **40**, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Αναμένεται να βγάλουν μόνοι τους το συμπέρασμα ότι δεν ισχύει ο αρχικός ισχυρισμός.
2η δραστηριότητα: Αν διαιρέσουν οι μαθητές τις εισπράξεις με την τιμή του κιλού **0,4€** θα βρουν τα κιλά που πούλησε κάθε φορά και συνολικά, δηλαδή **15+7+13+8+9+12+6+4+11+5=90**.
Επομένως, θα φανεί ότι ξέχασε να σημειώσει τα **10** κιλά για **4€**.
Γίνεται προσπάθεια να εξάγουν οι μαθητές συμπεράσματα για:
(α) τη διατύπωση του ορισμού των ανάλογων ποσών ή μεγεθών, (β) τη σχέση που συνδέει αυτά και (γ) το ρόλο του ποσοστού ως συντελεστού αναλογίας.

ε. Ανάθεση εργασίας.
(3) Δίνονται για εξάσκηση οι **προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα** (5 min)

στ. Ανακεφαλαίωση.
(4) Λύνονται οι **προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα** (20 min)
(5) Δίνεται τεστ αυτοαξιολόγησης (20 min)
(6) Αναφέρονται ανακεφαλαιωτικά οι ορισμοί και οι κανόνες (5 min)

ζ. **Τα υλικά και εποπτικά μέσα:** Μαθητικό τετράδιο, Πίνακας.

η. Βιβλιογραφία:
[1], [3], [5], [6], [7], [8] και [11].

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΔΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

α. **Καθορισμός του γνωστικού αντικειμένου.**
9.5. Κέντρο συμμετρίας

β. **Καθορισμός του στόχου.**
- Να αναγνωρίζουν **σχήματα με κέντρο συμμετρίας**
- Να γνωρίσουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας και τις **γεωμετρικές ιδιότητες** που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή

γ. **Οργάνωση της ύλης.**
(1) Ανάπτυξη **προτεινόμενης δραστηριότητας** (10 min):
Αναγνώριση σχημάτων με κέντρο συμμετρίας, με σκοπό τη διαισθητική και εμπειρική ανακάλυψη μέσω εικονικών αναπαραστάσεων (Bruner), από τους μαθητές, του ορισμού του κέντρου συμμετρίας σχήματος.
(2) Παρουσίαση **προτεινόμενων εφαρμογών** (15 min)

δ. **Επιλογή μεθόδου.**
Μέθοδος: Οικοδόμηση της γνώσης (σύμφωνα με τη Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης), μέσω της ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών (Piaget) με την ανάπτυξη δραστηριοτήτων.
Γίνεται προσπάθεια να αποκτήσουν την ευχέρεια οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα συμμετρικά σχήματα, τη σχέση ισότητας των συμμετρικών σχημάτων και να βρίσκουν τα συμμετρικά σημείων και σχημάτων ως προς σημείο, καθώς και να γνωρίσουν τις συνακόλουθες γεωμετρικές ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα, να εξάγουν συμπεράσματα, όπως: «Δύο σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του ΜΜ'», «Το κέντρο συμμετρίας είναι συμμετρικό του εαυτού του», «Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα», «Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα».

ε. **Ανάθεση εργασίας.**
(3) Λύνονται **οι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα** (15 min)

στ. **Ανακεφαλαίωση.**
(4) Αναφέρονται ανακεφαλαιωτικά οι ορισμοί και οι κανόνες (5 min)

ζ. **Τα υλικά και εποπτικά μέσα.**
Μαθητικό τετράδιο, Χαρτόνια με σχήματα, Πίνακας.

η. **Βιβλιογραφία:**
[1], [3], [5]. [6], [7], [8] και [11].

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Γαγάτσης, Α. (1991). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη: Αφοι Κυριακίδη.

2. Glasersfeld (V), E. (1995). *Radical Constructivism.* London: The Palmer Press.

3. Θωμαΐδης, Γ.(1999). Μια επισκόπηση ερευνών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελληνική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 112-132.

4. Καλογρίδη, Σ., Φερεντίνος, Σ., Μαρκόπουλος, Σ. (2003), Η διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία και η «ανακάλυψη» του μαθητή» *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου «Ο Εκπαιδευτικός και το Αναλυτικό Πρόγραμμα», Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Πατρών*, Πάτρα.

5. Κλαουδάτος, Ν. (1999). Τι σημαίνει για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «Ενεργητική Στάση ως προς τα Μαθηματικά»;. *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων.* Α(2), 62-77.

6. Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Μυτιλήνη.

7. Νικολουδάκης Εμμ., Χουστουλάκης Εμμ., (2004) *Αιτίες που δυσχεραίνουν την επικοινωνία μεταξύ δασκάλου και μαθητών στη διδασκαλία των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Μία προτεινόμενη λύση.* Αθήνα. Πρακτικά του 21ου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε. σσ. 359-372.

8. Οικονόμου, Π. & Τζεκάκη. Μ. (1999). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 37-65.

9. Σκούρας, Α. (2002). Δραστηριότητες και διδακτική πράξη: Από την ανάπτυξη της εμπειρίας στη μαθηματικοποίησή της, MENTOR, *A Journal of Scientific and Educational Research, , 6, Hellenic Pedagogical Institute*, 105-120.

10. Σκούρας, Α. (2002). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων* 7, 101-110.

11. Σκούρας, Α. (2006). Άρθρο με τίτλο: «Μαθηματικά Γυμνασίου». *Τεύχος Επιμορφωτικού Υλικού*, 79-85. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

12. Φερεντίνος, Σ., Καλλιγάς, Χ. (2001). «Διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια δραστηριοτήτων». *Πρακτικά 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση».*, Θεσσαλονίκη.

13. Χιονίδου, Μ. (1999). *Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στο Κονστρουκτιβιστικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών.* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Abercombie, M.L.J. (1986). *Δημιουργική Διδασκαλία και Μάθηση.* Αθήνα: Gutenberg.
2. Βαρνάβα-Σκούρα, Τ. (1991). *Διαθεματική προσέγγιση στη διδασκαλία. Παιδαγωγική και Ψυχολογική Εγκυκλοπαίδεια.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα
3. Βασιλείου, Φ. (1969). *Φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Ε.Μ.Π
4. Βοσνιάδου, Σ.(1995). *Η ψυχολογία των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.
5. Bloom, B. S., Krathwohl, A. (1986). *Ταξινομία Διδακτικών Στόχων, Τόμος Α' Γνωστικός Τομέας*, Αθήνα: Κώδικας.
6. Bunt, L., Jones, P. & Bedient, J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών.* Αθήνα: Πνευματικός.
7. Cemen, P.B. (1989). *Το άγχος για τα Μαθηματικά*, Αθήνα: Παρουσία.
8. CIDREE. (1999). *Διεπιστημονική Διδασκαλία και Μάθηση στο σχολείο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.* Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-ΠΙ.
9. Clawson, C. C. (2005). *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών.* Αθήνα: Κέδρος.
10. Δοξιάδης, Α. (1992). *Ο θείος Πέτρος και η εικασία του Γκόλντμπαχ.* Αθήνα: Καστανιώτης.
11. Davis, P.J. – Hersh, R., (1980). *Η Μαθηματική Εμπειρία*, Αθήνα: Τροχαλία.
12. Dewey, J. (1980) *Εμπειρία και Εκπαίδευση.* Αθήνα: Γλάρος.
13. Du Sautoy, M. (2005). *Η μουσική των πρώτων αριθμών.* Αθήνα: Τραυλός.
14. *Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια.* Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών.
15. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (1980). *Εκπαίδευση και Επιστήμη* (Τρεις τόμοι) Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
16. Εξαρχάκος, Θ. (1988). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
17. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών.* Περιοδική Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματική Εταιρείας (Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας).
18. *Ευκλείδης Α*, Γ. Περιοδικές Εκδόσεις της Ελληνική Μαθηματική Εταιρείας.
19. Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών*, Αθήνα: Τροχαλία.
20. Guedj, D. (1999). *Το θεώρημα του παπαγάλου.* Αθήνα: Πόλις.
21. Galvez, P. (2006). *Υπατία. Η γυναίκα που αγάπησε την επιστήμη.* Αθήνα: Μεταίχμιο.
22. Guedj, D. (2002). *Το Μέτρο του Κόσμου.* Αθήνα: Τραυλός.
23. Guedj, D. (2002). *Επιχείρηση Μεσημβρία.* Αθήνα: Τραυλός.
24. Guedj, D. (2005). *Τα αστέρια της Βερενίκης.* Αθήνα: Ψυχογιός.
25. Hadamard, J. (1995). *Η ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά.* Αθήνα: Κάτοπτρο.

26. Θεοφιλίδης, Χ. (1997). *Διαθεματική Προσέγγιση της Διδασκαλίας.* Αθήνα, Γρηγόρης.
27. Θωμαϊδης, Γ., Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.* Θεσσαλονίκη: Ζήση. 112-132
28. Καραγεώργος, Δ. (1994). «Μια προσέγγισης της διδασκαλίας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων». *Ευκλείδης Γ.* 11, 39, 1994
29. Καραγεώργος, Δ. (2000). *Το πρόβλημα και η επίλυσή του.* Αθήνα: Σαββάλας.
30. Κασσωτάκης, Μ. (1981). *Η αξιολόγηση της Επίδοσης των Μαθητών, Μέσα Μέθοδοι, Προβλήματα, Προοπτικές.* Αθήνα: Γρηγόρη.
31. Κασσωτάκης, Μ. , Φλούρης Γ. (1981). *Μάθηση και Διδασκαλία, Τόμος Α'*, Αθήνα: Μάθηση.
32. Κλαουδάτος, Ν. (1992). *Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών.
33. Kline, M.(1993). *Γιατί ο Γιάννης δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση.* Θεσσαλονίκη: Βάνιας
34. Kline, M.(1953). *Τα μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό*, Τόμοι Α' και Β', Αθήνα: Κώδικας.
35. *Μαθηματική Επιθεώρηση.* Περιοδική Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματική Εταιρείας.
36. Ματσαγγούρας, Η. (2002). *Η Διαθεματικότητα στη Σχολική Γνώση. Εννοιοκεντρική Αναπλαισίωση και Σχέδια Εργασίας.* Αθήνα: Γρηγόρης.
37. Μπαρκάτσας, Α.(2003). *Σύγχρονες διδακτικές και μεθοδολογικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά του 21ου αιώνα.* Χαλκίδα: Κωστόγιαννος
38. *ΟΔΗΓΟΣ ΣΧΕΔΙΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.* (2002). Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
39. Osserman, R. (1998). *Η ποίηση του Σύμπανος - Μια μαθηματική εξερεύνηση του Κόσμου*, Αθήνα: Κάτοπτρο.
40. Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*, Αθήνα: Καρδαμίτσα.
41. Ράπτης και Ράπτη. (1996). *Η Πληροφορική στην Εκπαίδευση.* Αθήνα: Παιδαγωγική Προσέγγιση.
42. Singh, S. (1998). *Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά.* Αθήνα: Τραυλός.
43. Struik, D. J. (1982). *Συνοπτική ιστορία Μαθηματικών*, Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.
44. Szabó, Ά., *Απαρχές των Ελληνικών Μαθηματικών.* (1973). Αθήνα: Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος.
45. Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.
46. Τσιμπουράκης, Δ. (1985). *Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα.* Αθήνα: Αυτοέκδοση.
47. Waerden (Van), B.L. (2000). *Η αφύπνιση της Επιστήμης.* Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστημιακές εκδόσεις.
48. Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Κουτσουμπός.
49. Υπουργείο Παιδείας. (1997). *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών.*
50. Φ.Ε.Κ. τεύχος Β' αρ. φύλλου 303/13-03-03.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Australian Education Council (1991). A national statement on mathematics for Australian schools. Melbourne: Curriculum Corporation.

2. Barkatsas, A. & Hunting, R. P. (1996). A review of recent research on cognitive, metacognitive and affective aspects of mathematical problem solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 4 (4), 7-30.

3. De Lange. (1999). *Franework for Classroom Assessement in Mathematics*. Freudenthal Institute & National Center for Improving Studen Learning and Achievement in Mathematics and Science.

4. Derville, L. (1981). *The use of psychology in teaching*. London

5. Ernst, P. (1989). The Knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15, 13-34.

6. Georgia Performance Standards (GPS) in Mathematics. Georgia Department in Education.

7. Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In Tymoczco (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston: Birkhauser, 9-28.

8. Hilbert, D. & Cohn-vossen, H. (1952). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea.

9. Lambert, D. (1999). L' incroyable efficacité des mathématiques. *La Recherche*, 316, Janvier 1999, 48-55.

10. MATH 5e, Collection Transmath, NATHAN, Edition 2001, Programme 1997.

11. McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A.Grows (Ed), *Handbook of Research in mathematics teaching and learning*. New York : MacMillan, 39-48.

12. Poincare, H. (1952). *Science and method*. New York: Dover Books.

13. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge Mass: Harvard University Press.

14. Webb, N. (1992). "Assessment of Student's Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory". In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, New York, McMillan, pp. 661-683.

ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Encyclopaedia Britannica (www.groups.dcs.st-and.ac.uk)

History of Mathematics (www.alep0.clarku.edu)
maintained by David E. Joyce (Clark University, USA)
Περιλαμβάνει χρονολόγιο των μαθηματικών.

Eric's Treasure Trove of Mathematics (www.mathworld.wolfram.com)
and Treasure Trove of Scientific Biography (www.treasure-troves.com)
maintained by Eric Weisstein (University of Virginia, USA)
Συνοπτική εγκυκλοπαίδεια των μαθηματικών και βιογραφίες.

Math Archives History of Mathematics (www.archives.math.utk.edu)
maintained by Earl Fife and Larry Hutch (University of Tennessee at Knoxville, USA)

The British Society for the History of Mathematics (www.dcs.warwick.ac.uk)
maintained by A Mann (University of Greenwich, UK)

Biographies of Women Mathematicians (www.agnesscott.edu)
maintained by Larry Riddle (Agnes Scott College, USA)

Earliest uses of mathematical symbols and words (www.members.aol.com)
maintained by Jeff Miller (New Port Richey, USA)
Ιστορικά στοιχεία για την εισαγωγή πρώιμου συμβολισμού.

The Mathematical Quotations Server (www.math.furman.edu)
maintained by Mark Woodard (Furman University, USA)
Ρήσεις μαθηματικών ή για τα μαθηματικά

WWW Virtual Library, History of Science Technology and Medicine
(www.asap.unimelb.edu.au)
maintained by Tim Sherratt (ASAP, Australia)
Γενική βάση δεδομένων γενικής ιστορίας της επιστήμης.

Ancient Mathematics (www.sunsite.unc.edu)
at the Library of Congress Vatican Exhibit
ενδιαφέρον τόπος για τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά

The Math Forum@Drexel and Math History resource collection (www.mathforum.org)
Εικονικό Κέντρο Μαθηματικής Εκπαίδευσης στο Διαδίκτυο.

The Museum of the History of Science (www.info.ox.ac.uk)
at the University of Oxford

The History Wing (www.elib.zib.de)
of the Mathematical Museum (www.geom.umn.de) at the Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB)

The Geometry Center
Με διαδραστικές δικτυακές εφαρμογές.

History of Maths lectures (www.math.tamu.edu)
by G Donald Allen of Texas A and M University, USA

ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Οι προδιαγραφές, με τις οποίες πραγματοποιήθηκε η συγγραφή αυτών των βιβλίων (μαθητή και διδάσκοντα), προϋποθέτουν την ύπαρξη των δύο βασικών όρων, ότι:

- Στη διάρκεια της διδασκαλίας θα επιδιώκεται να κυριαρχεί η προσωπική εργασία των μαθητών. Οι μαθητές δεν θα είναι παθητικοί δέκτες, αλλά πρέπει να είναι σε θέση να εξερευνούν καταστάσεις, να ανακαλύπτουν νέες γνώσεις και να προσπαθούν να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που απόκτησαν. Η διδασκαλία προχωρεί από το γνωστό στο άγνωστο, από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και από το απλό στο σύνθετο.
- Η προσεκτική προετοιμασία και η συνεχής εγρήγορση του διδάσκοντος αποτελούν απαραίτητα στοιχεία για μια επιτυχή διδασκαλία. Συγκεκριμένα πρέπει να έχει υπόψη του τα εξής:
    1. Να αποφεύγονται ασκήσεις που περιέχουν πολύπλοκες διαδικασίες υπολογισμών, επιβραδύνουν το ρυθμό της διδασκαλίας και δεν συμβάλλουν στην επίτευξη των σκοπών της διδασκαλίας. Η απαίτηση να απασχολούνται οι μαθητές με τέτοιες περιπτώσεις (δύσκολες ή εξεζητημένες ασκήσεις που υπερβαίνουν τις δυνατότητες τους) έχει ελάχιστη χρησιμότητα στην προαγωγή του μαθηματικού τρόπου σκέψης και αντιβαίνει στη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών. Αντίθετα απογοητεύει τους μαθητές, καλλιεργεί σ’ αυτούς ένα αίσθημα αποστροφής προς τα Μαθηματικά και τους δημιουργεί την εντύπωση ότι η κατανόηση των Μαθηματικών προϋποθέτει ειδικές και ιδιαίτερες ικανότητες.
    2. Ο μαθητής πρέπει να εξοικειωθεί στο να εκφράζεται με σαφήνεια, ακρίβεια και πληρότητα. Πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια για την ευχερέστερη, ανετότερη και ταχύτερη κίνηση της σκέψης. Με το συμβολισμό αποφεύγεται η χρήση λέξεων, των οποίων η σημασία έχει γίνει αμφίβολη και ρευστή από την κοινή χρήση. Δεν πρέπει όμως να γίνεται κατάχρηση συμβολισμού. Σε καμία περίπτωση ο συμβολισμός δεν πρέπει να ενισχύει τη «σπουδαιοφάνεια» και την τάση «τα εύκολα να γίνονται δύσκολα».
    3. Για την εισαγωγή νέων όρων, όπως π.χ. μειωτέος, διαιρετέος, εφαπτομένη, συμμετρία κτλ. είναι σκόπιμο να γίνεται αναφορά, όσο είναι δυνατό, και στην ετυμολογική σημασία τους, παράλληλα με τη λειτουργική σημασία που έχουν στα Μαθηματικά. Με αυτό τον τρόπο βοηθούμε το μαθητή στην κατανόηση, στη συγκράτηση και στην ορθή εννοιολογική χρήση των όρων.
    4. Είναι γνωστή η παιδαγωγική αξία των σχημάτων και γενικότερα των εποπτικών εικόνων, γι’ αυτό συνιστάται, όταν προσφέρεται η διδακτική ενότητα, η χρησιμοποίηση σχημάτων, πινάκων κτλ. γιατί έτσι γίνονται κατανοητές και ερμηνεύονται καλύτερα οι έννοιες που πραγματεύεται η ενότητα. Το ψαλίδι, το διαφανές χαρτί, τα γεωμετρικά όργανα και το τετραγωνισμένο χαρτί πρέπει να χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα της διδακτικής πορείας. Τα εποπτικά μέσα και οι κάθε είδους μετρήσεις και πειραματισμοί πρέπει να «μιλούν» περισσότερο από το διδάσκοντα και να είναι αναπόσπαστα στοιχεία της μαθητικής εργασίας.
    5. Τα παραδείγματα που περιέχονται στο διδακτικό βιβλίο, έχουν ως σκοπό την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση της ενότητας στην οποία αναφέρονται. Μπορούν να χρησιμοποιούνται ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων, αλλά **δεν εξετάζονται** ούτε ως θεωρία, ούτε ως ασκήσεις. Γενικότερα οι εφαρμογές και τα παραδείγματα δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη στις γραπτές εξετάσεις. Ο διδάσκων θα κρίνει κάθε φορά, πόσα και ποια απ’ αυτά θα χρησιμοποιήσει

για την επίτευξη του σκοπού αυτού. Είναι προφανές ότι ο διδάσκων, αν το κρίνει σκόπιμο, μπορεί να χρησιμοποιήσει και άλλα παραδείγματα, τα οποία ανταποκρίνονται περισσότερο στα ιδιαίτερα γνωρίσματα της τάξης του (περιοχή στην οποία βρίσκεται το σχολείο, κοινωνικό περιβάλλον, επίπεδο γνώσεων, ενδιαφέροντα μαθητών κτλ.).

6. Ο διδάσκων πρέπει κατά τη διδασκαλία μιας ενότητας να λαμβάνει υπόψη τις ατομικές διαφορές των μαθητών και τα ιδιαίτερα γνωρίσματα που μπορεί να έχει η τάξη του και κάθε φορά να επιλέγει τις κατάλληλες ασκήσεις τόσο για την κατανόηση της ενότητας, όσο και για την περαιτέρω εμβάθυνση της. Είναι επιθυμητό να μπορούν να λυθούν στην τάξη ή στο σπίτι όσο το δυνατόν περισσότερες από τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου. Σε καμιά περίπτωση, όμως, δεν πρέπει η επίτευξη του στόχου αυτού να αποβεί σε βάρος της ολοκλήρωσης της διδασκαλίας της διδακτέας ύλης.

Στο τέλος κάποιων ενοτήτων του διδακτικού βιβλίου υπάρχουν «δραστηριότητες για το σπίτι», που προορίζονται για μαθητές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και δυνατότητες στα Μαθηματικά, για το λόγο αυτό **δεν αποτελούν ύλη για εξέταση** στις προφορικές ή γραπτές εξετάσεις των μαθητών.

9. Η επεξεργασία των ασκήσεων πρέπει να στηρίζεται σε «γνωστές» προτάσεις. Τέτοιες είναι όσες περιέχονται στη θεωρία και στις αντίστοιχες εφαρμογές που περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο. Στο τέλος του διδακτικού βιβλίου υπάρχει παράρτημα με τις λύσεις των ασκήσεων, η χρήση των οποίων από τους μαθητές απαιτεί την ιδιαίτερη προσοχή του διδάσκοντα.

10. Σε ορισμένες ενότητες υπάρχουν **ιστορικά σημειώματα** που έχουν σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον και την αγάπη των μαθητών για τα Μαθηματικά και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία εξαρτάται από τις πρωτοβουλίες και ιδέες που θα αναπτύξουν οι διδάσκοντες.

Από τις αρχές της δεκαετίας του ‘80, σε διεθνές επίπεδο, η Μαθηματική Εκπαίδευση σταδιακά, αλλά συστηματικά, υφίσταται μεταβολές που εκτείνονται σε όλες τις συνιστώσες της, όπως για παράδειγμα στους σκοπούς, στους στόχους, στο περιεχόμενο, στις διδακτικές μεθόδους, στα είδη των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές, στη διάρθρωση του Προγράμματος Σπουδών και των διδακτικών βιβλίων, στις μεθόδους αξιολόγησης κτλ. Οι λόγοι που προκαλούν τις αλλαγές προκύπτουν τόσο από την εξέλιξη των σύγχρονων κοινωνιών και τον συνεχώς διευρυνόμενο ρόλο των νέων τεχνολογιών, όσο και από τα συμπεράσματα των ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών. Και στις δύο περιπτώσεις, οι συνέπειες συγκλίνουν στο να δούμε με διαφορετικό τρόπο το ρόλο και τη θέση του καθηγητή των Μαθηματικών μέσα στην τάξη, να δώσουμε ένα ευρύτερο περιεχόμενο στον όρο «Διδασκαλία των Μαθηματικών» και να γίνουμε πιο ακριβείς στο τι μπορεί να σημαίνει «Μαθαίνω Μαθηματικά».

Προκειμένου να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας ορίσουμε ως «**παραδοσιακό**» **διδακτικό μοντέλο το ακόλουθο:** Ο διδάσκων τα Μαθηματικά αρχίζει τη διδασκαλία συνήθως με την παρουσίαση μιας θεωρίας, ακολουθούν κάποια παραδείγματα - εφαρμογές για την εμπέδωση της θεωρίας και στη συνέχεια ασκήσεις και προβλήματα για περαιτέρω εξάσκηση. Το κέντρο βάρους εστιάζεται στην απόκτηση εκείνων ακριβώς των δεξιοτήτων – τεχνικών που παρουσιάζει ο δάσκαλος στην τάξη και στην ταχύτητα και την ακρίβεια των απαντήσεων. Επομένως, η ευχέρεια στις τεχνικές αυτές εκφράζει το αν οι μαθητές έχουν μάθει τα Μαθηματικά ή όχι. Στο μοντέλο αυτό η γνώση είναι δεδομένη και η κατανόησή της είναι προσωπική υπόθεση κάθε μαθητή. Το μόνο που μπορεί να κάνει ο μαθητής είναι να τη μάθει. Η Λύση μιας Άσκησης ή ενός Μαθηματικού Προβλήματος ή η αποστήθιση της απόδειξης ενός θεωρήματος, καθίσταται η ουσία της Μαθηματικής γνώσης και αποτελεί, στο μοντέλο αυτό, κριτήριο μάθησης: «Σου διδάσκω για παράδειγμα έναν αλγόριθμο και μετά, προκειμένου να διαπιστώσω αν τον έμαθες, θα πρέπει να είσαι ικανός να λύσεις μερικές ή και όλες τις ασκήσεις και τα προβλήματα που βρίσκονται στο τέλος κάθε ενότητας ή κεφαλαίου». Η διδασκαλία των μαθηματικών είναι τελείως απομακρυσμένη από την πραγματικότητα και τις ανθρώπινες ανάγκες, κάθε έννοια «ωφελιμότητας» υποβαθμίζεται, ενώ η αυστηρότητα και η ακρίβεια της μαθηματικής επιστήμης αποτελούν το πρίσμα μέσα από τα, οποίο διαμορφώνονται τα σχολικά μαθηματικά. Επειδή πολλές έρευνες έχουν αναδείξει τα σημαντικά προβλήματα που παρουσιάζει το «παραδοσιακό» διδακτικό μοντέλο, τα τελευταία χρόνια αναπτύχθηκαν μια σειρά από διαφορετικές αντιλήψεις για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο κέντρο των **σύγχρονων αντιλήψεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών** βρίσκεται η παραδοχή ότι:

- Η γνώση δε «μεταφέρεται» από το δάσκαλο στο μαθητή. **Αντίθετα, η γνώση και ο μαθητής, είναι έννοιες αλληλοσυνδεόμενες: Ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμηση - ανάπτυξη της γνώσης του (Η υπόθεση της κατασκευής της γνώσης).**

Με βάση αυτή την αρχή ο κάθε μαθητής έχει το δικό του προσωπικό τρόπο πρόσβασης στη γνώση και η μάθηση εξαρτάται από την ήδη υπάρχουσα γνώση. Επομένως, ο διδάσκων πρέπει να λάβει υπόψη του ότι θα υπάρχουν στην τάξη του μαθητές που δεν έχουν κατανοήσει τις προηγούμενες έννοιες ή έχουν αντιληφθεί με λάθος τρόπο τις προηγούμενες γνώσεις. Και στις δύο περιπτώσεις θα συναντήσει δυσκολίες στην εξέλιξη του νέου μαθήματος. Υπάρχει μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στο προσωπικό νόημα, που οικοδομεί ο κάθε μαθητής, και στην κοινωνική διάσταση της γνώσης στα πλαίσια της σχολικής τάξης. Τα νοήματα αυτά συζητούνται μέσα στην τάξη για να ομογενοποιηθούν και να γίνουν συμβατά και συνεπή με ό,τι δέχεται η μαθηματική κοινότητα (Η υπόθεση της αλληλεπίδρασης ή διάδρασης). Δηλαδή η σχολική τάξη να λειτουργεί ως μικρή «μαθηματική κοινότητα -εργαστήριο». Ο διδάσκων θα πρέπει να δει με διαφορετικό τρόπο τη θέση και το ρόλο του μέσα στην τάξη. Για παράδειγμα, θα πρέπει να οργανώνει την τάξη έτσι, ώστε μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες να δώσει τη δυνατότητα και την ευκαιρία στους μαθητές του να οικοδομήσουν τη γνώση, και παράλληλα να ελαττώσει σημαντικά το χρόνο που αφιερώνει για την παρουσίαση, από τον ίδιο, θεμάτων και εννοιών. Η ουσιαστική συνθήκη για την πραγματοποίηση μιας δραστηριότητας έγκειται στη δυνατότητα του δασκάλου να στρέψει τους μαθητές του σε διερευνητικές διαδικασίες και όχι να δώσει ο ίδιος τις απαντήσεις. Δηλαδή να ενθαρρύνει τους μαθητές στην υιοθέτηση «ενεργητικών μεθόδων» μάθησης. Βασικό εργαλείο προς την κατεύθυνση αυτή αποτελούν οι, μαθησιακές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ερευνητικές εργασίες και εργασία σε μικρές ομάδες μαθητών. Τέτοιες δραστηριότητες μπορεί να είναι προσεκτικά σχεδιασμένα προβλήματα που να οδηγούν τους μαθητές να κάνουν υποθέσεις και εικασίες, να ελέγχουν τις υποθέσεις τους, να παρατηρούν και να αναπτύσσουν ένα μοντέλο, να ακολουθούν προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους, να «μεταφράζουν» ένα μοντέλο από ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε ένα άλλο, για παράδειγμα από γλωσσική περιγραφή σε αλγεβρικό τύπο, από αλγεβρικό τύπο σε γραφική παράσταση, από πίνακα τιμών σε αλγεβρικό τύπο κτλ. Το τελικό ζητούμενο από τις παραπάνω διαδικασίες είναι η ανάπτυξη μιας ενεργητικής και ερευνητικής στάσης των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά.

- **Το Πρόβλημα είναι «πηγή» νοήματος της μαθηματικής γνώσης.**

Τα αποτελέσματα των νοητικών διεργασιών συνιστούν γνώση, μόνον όταν αποδειχθούν επαρκή και αξιόπιστα στην επίλυση προβλημάτων. (Η επιστημολογική υπόθεση). Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, το πεδίο «δοκιμασίας» της γνώσης ενός μαθητή είναι η επίλυση προβλημάτων και όχι η εξέταση αλγορίθμων, κανόνων και τύπων .Γενικότερα, ο διδάσκων θα πρέπει να έχει υπόψη του ότι με τα προβλήματα:

- Δικαιολογούμε την ίδια τη διαδικασία της διδασκαλίας, αποκαλύπτοντας την αξία και τη χρησιμότητα των Μαθηματικών .
- Δίνουμε κίνητρα στους μαθητές να ενδιαφερθούν για τα Μαθηματικά.
- Εισάγουμε καλύτερα καινούριες έννοιες ή διδακτικές ενότητες. Βοηθούμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις γνώσεις τους με πιο αποτελεσματικό τρόπο.
- Ελέγχουμε το βαθμό κατανόησης των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Ο σχεδιασμός μιας διδασκαλίας, που ως βασικό εργαλείο χρησιμοποιεί την επίλυση προβλήματος μπορεί να έχει τρία μέρη.

<u>Στο πρώτο μέρος</u> δίνουμε ένα πρόβλημα, η επίλυση του οποίου θα οδηγήσει στην αναγκαιότητα της εισαγωγής της νέας μαθηματικής έννοιας. Λέγοντας «επίλυση», εννοούμε ότι οι μαθητές αρχικά θα το προσεγγίσουν διαισθητικά, προκειμένου να αναπτύξουν εικασίες ή υποθέσεις τις οποίες στη συνέχεια θα επιχειρήσουν να τις ελέγξουν επίσης διαισθητικά – εμπειρικά. Η ανάπτυξη των εικασιών και η προσπάθεια για τον έλεγχό τους αποτελούν βασικά χαρακτηριστικά ενεργητικής και ερευνητικής στάση. Μόνον όταν οι μαθητές έχουν βρει τα δικά τους αποτελέσματα και έχουν αναπτύξει τις εικασίες τους, είναι δυνατό να αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα της γενίκευσης και της απόδειξης. Η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί σημαντική, από τους μαθητές, όταν θα τους δημιουργηθεί η ανάγκη να πειστούν για πράγματα που δεν είναι βέβαιοι, και όχι για γεγονότα που κανείς δεν επιτρέπεται να έχει αμφιβολίες.

<u>Στο δεύτερο μέρος</u> γίνεται η μετάβαση από τις εμπειρικές - διαισθητικές αντιλήψεις σε «αποδεικτικές» μεθόδους, χωρίς η «απόδειξη» να παραπέμπει απαραίτητα στις γνωστές τυπικές μαθηματικές μεθόδους. Εξαρτάται από το επίπεδο των μαθητών που αναφερόμαστε και το στόχο που έχουμε. Σε κάθε περίπτωση, σκοπός είναι να αποσπαστεί η σκέψη του μαθητή από τα πλαίσια του συγκεκριμένου προβλήματος και να μπει στη μαθηματική δομή του θέματος που διαπραγματεύεται.

<u>Στο τρίτο μέρος</u> θεωρείται γνωστή η έννοια που διδάχθηκε και η οποία χρησιμοποιείται για να λυθούν προβλήματα και εφαρμογές. Δηλαδή, διευρύνονται οι εμπειρίες των μαθητών στο πεδίο εφαρμογής της έννοιας.

Με τον όρο «πρόβλημα» δεν εννοούμε μόνον τα γνωστά προβλήματα αλλά και τα λεγόμενα «ανοικτά προβλήματα». Γενικά, θα ονομάσουμε ανοικτό το πρόβλημα που μπορεί να ερμηνευτεί με πολλούς τρόπους και επομένως δέχεται διαφορετικές λύσεις. Το γεγονός αυτό αναγκάζει το μαθητή να πάρει πρωτοβουλίες κατά τη διάρκεια της επίλυσης του. Για παράδειγμα, το πρόβλημα «Να σχεδιάσετε μια εκδρομή του σχολείου σας με λεωφορεία» είναι ανοικτό. Αντίθετα, το πρόβλημα «Να βρείτε πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για να μετακινηθούν 300 μαθητές ενός σχολείου, όταν το κάθε λεωφορείο χωράει 50 μαθητές», είναι ένα κλειστό τυπικό σχολικό πρόβλημα. Μια διαφορετική διατύπωση είναι αρκετή για να εισάγει ένα βαθμό πρωτοβουλίας στους μαθητές. Το να δίνουμε μερικές φορές, στους μαθητές μας ανοικτές δραστηριότητες αντί για ασκήσεις των δύο ή τριών λεπτών, είναι ένα βήμα προς τη μεταφορά της υπευθυνότητας της διαδικασίας της μάθησης από το δάσκαλο στο μαθητή. Ποιες είναι οι συνέπειες των προτάσεων μας στην τάξη; Θα πρέπει να τονίσουμε ότι οι προτάσεις αυτές αποτελούν εφαρμογή των **σύγχρονων αντιλήψεων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών** και έχουν ως στόχο τη μετάβαση από το παραδοσιακό δασκαλοκεντρικό μοντέλο σε πιο σύγχρονα μαθητοκεντρικά μοντέλα. Εξάλλου, θεωρούμε βέβαιο ότι για πολλούς συναδέλφους οι προτάσεις αυτές δεν είναι άγνωστες, αντίθετα αποτελούν τμήμα της διδακτικής πρακτικής τους. Το νέο στοιχείο που προσφέρει το βιβλίο αυτό είναι η προσπάθεια για περισσότερο οργανωμένη και συστηματική παρουσίαση των νέων διδακτικών προτάσεων. Όμως είναι κατανοητό ότι η συστηματική εισαγωγή τους στην καθημερινή διδακτική πρακτική απαιτεί μια επίπονη και μακρόχρονη πορεία, η οποία θα πρέπει να υποστηριχθεί από ένα μεθοδικό πρόγραμμα επιμόρφωσης.

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Στην πρώτη σελίδα κάθε κεφαλαίου είναι καταγραμμένοι οι διδακτικοί στόχοι για κάθε ενότητα χωριστά και στην τελευταία υπάρχει ανακεφαλαίωση της θεωρίας, όπου αυτό θεωρήθηκε σκόπιμο. Επίσης στο τέλος των περισσοτέρων κεφαλαίων υπάρχουν επαναληπτικές ασκήσεις αυτοαξιολόγησης. Κάθε ενότητα αποτελείται από τέσσερα διακριτά μέλη:

- **Εισαγωγικές Δραστηριότητες για τη τάξη**, που είναι άλυτα «ανοικτά προβλήματα» (ορισμένες ακολουθούνται με υποδείξεις, με τον τίτλο «σκεφτόμαστε»), οι οποίες αποτελούν το έναυσμα για προβληματισμό και συζήτηση με τους μαθητές και με σκοπό να εξάγουν οι μαθητές, αν είναι δυνατόν μόνοι τους, με την διακριτική καθοδήγηση του διδάσκοντος, τα συμπεράσματά τους υπό μορφή ορισμών και κανόνων.
- **Θεωρία** με συμπεράσματα, ορισμούς και κανόνες (σε ανοικτό μπλε φόντο), με τίτλο «Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε» ή απλώς «Μαθαίνουμε», όταν δεν αφορά επαναληπτική ύλη.
- **Παραδείγματα – Εφαρμογές**, λυμένα υποδειγματικά, ως πρότυπα για τις ασκήσεις και
- **Ασκήσεις** οι οποίες παρατίθενται κατά αύξουσα σειρά δυσκολίας και αντιστοιχούν, ως επί το πλείστον, στη διδακτέα ύλη της συγκεκριμένης ενότητας.

Σε ορισμένες ενότητες της ύλης του διδακτικού βιβλίου περιλαμβάνονται, **δραστηριότητες για το σπίτι**, που είναι προαιρετικές και αφορούν τους μαθητές εκείνους που θα δείξουν λίγο περισσότερο ενδιαφέρον για εμβάθυνση στα διαπραγματευόμενα θέματα. Επιπλέον, υπάρχουν και πέντε **Σχέδια Εργασίας**, για συλλογική διερευνητική δουλειά των μαθητών, με διαθεματικό περιεχόμενο. Τέλος, στο διδακτικό βιβλίο, περιέχονται αρκετά **ιστορικά σημειώματα και αναδρομές**, με σκοπό να διεγείρουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους πληροφορήσουν για την ιστορική πορεία της μαθηματικής σκέψης. Στη συνέχεια του παρόντος, παρατίθενται:

- Επεξηγήσεις, για τον τρόπο που προτείνεται στο διδάσκοντα να ακολουθήσει στην ανάπτυξή των δραστηριοτήτων.
- Οδηγίες και συγκεκριμένη βοήθεια σχετικά με τους σκοπούς, τη βιβλιογραφία και τη μεθοδολογία που είναι σκόπιμο να ακολουθηθεί, από το διδάσκοντα και τους μαθητές, για την επιτυχή και αποτελεσματική ανάπτυξή των προτεινομένων Διαθεματικών Σχεδίων Εργασίας.
- Συγκεκριμένη αναφορά για το διδακτικό σκοπό των προτεινόμενων παραδειγμάτων – εφαρμογών καθώς και των ασκήσεων του διδακτικού βιβλίου.
- Πρόσθετη διδακτική ύλη, η χρήση της οποίας είναι στη κρίση του διδάσκοντα.

Η δομή και το περιεχόμενο του βιβλίου για το μαθητή φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Μέρος	α/α	Κεφάλαιο	Ώρες	Ενότητες	Δραστηριότητες (1)	(2)	(3)	Εφαρμογές	Ασκήσεις (4)	(5)	Σελίδες
Α΄ Αριθμητική – Άλγεβρα	1ο	Οι φυσικοί αριθμοί	8	5	10	(4)	+ 2	13	51	+23	24
	2ο	Τα κλάσματα	10	6	11	(7)	+ 5	21	59		22
	3ο	Δεκαδικοί αριθμοί	9	5	9		+ 1	12	46	+21	16
	4ο	Εξισώσεις και προβλήματα	5	3	5			6	28		8
	5ο	Ποσοστά	3	2	2	(1)	+ 1	6	18	+13	6
	6ο	Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	10	6	12		+ 4	8	41	+16	28
	7ο	Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί	15	10	13	(3)	+ 2	25	67	+20	34
Β΄ Γεωμετρία	1ο	Βασικές γεωμετρικές έννοιες	23	13	19	(1)	+12	37	92	+31	52
	2ο	Συμμετρία	10	6	6	(2)	+ 4	26	28		18
	3ο	Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια	8	4	7	(1)	+ 2	11	29	+10	16
Γ΄ Παράρτημα		Υποδείξεις και Απαντήσεις για τις ασκήσεις του βιβλίου									16
		Σύνολα:	101	60	94	(19)	+33	165	459	+134	240

Υπόμνημα: *(1) Δραστηριότητες χωρίς ανάπτυξη, (2) Με υπόδειξη ανάπτυξης, (3) Δραστηριότητες για το σπίτι, 4) Ασκήσεις και Προβλήματα, (5) Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.*

Κεφάλαιο Α.1. – Οι φυσικοί αριθμοί

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 8 διδακτικές ώρες
Το περιεχόμενο του κεφαλαίου έχει επαναληπτικό χαρακτήρα.

Α.1.1. Οι φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:

- Η $1^{η}$, της σύγκρισης και της διάταξης των φυσικών αριθμών, καθώς και της χρήσης των συμβόλων $=, >, <$.[Υπόδειξη: Η επιλογή και η κατασκευή των αριθμών πρέπει να είναι των μαθητών. Η εναλλαγή των ψηφίων των αριθμών που αλλάζει και την τάξη μεγέθους, μπορεί να δώσει τη δυνατότητα να μπουν αυτοί σε αύξουσα ή φθίνουσα σειρά].
- Η $2^{η}$, του τρόπου αντιστοίχισης των φυσικών αριθμών σε σημεία ενός άξονα. [Υπόδειξη: Σκοπός είναι να κατανοηθεί ότι η επιλογή της αρχής των μετρήσεων και της μονάδας μέτρησης είναι μεν αυθαίρετη διαδικασία, αλλά αναγκαία και ικανή για την αντιστοίχιση όλων των φυσικών αριθμών στα σημεία του άξονα].
- Η $3^{η}$, της έννοιας και της χρήσης της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό:
να παρουσιάσει το μηχανισμό της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών.

Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

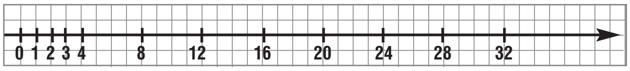
(α) η $1^{η}$ έως και η $3^{η}$ έχουν σκοπό την εμπέδωση των εννοιών του φυσικού αριθμού και της αρίθμησης,
(β) η $4^{η}$ και η $5^{η}$ αφορούν την έννοια της διάταξης των φυσικών αριθμών,
(γ) η $6^{η}$ την αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών με σημεία ενός άξονα,
(δ) η $7^{η}$ είναι άσκηση σωστού ή λάθους και
(ε) η $8^{η}$ και η $9^{η}$, την στρογγυλοποίηση των φυσικών αριθμών.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

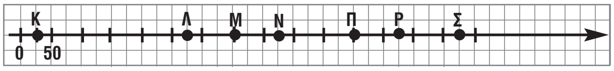
1. Ο πληθυσμός της Γης τον Ιούλιο του 2002 ήταν 6233529144 κάτοικοι. Τι δηλώνουν τα ψηφία 3 και 4 στις δύο διαφορετικές θέσεις που βρίσκονται;
2. Γράψε τους άρτιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 720 και 737.
3. Συμπλήρωσε τα κενά: $8 \cdot ...... + 9 \cdot ...... + 0 \cdot ...... + 1 \cdot ...... + 5 \cdot ...... = 89015$
4. Βρες την τάξη του τονισμένου ψηφίου σε κάθε έναν από τους παρακάτω αριθμούς: (α) 75831, (β) 313, (γ) 4025, (δ) 978934, (ε) 3519621, (στ) 85888900.
5. Γράψε όλους τους διψήφιους αριθμούς των οποίων ένα τουλάχιστον από τα ψηφία του είναι το 8.
6. Δίνεται ο αριθμός 671876, να τον συγκρίνεις με τον αριθμό που θα προκύψει, αν εναλλάξεις τα ψηφία των χιλιάδων με αυτά των μονάδων. Ισχύει πάντα το αποτέλεσμα;
7. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός και ποιος ο μικρότερος που μπορεί να σχηματιστεί μόνον με τα ψηφία 0, 5, 8 αν κάθε ψηφίο χρησιμοποιηθεί μόνο μία φορά;
8. Συμπλήρωσε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο ($<$, $=$, $>$): (α) 56 ... 91, (β) 30875 ... 31863, (γ) 209 ... 209, (δ) 1209 ... 12009.
9. Στον πίνακα που ακολουθεί να αντιστοιχίσεις κάθε αριθμό της $2^{ης}$ στήλης με έναν αριθμό της 1ης και της $3^{ης}$ στήλης.

Προηγούμενος	Φυσικός Αριθμός	Επόμενος
4	0	78
76	53	6
δεν έχει	77	54
52	5	1

10. Τοποθέτησε σε άξονα με κατάλληλη μονάδα τους αριθμού: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 και 32.



11. Βρες τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα σημεία: Κ, Λ, Μ, Ν, Π, Ρ, Σ του άξονα του σχήματος.



12. Στρογγυλοποίησε στην επόμενη δεκάδα όσους από τους παρακάτω φυσικούς επιτρέπεται: (α) Απόσταση 138 km, (β) Ταχ. Κώδ. 15342, (γ) Βάρος 20501 tn, (δ) Αριθ. τηλ. 6016795, (ε) Τηλεφωνικός κωδικός χώρας 0044, (στ) Αριθμός ταυτότητας Κ 325678, (ζ) Αριθμός πιστωτικής κάρτας 6789500052, (η) Ταχύτητα 143 Km/s, (θ) ΄Υψος όρους 1.123 m, (ι) Βάρος ασθενούς 103 Kg και (ια) Αντοχή μηχανήματος αξονικής τομογραφίας 110 Kg.
13. Αν στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 32.□□5 στην πλησιέστερη δεκάδα δίνει τον αριθμό 33.000 και ο αριθμός 2□.□86 στην πλησιέστερη χιλιάδα γίνεται 29.000. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:
- Η 1η, των εννοιών και των ιδιοτήτων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού
- Η 2η, της έννοιας της αφαίρεσης.
- Η 3η, της έννοιας και της χρησιμότητας της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, με τη βοήθεια κατάλληλης γεωμετρικής απεικόνισης [Υπόδειξη: Χρωμάτισε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν μία πλευρά με το ίδιο μήκος].

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:
Το 1ο να δείξει τον κανόνα του υπολογισμού του γινομένου φυσικού αριθμού με τις δυνάμεις του 10, το 2ο αναδεικνύει τη χρησιμότητα της επιμεριστικής ιδιότητας στην εκτέλεση των πράξεων και το 3ο να ερμηνεύσει, με γεωμετρικό τρόπο, την επιμεριστική ιδιότητα.

Οι δώδεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:
(α) η 1η έως και η 3η είναι ασκήσεις συμπλήρωσης κενού, (β) η 4η και η 5η είναι ασκήσεις αντιστοίχισης, που αναφέρονται στις ιδιότητες της πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών, (γ) η 6η και η 7η αναφέρονται στη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας στις πράξεις και τους υπολογισμούς και (δ) η 8η έως και η 12η είναι απλά προβλήματα προσθαφαίρεσης.

Το προτεινόμενο ιστορικό σημείωμα: δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε αφενός στη νίκη της ευφυΐας ενάντια στην επίμοχθη μηχανική εργασία και αφετέρου ως υπόδειγμα αυτού που οι μαθηματικοί ονομάζουν “κομψή” λύση ενός προβλήματος. Με αφορμή αυτή την ιστορία μπορείτε να υπογραμμίσετε ότι στα μαθηματικά (και όχι μόνο) εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο φθάνουμε στην απάντηση και όχι αυτή η ίδια η απάντηση.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:
1. Βρες το άθροισμα: 55+37+9+45+11+163 χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της πρόσθεσης.
2. Στην πρόσθεση που ακολουθεί να βρεθούν τα ψηφία που αντιπροσωπεύονται από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ και Ε.

$$\begin{array}{r} \text{ΑΑΒ} \\ +\text{ΔΑΓ} \\ \hline \text{Α736} \end{array} \quad \text{Λύση:} \quad \begin{array}{r} 5543 \\ +253 \\ \hline 5796 \end{array}$$

3. Ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από τον 589 για να βρούμε διαφορά 132;

4. Συμπλήρωσε τις τρεις πρώτες στήλες του πίνακα με διάφορους μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς και υπολόγισε τα αθροίσματα της $4^{ης}$ και $5^{ης}$ στήλης.
Τι παρατηρείς;

α	β	γ	(α + β) + γ	α + (β + γ)

5. Να γίνουν οι πράξεις: 37–(12–5), 37–12+5, (37–12)+5.

6. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην αντίστοιχη θέση.

		Σωστό	Λάθος
(α)	Η πράξη 193+128–256 δίνει αποτέλεσμα 65.	☐	☐
(β)	Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι περιττός.	☐	☐
(γ)	Η πράξη 60 –(18–2) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την πράξη 60–18– 2	☐	☐
(δ)	Αν ο μειωτέος είναι 325 και ο αφαιρετέος μικρότερος του 100 η διαφορά θα είναι αριθμός μεγαλύτερος του 224.	☐	☐
(ε)	Ο Γιώργος έγραψε: 5 +3 · 4 = 8 · 4 = 32.	☐	☐

7. Να συμπληρωθούν τα κενά:

52	–	□□	= 18
–		–	
37	–	25	= □□
= □□		= □□	

8. Η Μαρίνα υπολόγισε το γινόμενο: 3•5•22•51 ως εξής:
3•5•22•51 = 15•66•51 = 990•51 = 50.490.
(α) Πώς θα ελέγξουμε το αποτέλεσμα;
(β) Υπάρχει λάθος και σε ποιο σημείο;

9. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) 14•11, (β) 25•19.

10. Συμπλήρωσε στον πίνακα τις τρεις πρώτες στήλες με διάφορους μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς και να υπολογίσεις τα γινόμενα της τέταρτης και πέμπτης στήλης.
Τι παρατηρείς;

α	β	γ	(α · β) · γ	α · (β · γ)

11. Εκτέλεσε με δύο τρόπους τις πράξεις: (13 + 7)•(12 + 8).

12. Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις: (α) 237•7+237•3 και (β) 67•108–67•8.

13. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) 12•101, (β) 25•110, (γ) 52•99, (δ) 12•999, (ε) 63•99.

Α.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:</u>
- Η 1^{η}, της έννοιας του τετραγώνου και του κύβου ενός φυσικού αριθμού ως δύναμης, με τη βοήθεια της γεωμετρικής απεικόνισης.
- Η 2^{η}, της σειράς προτεραιότητας των πράξεων [<u>Υπόδειξη</u>: Το σωστό αποτέλεσμα της πράξης, που είναι το 600, είναι σκόπιμο να προκύψει σταδιακά για τους μαθητές, μέσα από την εμπειρία της εντόπισης των λαθών που συνήθως κάνουν κατά την εκτέλεση των πράξεων, όταν δεν λαμβάνουν υπόψη την προτεραιότητα των πράξεων].

<u>Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:</u> να παρουσιάσουν: το 1^{o} τις δυνάμεις του 10, το 2^{o} την πρακτική εφαρμογή της προτεραιότητας των πράξεων και το 3^{o} το μηχανισμό εύρεσης του αναπτύγματος ενός φυσικού αριθμού, με τη χρήση των δυνάμεων του 10.

<u>Οι δώδεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:</u>
(α) η 1^{η} είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού, (β) η 2^{η} έως και η 9^{η} είναι ασκήσεις που έχουν σκοπό το χειρισμό των δυνάμεων φυσικών αριθμών, (γ) η 10^{η} είναι άσκηση που αφορά τα αναπτύγματα των φυσικών αριθμών, με χρήση των δυνάμεων του 10 και (δ) η 11^{η} και η 12^{η} είναι ασκήσεις αντιστοίχισης.

<u>Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι</u> από τις οποίες η 1^{η} αφορά αντιστοίχιση πράξεων, με λύση: $(1+2)\cdot3+4 = 13$, $1\cdot2+3\cdot4 = 14$, $1+2+3\cdot4 = 15$, $(1+2)\cdot3\cdot4 = 36$ και η 2^{η}, τη συμπλήρωση κενών σε τέσσερα μαγικά τετράγωνα, με τη διπλανή λύση:

20	19	18
18	17	16
16	15	14

26	24	22
27	25	23
28	26	24

1	3	9
2	6	18
4	12	36

18	36	72
6	12	24
2	4	8

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:</u>

(α) <u>Ενδεικτικοί στόχοι:</u>
– Η παρακολούθηση της εξέλιξης των συμβόλων και των συστημάτων αρίθμησης.
– Η σύγκριση των τρόπων αρίθμησης και η αναφορά στο εκάστοτε ιστορικό, κοινωνικό, γεωγραφικό κλπ πλαίσιο

(β) <u>Ενδεικτικές πηγές:</u>
– Boyer, C.B., Merzbach, U.C. (1997). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.
– Bunt, L.N.H., Jones Ph.S., Bedient, J.D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικός.
– Heath T.L. *Ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών*, 2 τ. Αθήνα.
– Loria, G. *Ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, τ. 1- 4.
– Mankiewicz, R. (2002). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.
– Neugebauer, O. (1986). *Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα της Εθνικής Τραπέζης.
– Struik, D.J. (1982). *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*. Αθήνα: Ζαχαρόπουλος.
– Van der Waerden, B. (2000). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Παν/μίου Κρήτης.

(γ) <u>Μαθήματα σύνδεσης:</u> Μαθηματικά, Ιστορία, Γεωγραφία κ.ά.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Γράψε σε αναπτυγμένη μορφή με βάση το 10 τον αριθμό 2591.
2. Ποιος είναι ο αριθμός $5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 4$;
3. Με τι ισούται η δύναμη 10^ν;
4. Γράψε με μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:
   (α) $5 \cdot 5 \cdot 5$, (β) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, (γ) $x \cdot x$, (δ) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \beta \cdot \beta$.
5. Ποια δύναμη του 10 είναι οι αριθμοί: (α) 1.000.000 και (β) 1.000;
6. Να γίνουν οι πράξεις: (α) $2 \cdot 5^2 + 2^3 - (4+2)^2$, (β) $3^2+3^3+2^3+2^4$, (γ) $(13-2)^4 + 5 \cdot 3^2$.
7. Βρες τις τιμές των παραστάσεων: $(5+2)^2$ και 5^2+2^2. Τι παρατηρείς;

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση: της έννοιας της διαιρετότητας.

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο, τον τρόπο ελέγχου της ταυτότητας της Ευκλείδειας Διαίρεσης και
- το 2ο, την εφαρμογή της σε ένα αριθμητικό πρόβλημα.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα: αφορούν όλες την Ευκλείδεια Διαίρεση.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Τέσσερις φίλοι παίζουν παιχνίδι με τραπουλόχαρτα, που ξεκινάει με τη μοιρασιά των 52 χαρτιών στους 4 παίκτες. Πόσα τραπουλόχαρτα θα έχει ο καθένας στο χέρι του; Φεύγει ο ένας από αυτούς και αποφασίζουν οι υπόλοιποι να παίξουν ένα άλλο παιχνίδι που απαιτεί να συμπεριλάβουν στην τράπουλα και τους 2 μπαλαντέρ. Αν κάνουν πάλι τη μοιρασιά της τράπουλας θα φθάσουν τα τραπουλόχαρτα ή θα περισσέψουν κάποια; Αν δεν έφευγε ο τέταρτος θα μπορούσαν να παίξουν το δεύτερο παιχνίδι ή θα περίσσευαν τραπουλόχαρτα στη μοιρασιά;

2. Να εκτελεστούν οι ακόλουθες διαιρέσεις και να γραφούν σύμφωνα με την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης: (α) 59:6 και (β) 127:34.

3. Ποιες από τις ισότητες : (α) $127 = 33 \cdot 3 + 28$, (β) $762 = 38 \cdot 19 + 40$, (γ) $1465 = 41 \cdot 35 + 30$ εκφράζουν ευκλείδειες διαιρέσεις;

4. Ποιος αριθμός όταν διαιρεθεί με τον 18 δίνει πηλίκο 21 και υπόλοιπο 7;

5. Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν ευκλείδειες διαιρέσεις: (α) $80=9 \cdot 8+8$, (β) $65=7 \cdot 9+2$, (γ) $35=5 \cdot 6+5$, (δ) $44=4 \cdot 8+12$, (ε) $60=8 \cdot 7+4$, (στ) $88=7 \cdot 11+11$

6. Ποιοι αριθμοί όταν διαιρούνται με το 9 δίνουν πηλίκο 8;

7. Ποιο είναι το λάθος που έχουν οι παρακάτω διαιρέσεις;

   (α) $\begin{array}{r|l} 60 & \underline{7\;} \\ \underline{-63} & 9 \\ 3 & \end{array}$ (β) $\begin{array}{r|l} 65 & \underline{8\;} \\ 9 & 7 \end{array}$ (γ) $\begin{array}{r|l} 122 & \underline{4\;} \\ \underline{-12} & 3 \\ 02 & \end{array}$ (δ) $\begin{array}{r|l} 148 & \underline{13} \\ \underline{-117} & 92 \\ 31 & \\ \underline{-26} & \\ 5 & \end{array}$

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας – Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση: της αναγκαιότητας χρήσης του ΜΚΔ μέσα από καθημερινά προβλήματα
[Υπόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι το 10 διαιρεί και τους τρεις αριθμούς (150, 90, 60) στη συνέχεια να βρουν όλους τους αριθμούς που διαιρούν αυτούς τους τρεις αριθμούς και τέλος να εντοπίσουν τον μεγαλύτερο από αυτούς τους διαιρέτες].

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα έχουν σκοπό: να παρουσιάσουν, το $1^{ο}$, την αναγκαιότητα χρήσης του ΕΚΠ στα καθημερινά προβλήματα με την εύρεση και καταγραφή των κοινών πολλαπλασίων δύο αριθμών, το $2^{ο}$, τον τρόπο εύρεσης του ΕΚΠ και του ΜΚΔ με τη μέθοδο της ανάλυσής τους σε γινόμενα πρώτων παραγόντων, το $3^{ο}$, την έννοια της διαιρετότητας και το $4^{ο}$, τη λειτουργία και χρησιμότητα του «Κόσκινου του Ερατοσθένη» για την εύρεση των πρώτων φυσικών αριθμών από το 1 έως το 100 (Ακολουθεί ιστορική αναδρομή σχετική με τον Ερατοσθένη).

Οι δώδεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε έξι κατηγορίες:
(α) η $1^{η}$ και η $2^{η}$ είναι ασκήσεις συμπλήρωσης κενού,
(β) η $3^{η}$ και η $7^{η}$ είναι ασκήσεις πολλαπλών επιλογών που αφορούν την εύρεση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ αντίστοιχα,
(γ) η $4^{η}$ αφορά την εύρεση του ΕΚΠ και οι $5^{η}$ και $6^{η}$ του ΜΚΔ ,
(δ) η $9^{η}$ και η $10^{η}$ τους σύνθετους αριθμούς,
(ε) η $11^{η}$ αφορά τον έλεγχο της διαιρετότητας και
(στ) η $12^{η}$ αναφέρεται στην ανάλυση αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Συμπλήρωσε με τις κατάλληλες λέξεις τα κενά στην πρόταση που ακολουθεί: Για τον αριθμό 55 έχουμε ότι 55:5 = 11. Ο αριθμός 55 είναι ένα .... του αριθμού 5 και ο αριθμός 11 είναι .... του 55.
2. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος ή σύνθετος; Δικαιολόγησε την απάντησή σου και δώσε ένα κατάλληλο παράδειγμα.
3. Βρες όλους τους κοινούς διαιρέτες και τον ΜΚΔ των αριθμών (α) 6 και 9 και (β) 22 και 44.
4. Ανάλυσε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς: (α) 108 (β) 420.
5. Ποιο ψηφίο πρέπει να είναι το α, ώστε ο αριθμός 3859α να διαιρείται (α) με το 9 και (β) με το 2 και το 5;
6. Υπολόγισε το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 36 και 70.
7. Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης. Το πρώτο εκτελεί μια διαδρομή σε 18 min, το δεύτερο σε 24 min και το τρίτο σε 36 min. Αν στις 12 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο;
8. Η ανάλυση κάποιων αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έδωσε τα παρακάτω γινόμενα: (α) 2•3•3•5•5, (β) 2•3•5•5, (γ) 2•2•2•3•3•11, (δ) 1•3•11, (ε) 23•13. Ποιοι είναι οι αριθμοί αυτοί;
9. Ποιο ψηφίο πρέπει να τοποθετηθεί στην θέση του x, στον 32x1x, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι διαιρετός (α) δια 3 και (β) δια 9;
10. Ποιο είναι το κριτήριο ώστε ένας αριθμός να είναι διαιρετός δια του 6; Σύμφωνα με το κριτήριο που θα διατυπώσετε να εξετάσετε αν οι παρακάτω αριθμοί είναι διαιρετοί για 6: (α) 324, (β) 122, (γ) 222, (δ) 1521, (ε) 1152;

11. Βρες το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών: (α) 3,10, (β) 3,6,10, (γ) 16,12, (δ) 18,30, (ε) 54,18,27, (στ) 2,3,4,5. Σε κάθε περίπτωση να εκφράσεις τους αριθμούς ως γινόμενο πρώτων αριθμών, χρησιμοποιώντας και δυνάμεις.
12. Βρες τον ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών: (α) 24,36, (β) 16,40, (γ) 9,32, (δ) 22,32,50, (ε)10,30,60.
13. Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα ψηφία ώστε οι αριθμοί που θα προκύψουν να διαιρούνται συγχρόνως δια 2, 3 και 5, (α) 5□□ (β) 3□5□1□.

Κεφάλαιο Α.2. Τα κλάσματα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 10 διδακτικές ώρες
Το περιεχόμενο του κεφαλαίου έχει επαναληπτικό χαρακτήρα.

Α.2.1. Η έννοια του κλάσματος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση: της έννοιας του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού σε μέρη ενός «όλου» ή αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να παρουσιαστεί:
- στο 1ο, ο τρόπος χωρισμού ενός όλου σε μέρη,
- στο 2ο, η αναζήτηση σχέσης μεταξύ δύο ομοειδών ποσοτήτων,
- στο 3ο, ο υπολογισμός, με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα, του όλου από ένα μέρος και
- στο 4ο, ο υπολογισμός ενός μέρους από το όλο, με την ίδια μέθοδο.

Οι δώδεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:
(α) η 1η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(β) η 2η έως και 6η είναι ασκήσεις απλής εφαρμογής των ορισμών και
(γ) 7η έως και η 12η είναι απλές εφαρμογές της θεωρίας.

Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι που είναι απλές εφαρμογές της θεωρίας, με μορφή παιχνιδιού.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{κ}{λ}$. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί κ και λ ο καθένας χωριστά και πώς μαζί; Υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί που αφορούν τους αριθμούς κ και λ στο κλάσμα $\frac{κ}{λ}$;
2. Σε μια τάξη τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών μαθαίνουν αγγλικά. Ποιο είναι το πλήθος των μαθητών της τάξης αν γνωρίζεις ότι οι μαθητές που παρακολουθούν μαθήματα αγγλικών είναι 54;
3. Τα $\frac{3}{5}$ ενός κιλού μοσχαρίσιου κρέατος κοστίζουν 5€. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$;
4. Τα $\frac{2}{5}$ του κιλού ενός τυριού κοστίζουν 10€. Να βρεις πόσο κοστίζουν (α) το 1 κιλό, (β) τα $\frac{3}{4}$ του κιλού.

5. Βρες πόσα γραμμάρια είναι τα (α) το $\frac{1}{8}$, (β) τα $\frac{3}{4}$, (γ) τα $\frac{2}{5}$, (δ) τα $\frac{3}{20}$ του κιλού.

6. Ένας γέρος βοσκός στη διαθήκη, που άφησε στους τρεις γιους του, όριζε ότι ο μεγαλύτερος θα πάρει τα μισά πρόβατα, ο δεύτερος το ένα τέταρτο και ο μικρότερος το ένα πέμπτο. Όταν, όμως, πέθανε είχε 19 πρόβατα και τα τρία αδέλφια δεν μπορούσαν να κάνουν τι μοιρασιά. Πήγαν στο δάσκαλο του χωριού να ζητήσουν τη βοήθειά του κι αυτός για να τους βοηθήσει τους είπε: «Θα σας δώσω το μοναδικό μου πρόβατο για να μπορέσετε να κάνετε τη μοιρασιά και όταν τελειώσετε να μου φέρετε ό,τι περισσέψει». Προσπάθησε να εξηγήσεις πως έγινε η μοιρασιά; (Υπόδειξη: Η δυσκολία να βρούμε τα «μέρη» του 19, αφού δεν διαιρείται με τους φυσικούς 2, 4, 5, ενώ το 20 διαιρείται, είναι ένα παράδειγμα που έχει στόχο την κατανόηση της αναγκαιότητας μετατροπής των κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{5}$, σε ομώνυμα $\frac{10}{20}$, $\frac{5}{20}$ και $\frac{4}{20}$).

Α.2.2. Ισοδύναμα κλάσματα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση: της έννοιας των ισοδυνάμων κλασμάτων μέσω του χωρισμού, με διαφορετικούς τρόπους του ίδιου μέρους ενός όλου.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:
το 1ο, τον έλεγχο της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων με τη «χιαστή» ιδιότητα, το 2ο, την κατανόηση της διαδικασίας απλοποίησης ενός κλάσματος και το 3ο, την κατανόηση του τρόπου μετατροπής κλασμάτων σε ομώνυμα.

Οι δέκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:
(α) η 1η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού προτάσεων από τη θεωρία,
(β) η 2η έως και 6η αφορούν την ισοδυναμία των κλασμάτων,
(γ) η 7η έως και 8η αφορούν στην απλοποίηση κλασμάτων,
(δ) η 9η αφορά τη μετατροπή κλασμάτων σε ομώνυμα και
(ε) η 10η είναι άσκηση σωστού ή λάθους.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Αν γνωρίζεις ότι $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, ποια σχέση συνδέει τα α, β, γ και δ; Δώσε ένα παράδειγμα.

2. Να μετατρέψεις τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{12}{20}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

3. Απλοποίησε το κλάσμα $\frac{68}{74}$ για να προκύψει ανάγωγο κλάσμα.

4. Συμπλήρωσε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό, στα παρακάτω κλάσματα, ώστε να προκύψουν ομώνυμα κλάσματα: $\frac{5}{7+8}$, $\frac{18}{16-...}$, $\frac{3+1}{29-...}$, $\frac{5-2}{25-...}$, $\frac{4}{30:...}$

5. Εξέτασε ποια από τα κλάσματα: (α) $\frac{11}{9}$ και $\frac{110}{91}$, (β) $\frac{47}{36}$ και $\frac{64}{49}$, (γ) $\frac{100}{580}$ και $\frac{10}{58}$ είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

6. Μετέτρεψε τα κλάσματα (α) $\frac{3}{10}$, (β) $\frac{32}{50}$, (γ) $\frac{7}{4}$, (δ) $\frac{10}{8}$ σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

7. Το κλάσμα $\frac{2}{3}$ να τραπεί σε ισοδύναμο κλάσμα με παρανομαστή: (α) 24, (β) 30, (γ) 51.
8. Μπορεί ένα κλάσμα με παρανομαστή 3 να μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρανομαστή: (α) 1521, (β) 1024; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
9. Απλοποίησε τα κλάσματα: (α) $\frac{102}{17}$, (β) $\frac{60}{84}$.
10. Κάνε ομώνυμα τα κλάσματα: (α) $\frac{5}{9}$ και $\frac{3}{100}$, (β) $\frac{9}{11}$ και $\frac{7}{6}$.

Α.2.3. Σύγκριση κλασμάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Οι δύο **προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση**: των διαδικασιών της σύγκρισης των κλασμάτων μεταξύ τους [Υπόδειξη για την 1η: η Μαρία έκανε λάθος στο υπολογισμό του τρίτου κλάσματος και αντί $\frac{6}{48}$ είπε $\frac{7}{48}$].

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό την κατανόηση:

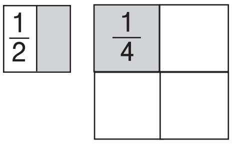
- το 1ο, της σύγκρισης δύο κλασμάτων με ίσους αριθμητές και διαφορετικούς παρονομαστές,
- το 2ο, του τρόπου σύγκρισης ετερωνύμων κλασμάτων με τη μετατροπή τους σε ομώνυμα,
- το 3ο, του τρόπου τοποθέτησης κλασμάτων σε σημεία της ευθείας των αριθμών και
- το 4ο, της εύρεσης ενός κλάσματος που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα με αριθμητές διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.

Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:
(α) η 1η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού προτάσεων από τη θεωρία,
(β) η 2η έως και 6η αφορούν τη σύγκριση κλασμάτων μεταξύ τους ή με τη μονάδα,
(γ) η 7η και 8η αφορούν την τοποθέτηση κλασμάτων σε σημεία της ευθείας των αριθμών
(δ) η 9η είναι άσκηση αντιστοίχισης.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Από τα παρακάτω σχήματα φαίνεται να είναι $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. Αληθεύει;

   Δικαιολόγησε την απάντησή σου.



2. Γράψε ένα κλάσμα που να είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{5}$ και μικρότερο από το $\frac{4}{5}$.
3. Να διατάξεις τα κλάσματα: $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ σε αύξουσα σειρά.
4. Σύγκρινε τα κλάσματα (α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{3}{9}$ και (β) $\frac{8}{15}$ και $\frac{12}{18}$.

5. Σχεδίασε τρία τετράγωνα πλευράς 2 cm. Στο ένα από αυτά χρωμάτισε ένα τμήμα του ίσο με το $\frac{1}{2}$ του τετραγώνου, στο δεύτερο ένα τμήμα του ίσο με το $\frac{1}{8}$. Στο τρίτο τετράγωνο βρες και σχεδίασε ένα τμήμα που να είναι μικρότερο από το $\frac{1}{2}$ και μεγαλύτερο από το $\frac{1}{8}$ του τετραγώνου.

6. Πότε ένα κλάσμα είναι: (α) ίσο με 1, (β) μικρότερο του 1 (γ) μεγαλύτερο του 1. Δώσε παραδείγματα.

Α.2.4. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση: των εννοιών της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων και την αναγκαιότητα μετατροπής των κλασμάτων σε ομώνυμα.

Τα έξι προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό την κατανόηση των διαδικασιών πρόσθεσης και αφαίρεσης απλών και μικτών κλασμάτων.

Οι δέκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

(α) η 1η και η 2η αφορούν την πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων,
(β) η 3η και η 4η την μετατροπή μεικτών κλασμάτων σε απλά και αντίστροφα,
(γ) η 5η και η 6η την πρόσθεση και αφαίρεση μικτών κλασμάτων,
δ) η 7η έως και η 9η είναι απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης κλασμάτων και
(ε) η 10η είναι άσκηση σωστού – λάθους.

Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι οι οποίες είναι ασκήσεις αντιστοίχισης και συμπλήρωσης πίνακα με τα αποτελέσματα της πρόσθεσης κλασμάτων.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:
- Η αναγνώριση του ρόλου του ρυθμού στη μουσική έκφραση.
- Η απόκτηση καλύτερης μουσικής αντίληψης.
- Η συσχέτιση των διαφόρων μουσικών ρυθμών με τις επικρατούσες ονομασίες τους.

(β) Ενδεικτικές πηγές:
- Λεούση, Λ. (2003). *Η Ιστορία της Ελληνικής Μουσικής*. Αθήνα: Άγκυρα.
- Μαυροειδής, Μ. (1992). *Οι τρόποι της παραδοσιακής μουσικής*. Αθήνα: ΙΕΜΑ.
- Garland, T., Kahn, C., Seymour, D. (1995). *Math and Music*. Publications.
- Jeans, J. (1968). *Science and Music*. Dover.
- http://www.telemath.gr

(γ) Μαθήματα σύνδεσης: *Μαθηματικά, Πληροφορική* (αναζήτηση μέσω Internet), *Μουσική* κ.ά.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Αν είναι τότε θα είναι και $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ τότε θα είναι και $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}$.

Χρησιμοποίησε παραδείγματα για να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις την πρόταση αυτή.

2. Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{2}{8}$, (β) $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{4}{11}$, (γ) $\frac{2}{5} + \frac{5}{6}$, (δ) $\frac{4}{7} + \frac{2}{14} + 2$.

3. Σε ποιες περιπτώσεις είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα;

4. Υπολόγισε τις διαφορές: (α) $\frac{7}{12} - \frac{5}{12}$, (β) $\frac{7}{12} - 1$, (γ) $\frac{7}{2} - \frac{4}{12}$, (δ) $\frac{15}{22} - \frac{5}{10}$.

5. Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$, (β) $\frac{9}{5} + \frac{2}{5}$, (γ) $\frac{3}{2} + \frac{15}{12} + \frac{5}{4}$, (δ) $\frac{8}{5} + \frac{4}{10} + \frac{7}{15}$ και απλοποίησε το αποτέλεσμα, όπου αυτό δεν είναι ανάγωγο κλάσμα.

6. Βρες τα αθροίσματα: (α) $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}$, (β) $\frac{3}{5} + \frac{8}{10}$, (γ) $\frac{1}{14} + \frac{2}{7}$, (δ) $\frac{22}{30} + \frac{47}{50}$, (ε) $\frac{35}{40} + \frac{28}{45}$ και κάνε απλοποίηση όπου είναι δυνατόν.

Α.2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση: της έννοιας του πολλαπλασιασμού κλασμάτων και υπολογισμού του γινομένου τους με τη βοήθεια σχήματος.
Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό: να δείξουν τον τρόπο του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων.
Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε οκτώ κατηγορίες:
(α) η 1η είναι συμπλήρωσης κενού προτάσεων από τη θεωρία,
(β) η 2η αφορά τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί κλάσμα,
(γ) η 3η τον υπολογισμό γινομένου δύο κλασμάτων,
(δ) η 4η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενών ενός πίνακα πολλαπλασιασμού,
(ε) η 5η αφορά τον υπολογισμό γινομένου μικτών κλασμάτων,
(στ) η 6η την εύρεση των αντίστροφων κλασμάτων,
(ζ) η 7η είναι απλό πρόβλημα πολλαπλασιασμού και
(η) η 8η και η 9η αφορούν το υπολογισμό της τιμής παραστάσεων με παρενθέσεις.
ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Ποιοι είναι οι αντίστροφοι των αριθμών: κ, $\frac{1}{κ}$ και $\frac{κ}{λ}$;

2. Υπάρχει κάποιος αριθμός που να ισούται με τον αντίστροφό του;

3. Αν $x \cdot y = \frac{4}{5}$ και $z = \frac{11}{9}$ να υπολογίσεις το γινόμενο $x \cdot (y \cdot z)$.

4. Υπολόγισε τα γινόμενα: (α) $2 \cdot \frac{7}{9}$, (β) $\frac{7}{5} \cdot 15$.

5. Βρες τα γινόμενα απλοποιώντας κατάλληλα πριν την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού:
(α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$, (β) $\frac{7}{3} \cdot \frac{8}{13}$, (γ) $\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5}$, (δ) $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9}$, (ε) $\frac{3}{5} \cdot \frac{13}{11}$, (στ) $\frac{22}{30} \cdot \frac{4}{5}$, (ζ) $\frac{10}{21} \cdot \frac{7}{8}$.

6. Υπολόγισε τις δυνάμεις: (α) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, (β) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, (γ) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, (δ) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

7. Να αντιστοιχίσεις κάθε γινόμενο της πρώτης στήλης του διπλανού πίνακα με το αποτέλεσμά του στη δεύτερη στήλη του πίνακα.

$\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{20}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$	$\frac{8}{15}$
$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{10}$	$\frac{1}{40}$

Α.2.6. Διαίρεση κλασμάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης δύο κλασμάτων και τον υπολογισμό του γινομένου τους με τη βοήθεια ενός σχήματος.
[Υπόδειξη: Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ, ώστε να αποτελέσει τα 4 από τα 5 μέρη της πλευράς ενός μεγαλύτερου ορθογωνίου. Παρατηρούμε, τότε, ότι πρέπει να προεκτείνουμε και την πλευρά ΑΔ έτσι, ώστε να αποτελέσει αυτή μέρος της άλλης πλευράς του μεγαλύτερου ορθογωνίου, μήκους 3, αφού το εμβαδόν αυτού (του μεγαλύτερου) πρέπει να είναι $15=3 \cdot 5$.

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι, πράγματι, τα $\frac{8}{15}$ του μεγαλύτερου ορθογωνίου

και η πλευρά του ΑΔ είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης πλευράς του μεγαλύτερου ορθογωνίου.

Άρα είναι $\frac{8}{15}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ και επομένως ισχύει ότι $\frac{8}{15}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}$].

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τη διαδικασία της διαίρεσης των κλασμάτων σε διάφορες περιπτώσεις.
Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:
(α) η $1^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού προτάσεων από τη θεωρία,
(β) η $2^η$ έως και η $5^η$ αφορούν πράξεις με διαιρέσεις μεταξύ κλασμάτων,
(γ) η $6^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης κενών ενός πίνακα,
(δ) η $7^η$ είναι άσκηση αντιστοίχισης και
(ε) η $8^η$ και η $9^η$ αφορούν τον υπολογισμό παραστάσεων με τέσσερις πράξεις και σύνθετα κλάσματα.
Προτείνεται μία δραστηριότητα για το σπίτι που προέρχεται από τον πάπυρο του Ριντ.
Η ενασχόληση με ένα τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε για χιλιάδες χρόνια και η σύγκρισή του με τις σύγχρονες τεχνικές των πράξεων είναι χρήσιμη για να φανεί η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Κάνε τις διαιρέσεις: (α) $\frac{2}{10}:\frac{3}{8}$, (β) $\frac{4}{9}:\frac{7}{10}$, (γ) $\frac{35}{41}:\frac{6}{9}$.
2. Βρες τα πηλίκα: (α) $4:\frac{2}{10}$, (γ) $\frac{7}{10}:2$.
3. Κάνε τις διαιρέσεις:(α) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$, (β) $\frac{20}{6}:12$ και $12:\frac{20}{6}$, (γ) $\frac{35}{8}:\frac{3}{4}$ και $\frac{3}{4}:\frac{35}{8}$.
4. Κάνε τις πράξεις: (α) $\frac{2}{9}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$, (β) $\frac{2}{9}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{4}$, (γ) $\frac{2}{9}+\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$, (δ) $\frac{17}{20}-\frac{1}{5}+\frac{2}{8}$

   (ε) $\frac{17}{20}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{8}$, (στ) $\frac{17}{20}-\frac{1}{5}:\frac{2}{8}$.
5. Να γίνουν οι διαιρέσεις: (α) $\frac{3}{4}:\frac{5}{16}$, (β) $5:\frac{15}{18}$, (γ) $\frac{7}{9}:14$.
6. Να τρέψεις το σύνθετο κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{2}-1}{2+\frac{5}{7}}$ σε απλό.
7. Ένα ενυδρείο χωράει 15 λίτρα νερό. Μία κανάτα χωράει $\frac{3}{4}$ του λίτρου νερό.

   Πόσεςκανάτες νερό πρέπει να ρίξουμε για να γεμίσει το ενυδρείο;

Κεφάλαιο Α.3. Δεκαδικοί αριθμοί

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 9 διδακτικές ώρες
Το περιεχόμενο του κεφαλαίου έχει επαναληπτικό χαρακτήρα.

Α.3.1. Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Στρογγυλοποίηση

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι πέντε προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:

- η $1^η$, $2^η$ και $3^η$, της αναγκαιότητας εισαγωγής και χρήσης των δεκαδικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών, ως υποδιαιρέσεων των φυσικών αριθμών,
- η $4^η$ και $5^η$, της έννοιας «διάταξη των θέσεων δεκαδικής τάξης των ψηφίων» στους δεκαδικούς αριθμούς.

[Υποδείξεις: Στην $1^η$ αφήνονται οι μαθητές να διερωτηθούν εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ των συγκεκριμένων ακεραίων σταθμών που να μπορεί να εκφράσει το ακριβές βάρος και τι είδους μορφή θα έχει αυτός ο αριθμός. Στην $2^η$, ο προβληματισμός που αναμένεται να έχουν οι μαθητές και που αφορά την ακρίβεια της μέτρησης, θα τους οδηγήσει, πιθανά, στην αναγκαιότητα της χρήσης των υποδιαιρέσεων του «μέτρου» που χρησιμοποιούν και συνεπώς στο είδος της έκφρασης την οποία αυτή θα έχει. Στην $3^η$ αναμένεται να επιλέξουν μόνοι τους οι μαθητές, για το αποτέλεσμα της διαίρεσης των 5cm δια 8, ως καταλληλότερη έκφραση αριθμό δεκαδικό και όχι άλλη π.χ. μεικτό κλασματικό. Στην $4^η$, η συγκριτική ενασχόληση των μαθητών με διαφορετικούς δεκαδικούς αριθμούς αναμένεται να επιφέρει την απαιτούμενη εμπειρία, μέσα από την οποία θα προκύψουν οι κανόνες που ακολουθούν. Στην $5^η$, η ενασχόληση των μαθητών με το συγκεκριμένο κουΐζ αναμένεται να ενισχύσει την κατανόηση της έννοιας των δεκαδικών αριθμών].

Τα πέντε προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν:

- το $1^ο$ τον τρόπο μετατροπής κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς,
- το $2^ο$ το αντίστροφο, δηλαδή τη μετατροπή των δεκαδικών σε κλάσματα,
- το $3^ο$ τη μετατροπή των δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς,
- το $4^ο$ τη μετατροπή ενός κλάσματος σε δεκαδικό κλάσμα και
- το $5^ο$ την τοποθέτηση των δεκαδικών αριθμών στην ευθεία των αριθμών.

Οι δεκατρείς προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε οκτώ κατηγορίες:

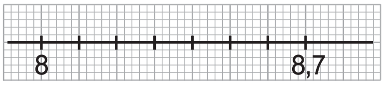
(α) η $1^η$ και η $2^η$ έχουν σκοπό την ταύτιση του συμβολισμού του κλάσματος με την πράξη της διαίρεσης,
(β) η $3^η$ αφορά τη μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς,
(γ) η $4^η$ και η $5^η$ αφορούν τη μετατροπή των δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς και αντιστρόφως,
(δ) η $6^η$ αφορά την εύρεση της δεκαδικής τάξης,
(ε) η $7^η$ και η $10^η$ αφορούν τη διάταξη των δεκαδικών αριθμών,
(στ) η $8^η$ και η $11^η$ αφορούν τη στρογγυλοποίηση των δεκαδικών αριθμών,
(ζ) η $9^η$ την τοποθέτηση δεκαδικών αριθμών στην ευθεία των αριθμών και
(η) οι $12^η$ και $13^η$ είναι ασκήσεις αντιστοίχισης.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

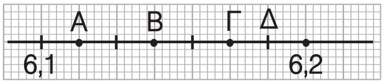
1. Γράψε ως κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς: (α) 1,125, (β) 0,9, (γ) 2,38.
2. Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{5}{4}$ σε δεκαδικό.
3. Γράψε ως δεκαδικό κλάσμα τους δεκαδικούς αριθμούς: (α) 0,5000, (β) 3,120087.
4. Γράψε ως δεκαδικό αριθμό καθένα από τα δεκαδικά κλάσματα: (α) $\frac{7}{1000}$, (β) $\frac{93}{1000}$, (γ) $\frac{2}{10000}$
5. Υπολόγισε τα παρακάτω πηλίκα ως κλάσματα και ως δεκαδικούς:
(α) $\frac{3,4}{7,3}$, (β) $\frac{1,028}{1,2}$, (γ) $\frac{34,5}{5,7}$.
6. Βρες: (α) το $\frac{1}{6}$ του 24, (β) το $\frac{1}{10}$ του 25 και (γ) το $\frac{1}{20}$ του 35.
7. Σύγκρινε τους αριθμούς: (α) 52,345 και 52,359, (β) 203,34 και 203,345.
8. Δίνεται η σειρά των ψηφίων 78630453. Να τοποθετήσεις κατάλληλα την υποδιαστολή, ώστε ο δεκαδικός που θα προκύψει να βρίσκεται μεταξύ των αριθμών, (α) 10 και 100 (β) 1000 και 10.000.
9. Αντιστοίχισε κάθε κλάσμα της 1ης στήλης με τον αντίστοιχο δεκαδικό με τον οποίο ισούται, της 2ης στήλης:

Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός
$\frac{1}{8}$	0,7
$\frac{4}{5}$	0,5
$\frac{7}{10}$	0,125
$\frac{1}{2}$	0,8

10. Συμπλήρωσε το ψηφίο που λείπει στον αριθμό 12,6□7, αν γνωρίζεις ότι όταν ο αριθμός στρογγυλοποιηθεί στο πλησιέστερο εκατοστό γίνεται 12,66.
11. Τοποθέτησε τους αριθμούς: 8,25 , 8,3, 8,5 , 8,55 , 8,09 , 8,66 και 8,58 στο σχήμα.



12. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία Α, Β, Γ και Δ του σχήματος;



13. Τοποθέτησε τους δεκαδικούς αριθμούς που ακολουθούν στην ευθεία των αριθμών: (α) 13,24, (β) 13,56, (γ) 13,95, (δ) 14,1, (ε) 14,03

Α.3.2. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι έντεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε επτά κατηγορίες:

(α) η 1η και η 2η άσκηση έχουν στόχο την εξάσκηση στην πρόσθεση δεκαδικών αριθμών,
(β) η 3η την εξάσκηση στην αφαίρεση δεκαδικών αριθμών,

(γ) η $4^{η}$ και η $6^{η}$ στη διαίρεση δεκαδικών αριθμών,
(δ) η $5^{η}$ και η $9^{η}$ στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων δεκαδικών αριθμών,
(ε) η $7^{η}$ και η $8^{η}$ είναι απλά προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς,
(στ) η $10^{η}$ αφορά τις δυνάμεις των δεκαδικών αριθμών και
(ζ) η $11^{η}$ είναι άσκηση σωστού – λάθους.

Α.3.3. Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δείξει τον τρόπο χρήσης του υπολογιστή τσέπης και τη λειτουργία των βασικών του πλήκτρων για τον υπολογισμό μιας αριθμητικής παράστασης με όλων των ειδών τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών.

Η προτεινόμενη άσκηση – πρόβλημα έχει στόχο την εξάσκηση των μαθητών σε πράξεις, με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης, για το υπολογισμό αριθμητικής παράστασης δεκαδικών αριθμών, ζητώντας από αυτούς να βρουν και ενδιάμεσα αποτελέσματα εκτός του τελικού.

Α.3.4. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες (μία για την τάξη και μία για το σπίτι) αφορούν: την πρακτική αναγκαιότητα εφαρμογής και χρήσης της τυποποιημένης μορφή μεγάλων αριθμών, όπως π.χ. για τη μάζα του Ήλιου και της Γης, την ακτίνα της Γης, την απόσταση Γης – Σελήνης, κλπ.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό την κατανόηση της χρησιμότητας της τυποποιημένης μορφής μεγάλων αριθμών.

Οι τρεις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα αφορούν τη μετατροπή μεγάλων αριθμών σε τυποποιημένη μορφή και αντίστροφα καθώς και τον πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμών με τυποποιημένη μορφή.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Γράψε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς: (α) 34.500, (β) 164.000 και (γ) 59.890.000.
2. Γράψε ως δεκαδικούς τους αριθμούς: (α) $1{,}23 \cdot 10^4$ και (β) $0{,}35 \cdot 10^2$.
3. Κάνε τις πράξεις: $(0{,}31 \cdot 10 + 525{,}5 \cdot 0{,}01) : 0{,}0001$.

Α.3.5. Μονάδες μέτρησης

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης ενός βασικού φυσικού μεγέθους (μήκους, επιφάνειας όγκου, χρόνου και μάζας) με διαφορετικές μονάδες μέτρησης καθώς και τη διερεύνηση της μεταξύ τους σχέσης.

Τα πέντε προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τον τρόπο και τη διαδικασία:

- το $1^{ο}$ της μετατροπής της μονάδας μήκους (m) στις υποδιαιρέσεις της (dm, cm, mm),
- το $2^{ο}$, της μετατροπής των μονάδων επιφανείας,
- το $3^{ο}$, των μονάδων μέτρησης του χρόνου,
- το $4^{ο}$, των μονάδων μήκους και
- το $5^{ο}$, των μονάδων μέτρησης μάζας.

Οι δεκαοκτώ προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε έξι κατηγορίες:

(α) η $1^η$ έως και η $3^η$ αφορούν τις μετατροπές των μονάδων μέτρησης μήκους,
(β) η $4^η$ έως και η $7^η$ είναι ασκήσεις εύρεσης μονάδων επιφανείας και μετατροπής στα υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσιά τους,
(γ) η $8^η$ και η $9^η$ είναι ασκήσεις σχετικές με τις μονάδες μέτρησης όγκου,
(δ) η $10^η$, $11^η$, $12^η$ και $18^η$ με τις μονάδες μέτρησης χρόνου,
(ε) η $13^η$ και η $14^η$ με τις μονάδες μέτρησης μάζας και
(στ) η $15^η$ έως και η $17^η$ είναι προβλήματα σχετικά με τις μονάδες μέτρησης όγκου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:
- Η διαχρονική καταγραφή των «μέτρων και σταθμών» σε διάφορους λαούς και εποχές.
- Η διερεύνηση των λόγων επιλογής των διαφόρων «μέτρων και σταθμών».
- Η ιστορική αναζήτηση των συνθηκών και του τρόπου επικράτησης του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.
- Η διερεύνηση του ρόλου της επιστήμης στην τελική επιλογή του διεθνούς συστήματος μέτρησης βασικών μεγεθών.

(β) Ενδεικτικές πηγές: (πέραν των ιστορικών σημειωμάτων στο βιβλίο του μαθητή):
- Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια. Αθήνα: Εκδοτική Αθηνών.
- Alder, K. (2002). *The measure of all things*. London.
- Connor, R.D.(1987). *The weights and measures of England*. London.
- Favre, A. (1931). *Les origines du système métrique.* Paris.
- Zupko, R. (1990). *Revolution in measurement*: *western European weights and measures since the age of science*. Philadelphia.
- Klein, H.A. (1988). *The science of measurement: A historical survey*. New York.
- Cox, E.F. The metric system: *A quarter-century of acceptance, 1931-1876*, Osiris **13** (1959), 358-379.
- Crosland, M. The Congress on definitive metric standards, 1798-1799: *The first international scientific conference*?, Isis **60** (1979), 226-309.
- Kaunzner, W. Über eine Entwicklung in der Dimensionsrechnung, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Denkschr*. **116** (9) (1979), 144-165.
- Jenemann, H.R. Zur Geschichte der Substitutionswägung und der Substitutionswaage, *Technikgeschichte* **49** (2) (1982), 89-131; 176.

(γ) Μαθήματα σύνδεσης: *Μαθηματικά, Πληροφορική* (Αναζήτηση μέσω Internet), *Ιστορία* κ.ά.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος με μονάδα μέτρησης το α είναι 22. Να βρεθεί το μήκος τους ευθυγράμμου τμήματος αν πάρουμε μονάδα δεκαπλάσια της α.

2. Αν τα μήκη όλων των ακμών ενός κύβου είναι 36 cm, να υπολογίσεις το εμβαδόν της επιφάνειας του και τον όγκο του σε m3.

3. Πόσα λεπτά και πόσα δευτερόλεπτα έχουν: (α) μία ημέρα, (β) ένας μήνας και (γ) ένα έτος. Να εκφράσεις τα αποτελέσματα των υπολογισμών σας σε τυποποιημένη μορφή.

4. Διαθέτουμε τα ακόλουθα σταθμά: 1 Kg, 250gr, 500 gr, 100 gr και 50 gr. Πώς θα τα συνδυάσουμε ώστε να ζυγίσουμε βάρη των (α) 300 gr (β) 700 gr (γ) 200 gr (δ) 450 gr.

5. Από 15 όμοιες μπάλες η μία είναι πιο ελα-φριά. Διαθέτουμε μόνο μία ζυγαριά χωρίς σταθμά. Πώς θα βρούμε ποια από τις 15 μπάλες είναι η ελαφρύτερη; Με πόσες το λιγότερο ζυγίσεις μπορούμε να βρούμε την ελαφρύτερη μπάλα;

6. Από 5 κουτιά με λίρες το ένα περιέχει κάλπικες λίρες. Αν γνωρίζουμε πως μία αληθινή λίρα ζυγίζει 10g και η μία κάλπική ζυγίζει 9g, πώς με μία μόνο ζύγιση θα βρούμε σε ποιο κουτί υπάρχουν οι κάλπικες λίρες;

Κεφάλαιο Α.4. Εξισώσεις και προβλήματα

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 5 διδακτικές ώρες

Α.4.1. Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις: $α + x = β$, $x – α = β$, $α – x = β$, $αx = β$, $α : x = β$ & $x : α = β$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τέσσερις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:

- η 1η, την εμπέδωση του τρόπου μετατροπής των λεκτικών σε μαθηματικές εκφράσεις.
- η 2η, το χειρισμό των αριθμητικών παραστάσεων για απλούστερη έκφραση.
- η 3η, την αναγκαιότητα χρήσης της έννοιας της εξίσωσης μέσα από τη λύση ενός απλού προβλήματος.
- η 4η, τη διαδικασία επαλήθευσης ή μη μιας ισότητας παραστάσεων για συγκεκριμένες τιμές των γραμμάτων που περιέχει.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δείξει τη διαδικασία που απαιτείται για να επιλυθεί ένα πρόβλημα με την εύρεση της κατάλληλης εξίσωσης και το ορισμό του αγνώστου, που αντιπροσωπεύει την άγνωστη ποσότητα και επαληθεύει τη λύση της εξίσωσης και συνεπώς του αντίστοιχου προβλήματος.

Οι δεκαπέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε εννέα κατηγορίες:

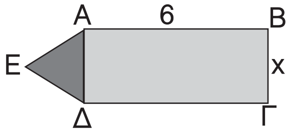
(α) η 1η είναι άσκηση αντιστοίχισης μεταξύ λεκτικών και μαθηματικών εκφράσεων,
(β) η 2η αφορά τη μετατροπή των μαθηματικών εκφράσεων σε λεκτικές,
(γ) η 3η αφορά, αντιστρόφως, τη μετατροπή των λεκτικών εκφράσεων σε μαθηματικές,
(δ) η 4η αφορά το χειρισμό των αριθμητικών παραστάσεων για απλούστερη έκφραση,
(ε) η 5η αφορά την αντικατάσταση παραστάσεων με γράμματα μέσα σε άλλες παραστάσεις,
(στ) η 6η αφορά τους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, σε μία μαθηματική έκφραση,
(ζ) η 7η έως και η 9η αφορούν την επαλήθευση αριθμητικών παραστάσεων όταν αντικαθιστούμε τα γράμματα με συγκεκριμένες τιμές,
(η) η 10η έως και η 12η αφορούν την εύρεση των λύσεων διαφόρων εξισώσεων και
(θ) η 13η έως και η 15η αφορούν προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια εξίσωσης των προαναφερομένων μορφών.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Να μετατρέψεις σε αριθμητικές παραστάσεις τις εκφράσεις: (α) Τα $\frac{3}{5}$ ενός αριθμού, (β) Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι 4, (γ) Το μισό του αθροίσματος δύο αριθμών, (δ) Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού μειωμένα κατά 2, (ε) Ένας αριθμός αυξημένος κατά τα $\frac{5}{9}$ αυτού.

2. Διατύπωσε λεκτικά την μαθηματική έκφραση $2x+3 = 7$

3. Γράψε συντομότερα τις παραστάσεις: (α) $3α+5α$, (β) $8x+7x+4x$, (γ) $15β–9β$, (δ) $2α+α$, (ε) $x+x+x+x$, (στ) $5ω+12ω-3ω$, (ζ) $3\cdot x+0{,}5\cdot x+7{,}8\cdot x+5{,}3\cdot x$, (η) $4{,}2\cdot t–2{,}9\cdot t+32\cdot t–4{,}89\cdot t$.



4. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.(α) Να εκφράσεις με τη βοήθεια του x: (i) την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, (ii) την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ και (iii) την περίμετρο του σχήματος ΑΒΓΔΕ. (β) Να βρεις τις αριθμητικές τιμές των περιμέτρων των σχημάτων αν x=2 και x=1,5.(γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του σχήματος ΑΒΓΔΕ θα γίνει 27;
5. Βρες ποιοι από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, είναι λύσεις της εξίσωσης $3 \cdot x = 21$.
6. Αν $x = 4$, $y = 2$ και $\omega = 2{,}5$, να βρεις τις τιμές των παραστάσεων: (α) $(x+2)\cdot y+3\cdot x\cdot y\cdot \omega$, (β) $(x+y)^2$, (γ) $x^2+2\cdot x\cdot y+y^2$, (δ) $(x-\omega)2$, (ε) $x^2-2\cdot x\cdot \omega+\omega^2$, (στ) $3x^2+5y^2+4\omega^2$.
7. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν: (α) $(\alpha+\beta:\gamma)\cdot(\delta-\varepsilon)$, (β) $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma-\delta)-\varepsilon$, (γ) $(\alpha+3\cdot\beta):2.\gamma-(\delta+\varepsilon)$, αν $\alpha = 810$, $\beta = 420$, $\gamma=3{,}1$, $\delta = 7{,}8$ και $\varepsilon = 0{,}1$.
8. Αν $\alpha = 50$ να βρεις τις τιμές των διαφορών: (α) $\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{8}$, (β) $\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{3}$, (γ) $\frac{2\alpha}{5}-\frac{3\alpha}{10}$, (δ) $\frac{4\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{7}$.
9. Αν $x\cdot y = \frac{5}{8}$ και $z\cdot\omega = \frac{3}{4}$, να βρεις το γινόμενο $x\cdot(y\cdot z)\cdot\omega$.
10. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην αντίστοιχη θέση.

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α) Η εξίσωση 5x-2=7 δεν έχει λύση στους φυσικούς αριθμούς	☐	☐
(β) Ο αριθμός 5 είναι ρίζα της εξίσωσης 35-x=30.	☐	☐
(γ) Η εξίσωση ω+32=39 έχει ρίζα τον αριθμό 3.	☐	☐

11. Βρες τις 8 τιμές του φυσικού αριθμού ν, για τις οποίες το κλάσμα $\dfrac{\frac{63}{\nu+1}}{\frac{3}{2}}$ είναι φυσικός αριθμός.
12. Σύγκρινε τα κλάσματα (α) $\frac{\alpha+4}{\alpha+2}$ και (β) $\frac{\alpha-3}{\alpha-2}$ με τη μονάδα.
13. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού x δεν έχει νόημα το κλάσμα $\frac{1}{x-1}$.
14. Για να υπολογιστεί η βαθμολογία μιας ομάδας σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα υποθέτουμε ότι κάθε νίκη (ν) βαθμολογείται με 2 βαθμούς, κάθε ήττα (η) με 0 και κάθε ισοπαλία (ι) με 1 βαθμό. Οι ομάδες α, β, γ, δ πήραν την βαθμολογία που φαίνεται στο πίνακα. Να υπολογίσεις τη βαθμολογία κάθε ομάδας.

	ν	ι	η	β
Ομάδα α	2	1	1	
Ομάδα β	2	1	1	
Ομάδα γ	3	1	0	
Ομάδα δ	1	2	1	

15. Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο όταν κινείται με ταχύτητα υ για χρόνο t, είναι $\upsilon\cdot t$. Να βρεις πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει το αυτοκίνητο αν (α) υ=80 Km/h και t=3h και (β) υ=120 Km/h και t=5h.
16. Να αντιστοιχίσεις κάθε εξίσωση της 1ης στήλης με τη ρίζα της στη 2η στήλη:

1η στήλη	2η στήλη
$x-3=8$	0
$x+5=5$	3
$3x=9$	11

Α.4.2. Επίλυση προβλημάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση:
των εννοιών που χρησιμοποιούμε στα προβλήματα, την επίλυσή τους, τη λύση τους καθώς και τη διαδικασία που ακολουθούμε για να τα επιλύσουμε και να βρούμε τη λύση τους. [Απάντηση: Ο Διόφαντος έζησε 74 έτη].

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό:
να δείξει ότι η μαθηματική έκφραση μιας εξίσωσης ενδέχεται να αντιστοιχεί και σε περισσότερα του ενός προβλήματα.

Α.4.3. Παραδείγματα Επίλυσης προβλημάτων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν σε διάφορες και κατά το δυνατόν διαφορετικές περιπτώσεις προβλημάτων, που προέρχονται από τις εμπειρίες της καθημερινότητας, τις διαδικασίες με τις οποίες καταστρώνονται διάφορες ευρετικές στρατηγικές επίλυσης. Όπως είναι π.χ. ο συμβολισμός του αγνώστου, η μετατροπή της λεκτικής έκφρασης του προβλήματος σε μαθηματική, η ανάλυση των δεδομένων, ο σχεδιασμός ενός πίνακα, η διερεύνηση όλων των ειδικών περιπτώσεων κλπ, με τελικό σκοπό την εύρεση της λύσης και την επαλήθευσή της.

Οι δεκατρείς προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα καλύπτουν ένα ικανό φάσμα των παραπάνω περιπτώσεων και αποτελούν ένα δείγμα για την εξάσκηση των μαθητών και την εμπέδωση των τεχνικών επίλυσης προβλημάτων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Πώς συμβολίζεται (α) ένας άρτιος, (β) ένας περιττός αριθμός, (γ) ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού και (δ) ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού;
2. Αν το ΕΚΠ(α,β)=β, ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς α και β; Δώσε ένα παράδειγμα.
3. Αν το ΕΚΠ(α,β)=α•β, τι συμπεραίνουμε για τους αριθμούς α και β; Δώσε ένα παράδειγμα.
4. Μια στρατιωτική μονάδα 5.115 ατόμων έχει τροφές για 20 ημέρες. Πόσο θα διαρκέσουν οι τροφές αν προστεθούν ακόμα 3.410 άτομα;
5. Να μοιραστεί ένα ποσό 26.100€ σε τρία άτομα, έτσι ώστε ο Α να πάρει 4.500€ περισσότερες από τον Β και ο Γ να πάρει 2.100€ λιγότερες από τον Β.
6. Για ένα τραπέζι και 4 καρέκλες πληρώσαμε 840€. Το τραπέζι κοστίζει όσο 3 καρέκλες. Πόσα θα πληρώσουμε, αν αγοράσουμε άλλες δύο καρέκλες;
7. Αν το τριπλάσιο μιας ποσότητας καφέ είναι 6 Kg, να βρείτε πόσα κιλά είναι όλη η ποσότητα.
8. Βρες την περίμετρο ορθογώνιου παραλληλογράμμου με εμβαδόν $\frac{52}{8}$ m^2 και μία πλευρά $\frac{7}{4}$ m.
9. Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης. Το πρώτο εκτελεί μια διαδρομή σε 18 min, το δεύτερο σε 24 min και το τρίτο σε 36 min. Αν στις 12 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο;
10. Η Μαρία αγόρασε $\frac{3}{4}$ κιλά ρύζι, $\frac{1}{8}$ κιλού καφέ, $\frac{5}{2}$ κιλά αλεύρι και $\frac{2}{5}$ κιλά τυρί. Πόσο βάρος μετέφερε στην τσάντα της;
11. Ο όγκος του νερού αυξάνεται κατά τα $\frac{3}{46}$ του, όταν μετατρέπεται σε πάγο. Να βρεθεί ο όγκος του πάγου που προκύπτει από την πήξη 27 dm^3 νερού.

12. Μία ελαστική μπάλα αναπηδά σε ύψος ίσο με τα $\frac{2}{7}$ του ύψους, από το οποίο αφέθηκε να πέσει. Αν την αφήσουμε να πέσει από ύψος $34\frac{3}{10}$ m, σε πόσο ύψος θα φτάσει ύστερα από 3 αναπηδήσεις;
13. Ένας αγρότης έχει δύο γιους και έναν ανιψιό. Σκέφθηκε να τους μοιράσει το χωράφι του, έκτασης 42 στρεμμάτων, δίνοντας στους γιους του τα $\frac{5}{7}$ και στον ανιψιό του τα $\frac{2}{7}$ του χωραφιού. Πόσα στρέμματα θα πάρει ο καθένας τους;
14. Τρεις φίλοι αποφάσισαν να κάνουν ένα πάρτι από κοινού. Ο πρώτος έβαλε 5 διαφορετικά φαγητά, ο δεύτερος 3 διαφορετικά φαγητά και ο τρίτος 100€. Αν όλα τα φαγητά κοστίζουν το ίδιο, πόσα χρήματα πρέπει να πάρει ο πρώτος και πόσα ο δεύτερος από τα 100€ για τα φαγητά που διέθεσαν;
15. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 5 ώρες. Μια δεύτερη την αδειάζει σε 6 ώρες. Αν η δεξαμενή είναι άδεια και ανοίξουν και οι δύο βρύσες μαζί σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή;
16. Το ύψος μιας σκάλας είναι μεταξύ των 3 και των 4 μέτρων. Ανεβαίνουμε το μισό των σκαλοπατιών, μετά το ένα τρίτο τους των υπολοίπων και τέλος το ένα όγδοο του νέου υπολοίπου. Κάθε σκαλοπάτι έχει ύψος 16 cm. Ποιο είναι το ολικό μήκος της σκάλας;
17. Να βρεις και να διατυπώσεις ένα κατάλληλο πρόβλημα που να δέχεται ως λύση την ακόλουθη σειρά πράξεων: (α) $1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{5}\right)$, (β) $1-\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)$, (γ) $1-\left(\frac{1}{8}:\frac{3}{5}\right)$.

Κεφάλαιο Α.5. Ποσοστά

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 3 διδακτικές ώρες
Το περιεχόμενο του κεφαλαίου έχει επαναληπτικό χαρακτήρα.

Α.5.1. Ποσοστά

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:

- η $1^{η}$, των εκφράσεων από την καθημερινότητα που αναφέρονται σε ποσοστά και
- η $2^{η}$, της χρήσης των ποσοστών σε εκλογικά αποτελέσματα με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων από τη σύγκριση των ποσοστών.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:
το $1^{ο}$ και το $2^{ο}$ την μετατροπή των κλασμάτων σε ποσοστά και αντίστροφα, και το $3^{ο}$ τον τρόπο χρήσης των ποσοστών σε θέματα φορολογίας.
Οι οκτώ προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:
(α) η $1^{η}$ έως και η $3^{η}$ αφορούν μετατροπές κλασμάτων ή δεκαδικών κλασμάτων σε ποσοστά και αντίστροφα και
(β) η $4^{η}$ έως και η $8^{η}$ την εύρεση ποσοστών ή την απλή χρήση τους.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Υπολόγισε το 5% των ποσών 1.000, 2.000, 5.000 και βρες το αποτέλεσμα των πράξεων: 5.000 – 5% · 5.000 και 5.000 + 5% · 5.000.

2. Η τιμή ενός βιβλίου ήταν 5.000 δραχμές. Σε περίοδο προσφορών έγινε έκπτωση 5% επί της τιμής πώλησης. Αν στην συνέχεια γίνει αύξηση της τιμής κατά 5% επί της νέας τιμής πώλησης, η νέα τιμή του βιβλίου θα είναι πάλι 5.000; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

3. Σχεδίασε ένα διάγραμμα με τα ποσοστά επί τοις εκατό του χρόνου για κάθε μάθημα του σχολικού ωραρίου και για το χρόνο που δαπανάς στο διάβασμα του μαθήματος αυτού στο σπίτι.

4. Γράψε ως ποσοστά τα ακόλουθα κλάσματα: (α) $\frac{1}{5}$, (β) $\frac{3}{8}$, (γ) $\frac{4}{10}$.

5. Γράψε ως ανάγωγα κλάσματα και ως δεκαδικούς αριθμούς τα ακόλουθα ποσοστά: (α) 3%, (β) 15%, (γ) 28% και (δ) 50%.
6. Μετέτρεψε σε δεκαδικούς αριθμούς τα ποσοστά: (α) 38%, (β) 15%, (γ) 20%, (δ) 130%, (ε) 250%.
7. Βρες τα ακόλουθα ποσά: (α) Το 10% ενός κιλού, (β) το 35% του δεκαχίλιαρου, (γ) το 30 % του ποσού 30.000€, (δ) το 75% των 120.000€ και (ε) το 80% των κατοίκων μιας πόλεως με πληθυσμό 125.000 κατοίκους.

Α.5.2. Προβλήματα με Ποσοστά

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:</u>
- το 1ο, τον τρόπο χρήσης των ποσοστών σε προβλήματα υπολογισμού φορολογίας,
- το 2ο, τον τρόπο χρήσης των ποσοστών σε προβλήματα εκπτώσεων και
- το 3ο, τον τρόπο χρήσης των ποσοστών σε θέματα τοκισμού κεφαλαίου.

<u>Οι δέκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες και αφορούν:</u>
(α) η $1^{η}$, η $2^{η}$, η $5^{η}$ και η $7^{η}$ τη χρήση των ποσοστών σε προβλήματα τοκισμού κεφαλαίου,
(β) η $3^{η}$, η $4^{η}$ και η $10^{η}$ τη χρήση των ποσοστών για τον υπολογισμό της έκπτωσης σε τιμές προϊόντων και
(γ) η $6^{η}$, η $8^{η}$ και η $9^{η}$ τη χρήση των ποσοστών σε θέματα φορολογίας εισπράξεων και αμοιβών.

<u>Η προτεινόμενη δραστηριότητα για το σπίτι έχει σκοπό:</u>
την κατανόηση του ρόλου των ποσοστών στα αποτελέσματα των εθνικών εκλογών.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>
1. Η τιμή πώλησης ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 15% και μετά από μια εβδομάδα μειώθηκε κατά 15%. Πότε συνέφερε να το αγοράσουμε;
2. Η πλευρά ενός τετραγώνου αυξήθηκε κατά 30%. Κατά ποιο ποσοστό αυξήθηκε η περίμετρός του και το εμβαδόν του;
3. Σε 8 μήνες πήραμε τόκο 120.000€ από ένα κεφάλαιο, με επιτόκιο 10%. Πόσο τόκο θα πάρουμε από το διπλάσιο κεφάλαιο σε ένα χρόνο με το ίδιο επιτόκιο;
4. Το 2001 ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής κόστιζε 1.200€. Το 2002, με την κυκλοφορία ενός νέου μοντέλου, η τιμή του μειώθηκε κατά 25%. Το 2003 η τιμή του μειώθηκε πάλι, κατά 20%. Πόση ήταν η τιμή του το 2003; Η συνολική μείωση της τιμής είναι το άθροισμα των διαδοχικών εκπτώσεων δηλαδή 45% της αρχικής του τιμής;

Κεφάλαιο Α.6. Ανάλογα ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

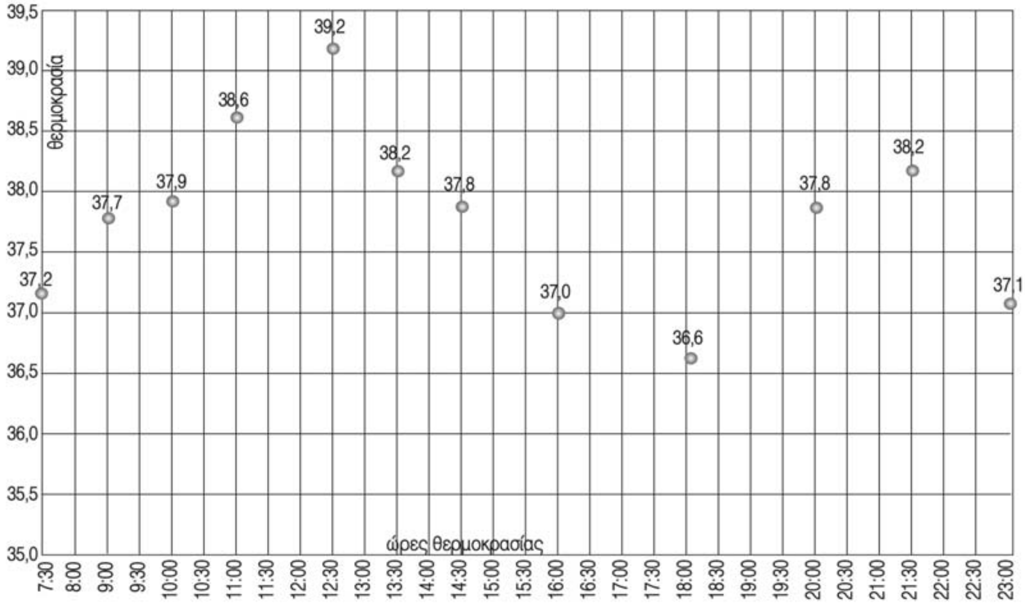
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 10 διδακτικές ώρες

Α.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:

- Η 1η, της σημασίας της χρήσης και της διάταξης των συντεταγμένων. [Υπόδειξη: Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τη θέση των πιονιών σε μια παρτίδα σκάκι σε αντιστοιχία με τις συντεταγμένες τους].
- Η 2η, της κατασκευής ενός διαγράμματος. [Υπόδειξη: Ζητείται από τους μαθητές να βρουν και να βαθμολογήσουν με κατάλληλες τιμές τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων ενός ορθοκανονικού συστήματος ημιαξόνων, στη συνέχεια να εντοπίσουν τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών του πίνακα και να τα ενώσουν με μια γραμμή που θα τους βοηθήσει να εκτιμήσουν τις τιμές των τεταγμένων που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τιμές των τετμημένων].



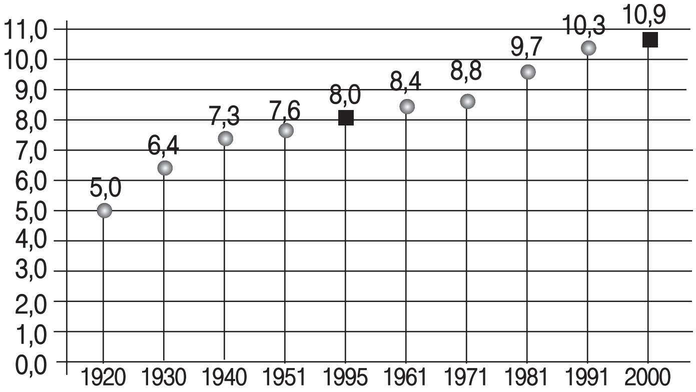
Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις - προβλήματα αφορούν τη χρήση των συντεταγμένων ορθοκανονικού συστήματαος ημιαξόνων σε διάφορες εφαρμογές.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

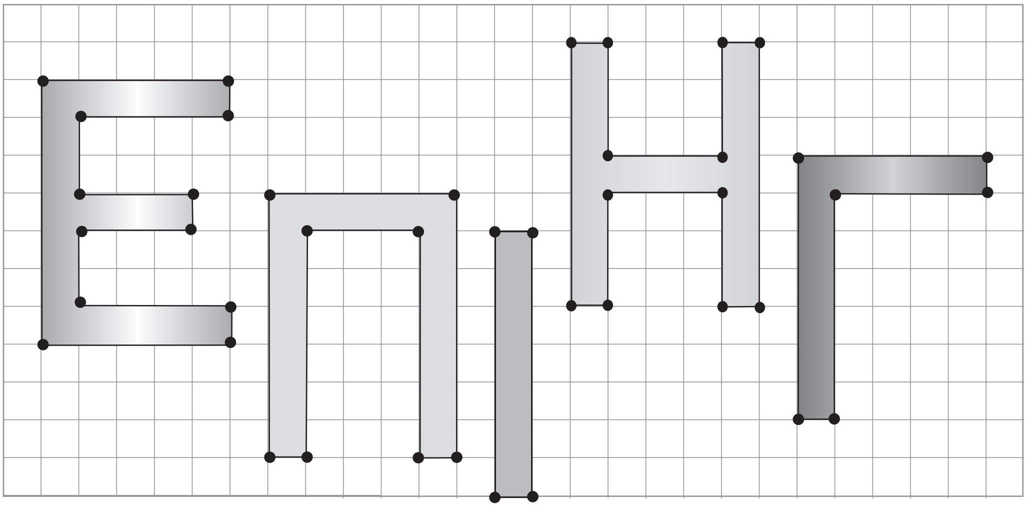
1. Βρες τα σημεία με τετμημένη το έτος και τεταγμένη τον πληθυσμό της Ελλάδας κατά προσέγγιση εκατοντάδων χιλιάδων, για κάθε μια από τις γραμμές του πίνακα που ακολουθεί. Σχεδίασε την καμπύλη μεταβολής του πληθυσμού και βρες: (α) Ποιος ήταν ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος 1955 και (β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός το 2000, αν η μεταβολή του πληθυσμού συνεχίσει με τον ρυθμό της τελευταίας δεκαετίας.

Ο Πληθυσμός της Ελλάδας		
Έτος	Κάτοικοι	Προσέγγιση
1920	5.016.889	5.000.000
1930	6.367.149	6.400.000
1940	7.344.860	7.300.000
1951	7.632.801	7.600.000
1961	8.388.553	8.400.000
1971	8.768.641	8.800.000
1981	9.740.417	9.700.000
1991	10.264.156	10.300.000

Το πρόβλημα εδώ είναι η παράσταση των μεγάλων αριθμών πάνω στον άξονα των τεταγμένων. Ως μονάδα προτείνεται να επιλεγεί για παράδειγμα το 1 εκατομμύριο με ένα δεκαδικό. Για την εύρεση της ενδιάμεσης τιμής (1955) καθώς και της τελευταίας τιμής (2000) μπορεί να γίνει χρήση της μεθόδου των τριών (άρα αναλογίας) και της εκ των υστέρων απεικόνισής τους στο σύστημα των ημιαξόνων.

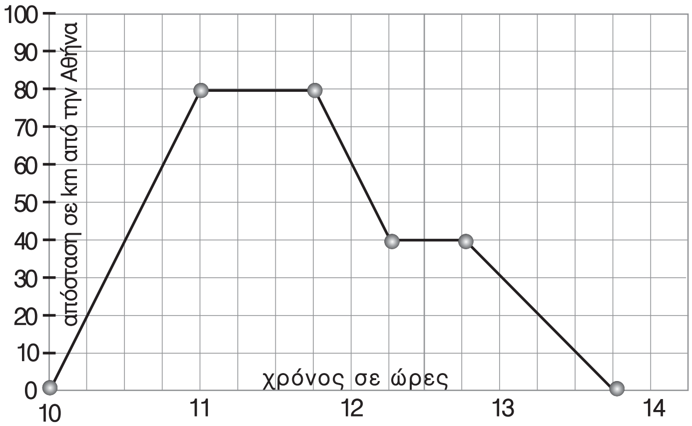


2. Στο παρακάτω σχήμα τα περιγράμματα των γραμμάτων έχουν κορυφές τα σημεία που σημαδεύτηκαν με κουκίδες (•). Με ποιο τρόπο μπορούμε να ονομάσουμε τη θέση των σημείων αυτών για να τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους με μοναδικό τρόπο;



3. Δύο φίλοι ταξίδεψαν με ιδιωτικό αυτοκίνητο από την Αθήνα ως την Θήβα και γύρισαν πάλι στην Αθήνα. Η διαδρομή που ακολούθησαν έχει καταγραφεί στο διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος μπορείτε να απαντήσετε στα ερωτήματα:
(α) Πόσο απέχει η Θήβα από την Αθήνα; (β) Πόση ώρα ταξίδεψαν για να φτάσουν ως τη Θήβα και ποια ήταν η ταχύτητά τους;.(γ) Σταμάτησαν στη Θήβα και αν ναι πόση ώρα; (δ) Έκαναν άλλη στάση κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τους και αν ναι, σε ποια χρονική στιγμή και πόσο διήρκεσε η στάση τους αυτή; (ε) Σε ποια απόσταση από την Αθήνα έγινε η στάση (στ) Ποια ήταν η συνολική χρονική διάρκεια του ταξιδιού τους; (ζ) Ποια ήταν η μέση ταχύτητά τους για ολόκληρο το ταξίδι; (η) Αν στην επιστροφή τους δεν έκαναν

στάση, πόση ώρα θα διαρκούσε το ταξίδι τους αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει άλλη ταχύτητα από αυτή που περιγράφεται στο διάγραμμα;



Α.6.2. Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Οι τέσσερις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:</u>

- η 1η, της έννοιας του λόγου των μηκών της πλευράς ενός τετραγώνου προς αυτό της περιμέτρου του για τρία διαφορετικά τετράγωνα. [<u>Υπόδειξη:</u> Οι μαθητές παρατηρούν την ισότητα των λόγων και οδηγούνται στην έννοια της αναλογίας που και αυτή με τη σειρά της οδηγεί στη διαισθητική έννοια της ομοιότητας των τετραγώνων].
- η 2η, της έννοιας της κλίμακας. [<u>Υπόδειξη:</u> Οι μαθητές παρατηρούν τη σμίκρυνση του σχήματος, βρίσκουν το λόγο των μεγεθών των αντιστοίχων διαστάσεων αντικειμένου και ειδώλου και συμπεραίνουν την κλίμακα της σμίκρυνσης].
- η 3η, της έννοιας της αναλογίας. [<u>Υπόδειξη:</u> Οι μαθητές συνήθως κάνουν το λάθος του προσθετικού μοντέλου και μέσα από αυτό οδηγούνται στην αναγκαία σωστή σχεδίαση του ζητούμενου σχήματος].
- η 4η, της παράλληλης παρατήρησης των περιπτώσεων, κατά τις οποίες οι λόγοι των ομολόγων πλευρών δύο σχημάτων είναι ή δεν είναι ίσοι. [<u>Υπόδειξη:</u> Σκοπός είναι να γίνει περισσότερο σαφής η έννοια των αναλόγων πλευρών και κατά συνέπεια, μέσω αυτής, σαφέστερη και η προσέγγιση της έννοιας των ομοίων σχημάτων, ως μεγέθυνση ή σμίκρυνση, μέσω της σύγκρισης των λόγων και περιμέτρων τους].

<u>Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό</u> τον τρόπο χρήσης της κλίμακας ενός χάρτη για την εύρεση των πραγματικών αποστάσεων.

<u>Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:</u>

(α) μία απλή, που έχει σκοπό την εύρεση των λόγων συγκεκριμένων ευθυγράμμων τμημάτων και (β) οκτώ πιο σύνθετες, που έχουν σκοπό το χειρισμό των αναλογιών.

<u>Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες για το σπίτι αφορούν:</u>

- η 1η, την κατασκευή σχημάτων υπό κλίμακα.
- η 2η, την εμπειρική διαπίστωση ότι γενικά είναι: $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta}$.
- η 3η, την εύρεση των πραγματικών αποστάσεων πόλεων από χάρτη δεδομένης κλίμακας και τη δημιουργία ενός πίνακα διπλής εισόδου για τις αποστάσεις των πόλεων μεταξύ τους.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

(α) <u>Ενδεικτικοί στόχοι:</u>

– Η αναγνώριση συγκεκριμένων αναλογιών σε διάφορα σχήματα
– Η απόκτηση καλύτερης αισθητικής αντίληψης

– Ο σχεδιασμός και η κατασκευή σχημάτων και αντικειμένων με αισθητικά κριτήρια
– Η σύνδεση της αισθητικής αντίληψης με κοινωνικές, πολιτιστικές, θρησκευτικές, επιστημονικές, οικονομικές κ.ά. συνθήκες

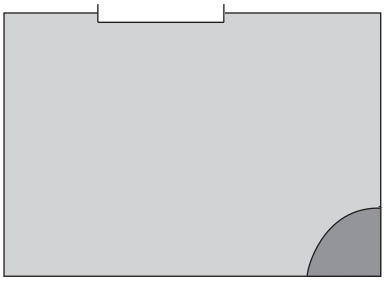
(β) Ενδεικτικές πηγές:
– Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια: Αθήνα, Εκδοτική Αθηνών.
– Απαρχές των Ελληνικών Μαθηματικών: Αθήνα, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος.
– http://www.asxetos.gr και άλλα σχετικά sites

(γ) Μαθήματα σύνδεσης: Μαθηματικά, Αισθητική Αγωγή, Πληροφορική, Ιστορία, Βιολογία κ.ά.

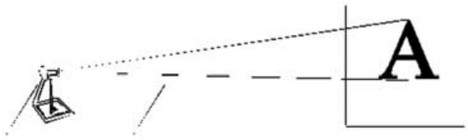
ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Στο σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός δωματίου σε κλίμακα 1:100. Να το επιπλώσεις με το δικό σου γούστο, αν έχεις τα παρακάτω έπιπλα με τις αντίστοιχες διαστάσεις:

Έπιπλα	Διαστάσεις
1 κρεβάτι	2m x 1m
1 κομοδίνο	0,4m x 0,3m
2 πολυθρόνες	0,8m x 0,9m
1 στρογγυλό τραπέζι	διαμέτρου 0,8m
1 βιβλιοθήκη	2m x 0,4m
1 γραφείο	1,2m x 0,6m
1 καρέκλα γραφείου	0,7m x 0,6m



2. Αν ένα γράμμα Α έχει ύψος 0,5 cm στην διαφάνεια και στην οθόνη προβάλλεται με ύψος 5 cm, πόσο θα είναι η μεγέθυνσή του;



3. Σε μια ισορροπημένη εφηβική διατροφή, η αναλογία υδατανθράκων προς πρωτεΐνες πρέπει να είναι 2:3, ενώ η αναλογία λιπών προς υδατάνθρακες πρέπει να είναι 1:4. Κάθε γραμμάριο λίπους είναι 10 θερμίδες, κάθε γραμμάριο υδατανθράκων είναι 4 θερμίδες και κάθε γραμμάριο πρωτεΐνης είναι 4 θερμίδες. Αν θέλεις να παίρνεις 2.500 θερμίδες την ημέρα, πώς θα φτιάξεις το διαιτολόγιό σου;
4. Βάφεις τους τοίχους ενός δωματίου πορτοκαλί χρώμα και έχεις για το σκοπό αυτό ανακατέψει 12 kg κόκκινο και 4 kg κίτρινο χρώμα. Μετά διαπιστώνεις ότι δεν φτάνει η ποσότητα για όλο τον τοίχο. Έχεις όμως, επιπλέον 15 kg κίτρινο χρώμα. Πόσα kg κόκκινο πρέπει να αγοράσεις για να φτιάξεις την ίδια απόχρωση του πορτοκαλί;
[Υπόδειξη: Η δραστηριότητα αυτή θα μπορούσε να γίνει, φυσικά, όχι με κιλά αλλά με μια μικρότερη μονάδα βάρους. Ακόμη, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τη σύγκριση κλασμάτων. Είναι πιθανή μια αρχική αυθόρμητη πρόταση των μαθητών (στηριγμένη στο προσθετικό μοντέλο), να προσθέσουμε στο κάθε χρώμα την ίδια ακριβώς ποσότητα, δηλαδή 3 kg. Την επαλήθευση ή μη της ορθότητας της πρότασης αυτής μπορεί να δώσει η ίδια η εμπειρία τους. Δηλαδή, εάν η ανάμειξη των χρωμάτων γίνει μετά την πρόσθεση 3 kg στο κάθε χρώμα, τότε το πορτοκαλί χρώμα που θα προκύψει δεν θα έχει ίδια απόχρωση με το αρχικό, αλλά θα είναι πιο σκούρο, αφού χρησιμοποιήθηκε περισσότερο κόκκινο από ότι έπρεπε. Στη συνέχεια πάλι με πειραματισμό θα μπορούσε να διαπιστωθεί από τους μαθητές ότι για να παραχθεί ίδια απόχρωση του πορτοκαλί θα πρέπει να προστεθεί μόνο 1 kg κόκκινο. Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να συνδεθεί με την ισοδυναμία των κλασμάτων. Θεωρώντας την ισοδυναμία όχι σαν τυπική μαθηματική σχέση, αλλά ως διαδικασία που στοχεύει σε ένα αποτέλεσμα (ίδια απόχρωση του πορτοκαλί) και επαληθεύεται μέσα από μια πραγματική - πειραματική οδό. Ακόμη οι έννοιες του μικρότερου ή του μεγαλύτερου μπορούν να υλοποιηθούν μέσα από το χρωματικό αποτέλεσμα (ποιο σκούρο ή πιο ανοιχτό)].

Α.6.3. Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση:

- η 1η, ότι όταν δύο ποσά μεταβάλλονται μαζί η μεταβολή δεν είναι πάντα ανάλογη [Υπόδειξη: Συγκρίνουμε τους λόγους 56:1,60, 81:1,80, 63:1,75, 68:1,70 και βρίσκουμε τους συντελεστές αναλογίας: 35, 45, 36 και 40, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Άρα δεν ισχύει ο ισχυρισμός].
- η 2η, της χρήσης του συντελεστή και των πινάκων αναλογίας [Υπόδειξη: Αν διαιρέσουμε τις εισπράξεις με την τιμή του κιλού 0,4_ θα βρούμε τα κιλά που πούλησε κάθε φορά, δηλαδή 15+7+13+8+9+12+6+4+11+5=90. Επομένως ξέχασε να σημειώσει 10 κιλά για 4].

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να καλύψουν διαφορετικές επιθυμητές δεξιότητες των μαθητών πάνω στο θέμα των αναλόγων ποσών, δηλαδή:

(α) να συμπληρώνουν πίνακες αναλόγων ποσών, όταν δίνεται ο λόγος τους, να υπολογίζουν το λόγο δύο αναλόγων ποσών, όταν δίνονται οι πίνακές τους και

(β) να χρησιμοποιούν το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας π.χ. ως περιεκτικότητα κλπ.

Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε έξι κατηγορίες:

(α) η 1η έχει σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης των αναλόγων ποσών με την εύρεση «σωστού ή λάθους»,

(β) η 2η είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμπλήρωση κενών,

(γ) η 3η και η 4η έχουν τον ίδιο σκοπό με τη συμπλήρωση πινάκων αναλόγων ποσών με τις αντίστοιχες τιμές,

(δ) η 5η είναι πρόβλημα συνταγής που έχει σκοπό τη χρήση των αναλογιών,

(ε) η 6η είναι πιο σύνθετη με σκοπό την χρήση συγκεκριμένης ιδιότητας των αναλογιών και

(στ) η 7η έχει σκοπό τη χρήση του ποσοστού, ως συντελεστή αναλογίας σε ανάλογα προβλήματα.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Σημείωσε με ένα «Χ» στη στήλη Β όταν τα ποσά είναι ανάλογα:

α/α	Α	Β
(1)	Η περίμετρος ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του.	
(2)	Η τιμή ενός υφάσματος και το μήκος του.	
(3)	Η αμοιβή ενός εργάτη και ο χρόνος εργασίας του.	
(4)	Το ύψος και η ηλικία ενός ατόμου.	
(5)	Ο χρόνος που κινείται ένα αυτοκίνητο και η ταχύτητά του.	
(6)	Η παροχή νερού και ο χρόνος που χρειάζεται για να αδειάσει ένα πλημμυρισμένο υπόγειο.	
(7)	Ο τόκος που δίνει ένα κεφάλαιο (μέσα σε ένα έτος) και το επιτόκιο με το οποίο τοκίζεται.	
(8)	Η πλευρά ενός κύβου και ο όγκος του.	
(9)	Το ύψος ενός τριγώνου με σταθερή βάση και το εμβαδόν του.	
(10)	Το ποσοστό έκπτωσης και η τιμή ενός προϊόντος.	

2. Όταν τα ποσά x και y είναι ανάλογα, ισχύει ότι: $\frac{y}{x} = α, α \neq 0$. Ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή; (α) όσο αυξάνεται το ποσό x θα αυξάνεται και το ποσό y και μάλιστα ανάλογα. (β) όσο ελαττώνεται το ποσό x θα ελαττώνεται και το ποσό y. (γ) όσο αυξάνεται το ποσό x θα ελαττώνεται το ποσό y.

3. Για τα ποσά x και y ισχύει: $\frac{y}{x}$ =25% . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

   (α) $y = 0{,}4x$ (β) $y = \frac{1}{4}x$ (γ) $x = \frac{1}{4}y$ (δ) $x = 0{,}25y$

4. Αν $\frac{y}{x} = \alpha$, $\alpha \neq 0$, βρες για κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν αν είναι σωστή ή λάθος: (α) $y = \alpha \cdot x$, (β) $\frac{y}{x} = \frac{1}{\alpha}$, (γ) $x \cdot y = \frac{1}{\alpha}$, (δ) $x = \frac{1}{\alpha} \cdot y$.
5. Ο λόγος δύο αριθμών είναι $\frac{15}{4}$. Αν ο ένας αριθμός είναι ο 60 να βρεις τον άλλον.
6. Για τις μεταβλητές x και y ισχύει η σχέση $y = x^3$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή; (α) το y είναι ανάλογο του x, (β) το y είναι ανάλογο του 1, (γ) το y είναι ανάλογο του x^3.
7. Ο λόγος δύο αριθμών είναι $\frac{7}{3}$. Αν ο μεγαλύτερος αριθμός είναι ο 84 να βρεθεί ο μικρότερος.
8. Ο λόγος δύο αριθμών είναι $\frac{25}{9}$. Αν ο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός 15 να βρεθεί ο μικρότερος.
9. Πόσο θα αυξηθεί η περίμετρος ενός ισοπλεύρου τριγώνου αν κάθε πλευρά του αυξηθεί κατά 3%.
10. Στη Μαίρη άρεσε πολύ ένα μπλουζάκι που είδε στη βιτρίνα ενός καταστήματος ρούχων. Η τιμή του είναι 30€ και έχει έκπτωση 25%. Η Μαίρη έχει μαζί της μόνο 22€. Μπορείς να απαντήσεις αν θα μπορέσει να αποκτήσει το μπλουζάκι; Πως δικαιολογείς την απάντησή σου;
11. Στα βιβλία ο Φ.Π.Α. είναι 4%. Πόσο θα πουληθεί μια εγκυκλοπαίδεια αξίας 3.500€;
12. Σε ένα ορθογώνιο οι διαστάσεις του είναι x και x+3. (α) Βρες την περίμετρό του Π. (β) Εξέτασε αν τα ποσά x και Π είναι ανάλογα. (γ) Συμπλήρωσε τον πίνακα που ακολουθεί και να κάνε την γραφική παράσταση της σχέσης που περιγράφει.

X	O		4	
Π		10		27

Α.6.4. Γραφική παράσταση αναλογίας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο τη συνειδητοποίηση ότι οι αντίστοιχες τιμές δύο αναλόγων ποσών συνιστούν διατεταγμένα ζεύγη, τα οποία αναπαρίστανται στο επίπεδο με σημεία που ανήκουν σε μία ευθεία με αρχή την αρχή (0,0) των ημιαξόνων Οx και Οy. [Υπόδειξη: Το αντίστροφο, δηλαδή, ότι κάθε σημείο αυτής της ευθείας έχει συντεταγμένες οι οποίες ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση αναλογίας, δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη. Εάν όμως ο διδάσκων επιθυμεί να το αναφέρει μπορεί να επιλέξει ένα σημείο π.χ. το Α(1,3) που ανήκει στην ημιευθεία του σχήματος της προτεινόμενης δραστηριότητας και να ζητήσει από τους μαθητές να δικαιολογήσουν το λόγο για τον οποίο οι συντεταγμένες αυτού ικανοποιούν τη δοθείσα σχέση αναλογίας].

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δείξει τη διαφορά και την ομοιότητα που έχουν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις κατασκευής γραφικής παράστασης σχέσεων, από τις οποίες οι δύο είναι σχέσεις αναλογίας και οι άλλες δύο δεν είναι.

Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) η 1η και 2η έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας κατασκευής της γραφικής παράστασης μιας σχέσης αναλογίας,

(β) η 3η έχει σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας αντιστοίχισης των πινάκων τιμών αναλόγων ποσών με τις αντίστοιχες σχέσεις αναλογίας και

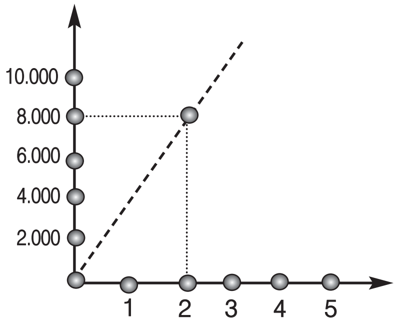
(γ) η 4η έχει σκοπό τη χρήση της γραφικής παράστασης μιας σχέσης αναλογίας προκειμένου να βρεθεί η μία συντεταγμένη, όταν είναι γνωστή η άλλη σε ένα πρόβλημα.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Η γραφική παράσταση μιας σχέσης είναι ευθεία γραμμή που αρχίζει από το σημείο (0,4). Να γράψεις τη γενική μορφή της σχέσης που αναπαριστά η ευθεία αυτή.

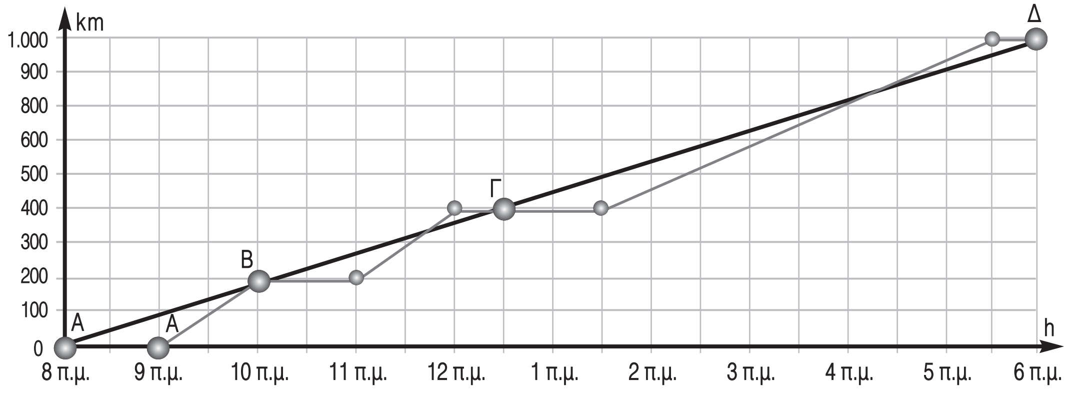
2. Να εξετάσεις αν τα ζεύγη: (3,1), $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, (9,3) είναι σημεία της γραφικής παράστασης μιας σχέσης αναλογίας..

3. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική αναπαράσταση μιας σχέσης αναλογίας.
(α) Αντίγραψε τη γραφική αναπαράσταση σε μιλιμετρέ χαρτί.
(β) Βρες τον συντελεστή αναλογίας της σχέσης αναλογίας.
(γ) Εξέτασε αν το σημείο $\left(\frac{1}{2}, 1000\right)$ είναι σημείο της γραφικής αναπαράστασης.
(δ) Συμπλήρωσε τον πίνακα και βρες στο σχήμα σου τα αντίστοιχα σημεία.



Χρόνος	1,5	5	
Χρήμα			5.000

4. Ένα φορτηγό (ευθεία γραμμή) και ένα λεωφορείο (τεθλασμένη γραμμή) ξεκινούν από τη πόλη Α και πάνε στην Δ, περνώντας από τις πόλεις Β και Γ. Το φορτηγό δεν κάνει καμία στάση, ενώ το λεωφορείο κάνει δύο. Μπορείς να φτιάξεις πίνακες, που να περιγράφουν τα ακριβή δρομολόγια των οχημάτων και τις ταχύτητες τους;



Α.6.5. Προβλήματα αναλογιών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ:

Να δοθεί έμφαση στη μέθοδο που οφείλει να ακολουθήσει ο μαθητής προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα. Ειδικά για τα προβλήματα που αναφέρονται στα ανάλογα ποσά πρέπει να μπορεί να αναγνωρίζει αν πράγματι έχει να κάνει με ποσά ανάλογα, συνεπώς πρέπει να έχει κατανοήσει τη σημασία του ορισμού και του πίνακα τιμών των αναλόγων ποσών, της σχέσης αναλογίας και της γραφικής παράστασης αυτής.

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο, να δείξει ότι μπορούμε να επιλύουμε τα προβλήματα αναλόγων ποσών με δύο ισοδύναμους τρόπους: (α) Την αριθμητική επίλυση, που κάνει χρήση του πίνακα των αναλόγων ποσών και (β) Τη γραφική επίλυση, που κάνει χρήση της γραφικής παράστασης των σχέσεων αναλογίας και
- το 2ο, να αντιμετωπίζεται με αριθμητικό τρόπο ένα περισσότερο σύνθετο πρόβλημα αναλόγων ποσών με ποσοστά κέρδους και έκπτωσης.

Οι δέκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) η 1η έως και η 4η είναι απλά προβλήματα, που έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας χρήσης των ιδιοτήτων των αναλόγων ποσών,

(β) η 5η έως και η 9η είναι πιο σύνθετα προβλήματα με σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας χρήσης των ποσοστών και

(γ) 10η είναι πρόβλημα με σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας κατασκευής διαγράμματος.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Μία βιομηχανία λαμπτήρων έκανε έλεγχο ποιότητας του προϊόντος της και βρήκε ότι το 2% της παραγωγής της ήταν ελαττωματικό. Σε μία παραγγελία 5.000 λαμπτήρων, από έναν πολύ καλό της πελάτη, πόσους επιπλέον καλούς λαμπτήρες πρέπει να στείλει, χωρίς χρέωση, ώστε να μην υπάρχουν παράπονα; Ή τι έκπτωση πρέπει να κάνει, για τον ίδιο λόγο;
2. Τα 250 gr χρυσού κοστίζουν 500€ Ποια είναι η τιμή του κιλού;
3. Δύο έμποροι συνεταιρίστηκαν σε μία επιχείρηση. Τα κέρδη της επιχείρησης κατά τον πρώτο χρόνο λειτουργίας της ήταν τα $\frac{2}{7}$ του συνολικού κεφαλαίου. Αν ο πρώτος έμπορος είχε κέρδος 3.000€ και ο δεύτερος 4.000€, να βρεις το κεφάλαιο που διέθεσε ο καθένας.
4. Δύο αθλητικοί όμιλοι έχουν καθιερώσει τις εξής τιμές: Α' όμιλος: Εγγραφή 5.000€ και 1.000€ ανά έτος και Β' όμιλος: 2.000€ ανά έτος. Μπορείς να βρεις σε ποια περίπτωση συμφέρει να εγγραφεί κάποιος σε έναν από τους δύο ομίλους;

Προτεινόμενη λύση:

Το ποσό που θα πληρώσει κάποιος στον **Α' όμιλο** δίνεται από τον τύπο:

Ποσό πληρωμής = Ποσό εγγραφής + Ποσό συνδρομής · Αριθμός ετών

Δηλαδή: $y = 5000 + 1000 \cdot x$ Άρα τα ποσά x και y δεν είναι ανάλογα.

Ας συμπληρώσουμε τον πίνακα αντίστοιχων τιμών για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ έτη.

x	0	1	2	3	4	**5**	6	...
y	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	**10.000**	11.000	...

Δηλαδή για $x = 0$ είναι: $y = 5000 + 0 \cdot 1000 = 5000 + 0 = 5000$

για $x = 1$ είναι: $y = 5000 + 1 \cdot 1000 = 5000 + 1000 = 6000$

για $x = 2$ είναι: $y = 5000 + 2 \cdot 1000 = 5000 + 2000 = 7000$

για $x = 3$ είναι: $y = 5000 + 3 \cdot 1000 = 5000 + 3000 = 8000$

για $x = 4$ είναι: $y = 5000 + 4 \cdot 1000 = 5000 + 4000 = 9000$ κ.τ.λ.

Το ποσό που θα πληρώσει στον **Β' όμιλο** είναι ανάλογο του αριθμού των ετών, αφού:

Ποσό πληρωμής = Ποσό συνδρομής · Αριθμός ετών **Άρα: y = 2.000·x**

Ο συντελεστής αναλογίας, που αντιστοιχεί στο κόστος ανά έτος, είναι α=2.000 και ο πίνακας αντίστοιχων τιμών είναι ο ακόλουθος:

x	0	1	2	3	4	**5**	6	...
y	0	2.000	4.000	6.000	8.000	**10.000**	12.000	...

Συγκρίνοντας τους δύο πίνακες βγάζουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

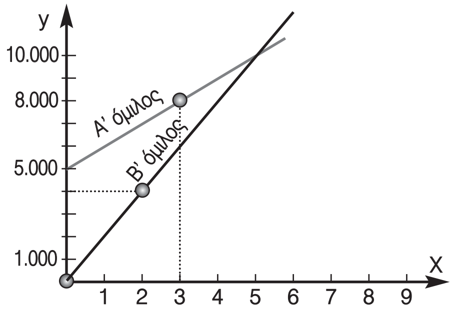
- Αν παραμείνει κάποιος μέλος ως **5 έτη**, συμφέρει να εγγραφεί στον **όμιλο Β'**
- Για ακριβώς **5 έτη**, το ποσό πληρωμής είναι το ίδιο και στους δύο ομίλους
- Για παραμονή πάνω από **5 έτη** συμφέρει η εγγραφή στον **όμιλο Α'**

Ας εξετάσουμε τις γραφικές αναπαραστάσεις των δύο σχέσεων.

Για το σχεδιασμό τους θα μας χρειαστούν δύο τυχαία ζεύγη τιμών από κάθε πίνακα τιμών:

Έστω: Για τον **Α' όμιλο: (0, 5.000)** και **(3, 8.000)** και για τον **Β' όμιλο: (0, 0)** και **(2, 4.000)**

Παρατηρούμε ότι:



- Το τμήμα της ημιευθείας για τον όμιλο Α' και για τα έτη από **0** έως **5**, βρίσκεται «ψηλότερα» από το αντίστοιχο τμήμα της ημιευθείας για τον όμιλο Β'. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των τεταγμένων **y**, όταν η τετμημένη **x** παίρνει τιμές από **0** έως **5**, για τον όμιλο Α' είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες για τον Β' όμιλο.
- Για **x=5** οι δύο ημιευθείες τέμνονται, δηλαδή έχουν την ίδια τεταγμένη **y=10.000**
- Για **x > 5**, η ημιευθεία για τον όμιλο Β' «περνάει» πάνω από την ημιευθεία για τον όμιλο Α', δηλαδή για τις ίδιες τιμές των τετμημένων **x > 5** οι τεταγμένες της ημιευθείας για τον όμιλο Β' είναι μεγαλύτερες των τεταγμένων της ημιευθείας για τον όμιλο Α'. Άρα είναι φανερό ότι για πάνω από 5 έτη συμφέρει η εγγραφή στον όμιλο Α'.

Α.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες αποσκοπούν</u> στη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση της έννοιας της ταυτόχρονης μεταβολής δύο μεγεθών, όπως είναι αυτές για παράδειγμα που αφορούν:

- η 1η, την ταχύτητα του αυτοκινήτου και το χρόνο που απαιτείται για να διανυθεί μια απόσταση,
- η 2η, τον αριθμό των εργατών και τις ημέρες εργασίας για την ολοκλήρωση ενός έργου
- η 3η, τη μεταβολή των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου σταθερού εμβαδού. [<u>Υπόδειξη:</u> Είναι αναγκαίο να καταλήξουν μόνοι τους οι μαθητές: στη διατύπωση του ορισμού των αντιστρόφως ανάλογων ποσών ή μεγεθών, στη σχέση που συνδέει αυτά (σταθερό γινόμενο) και στο είδος (υπερβολή) της γραφικής παράστασης που συνδέει τα ζεύγη των τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών].

<u>Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό</u> να δείξει την αντιπαραβολή χειρισμού των ιδιοτήτων και σχέσεων των αντιστρόφως ανάλογων ποσών με εκείνα των αναλόγων ποσών, στην επίλυση ενός προβλήματος.

Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

(α) η 1η έχει σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης των αναλόγων ποσών με την εύρεση «σωστού ή λάθους»,
(β) η 2η είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμπλήρωση κενών,
(γ) η 3η έχει σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης των αντιστρόφως αναλόγων ποσών από τους αντίστοιχους πίνακες μεταβολής,
(δ) η 4η έχει σκοπό τη συμπλήρωση πίνακα αντιστρόφως αναλόγων ποσών με τις αντίστοιχες τιμές και
(ε) η 5η έως και η 7η είναι πιο σύνθετες, που έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας χρήσης της γραφικής παράστασης και επίλυσης προβλημάτων που αφορούν αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Ένα βιβλίο πωλείται με ποσοστό ΦΠΑ 4%. Αν η τιμή πώλησης του βιβλίου είναι 2.800 πόση είναι η αξία του και πόσος είναι ο φόρος προστιθέμενης αξίας;
2. Συμπληρώστε τον πίνακα, ώστε τα δύο ποσά Α και Β να είναι αντιστρόφως ανάλογα:

Ποσό Α	2	4	5	8
Ποσό Β	20			

3. Τα ποσά Α και Β είναι αντιστρόφως ανάλογα. Υπολόγισε την τιμή του αγνώστου x σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α)

Ποσό Α	3	21
Ποσό Β	5	x

β)

Ποσό Α	7	49
Ποσό Β	x	2,1

4. Σημείωσε «Χ» στην στήλη Β όταν τα παρακάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα:

α/α	Α	Β
(1)	Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου που έχει σταθερό εμβαδόν.	
(2)	Η τιμή ενός οικοπέδου και η απόστασή του από το κέντρο της πόλης.	
(3)	Η τιμή του εισιτηρίου υπεραστικού λεωφορείου και η απόσταση του τόπου αναχώρησης και του προορισμού.	
(4)	Οι ημέρες που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου και οι ώρες που εργάζεσαι κάθε μέρα.	
(5)	Η βάση και το ύψος ενός τριγώνου σταθερού εμβαδού.	
(6)	Η παροχή νερού και ο χρόνος που χρειάζεται για να αδειάσει ένα πλημμυρισμένο υπόγειο.	
(7)	Η πλευρά ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του.	
(8)	Ο αριθμός των παιδιών σε μια κατασκήνωση και οι ημέρες που περνούν με ορισμένη ποσότητα τροφής.	
(9)	Η ακτίνα ενός κύκλου και το μήκος του κύκλου.	
(10)	Η τιμή ενός προϊόντος χωρίς ΦΠΑ και η τιμή του μαζί με το ΦΠΑ.	

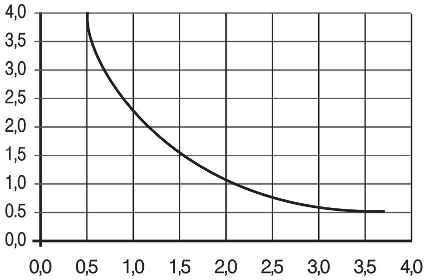
5. Ένας εργάτης εκτελεί τα $\frac{3}{4}$ ενός έργου σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσει ολόκληρο το έργο;
6. Δέκα εργάτες χρειάζονται 3 ημέρες για να φυτέψουν ένα χωράφι. Σε πόσες ημέρες θα το φυτέψουν 12 εργάτες ίδιας απόδοσης;
7. Δύο ορθογώνια έχουν το ίδιο εμβαδόν. Αν οι διαστάσεις του ενός είναι 4cm και 5cm υπολόγισε πόσα cm θα είναι οι διαστάσεις του δεύτερου αν γνωρίζεις ότι είναι φυσικοί αριθμοί;
8. Σε ένα βουστάσιο με 100 αγελάδες χρειάζονται 3 τόνοι ζωοτροφής για 15 ημέρες. Ο κτηνοτρόφος αγόρασε άλλες 20 αγελάδες. Πόσες ημέρες θα περάσει αν στην αποθήκη του υπάρχουν 2,5 τόνοι ζωοτροφής;
9. Μία βρύση γεμίζει μία δεξαμενή σε 7 ώρες. Μία δεύτερη γεμίζει την δεξαμενή σε 5 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσουν την δεξαμενή και οι δύο μαζί;

10. Αν η βάση ενός τριγώνου του αυξηθεί κατά 20% και το ύψος του παραμείνει σταθερό, πόσο θα αυξηθεί το εμβαδόν του; Και κατά ποιο ποσοστό αν και το ύψος αυξηθεί κατά 20%;

11. Ένα ηλεκτρικό ψυγείο πουλήθηκε με έκπτωση 12% στην τιμή των 880€. Ποια θα ήταν η τιμή του αν είχε γίνει έκπτωση 20%.

12. Μια δεξαμενή γεμίζει από 6 βρύσες σε 10 ώρες. Πόσες βρύσες πρέπει να προσθέσουμε για να γεμίζει σε 3 ώρες. (Όλες οι βρύσες έχουν την ίδια παροχή).

13. Οι τιμές δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών αναπαριστώνται από την υπερβολή του σχήματος. Να συμπληρώσεις τον πίνακα αντιστοίχων τιμών των δύο ποσών, βρίσκοντας την συντεταγμένη που λείπει.



x	1/2		2		4
y		2		3	

Να ελέγξεις αν οι τιμές που βρήκες είναι σωστές.

Κεφάλαιο Α.7. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 15 διδακτικές ώρες

Α.7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση, από τους μαθητές, της έννοιας των αρνητικών αριθμών και της ανάγκης εισαγωγής τους στα μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση:

- η 1η, μεταξύ των θερμοκρασιών πάνω ή κάτω από το μηδέν,
- η 2η, μεταξύ ορόφων πάνω ή κάτω του ισογείου και
- η 3η, μεταξύ αποστάσεων πάνω ή κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό την εφαρμογή των ορισμών και την απόκτηση της δεξιότητας από τους μαθητές να χειρίζονται κατάλληλα τους θετικούς και τους αρνητικούς αριθμούς.

Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε έξι κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(β) η 2η αφορά τη διάκριση των θετικών από τους αρνητικούς αριθμούς,
(γ) η 3η είναι άσκηση συμπλήρωσης απαντήσεων σωστό ή λάθος,
(δ) η 4η αφορά τη διάκριση των ομόσημων και των ετερόσημων αριθμών,
(ε) η 5η αφορά τη χρήση των αρνητικών αριθμών και
(στ) η 6η και η 7η σχετίζονται με τη χρήση του ορισμού της τετμημένης.

Προτείνεται μια δραστηριότητα για το σπίτι που έχει στόχο την αντιστοίχιση χρονικών γεγονότων σε σημεία του άξονα των ρητών.

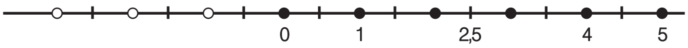
ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Ένας έμπορος στο τέλος του μήνα διαπίστωσε ότι εισέπραξε 1.532,85€ και ότι χρωστάει στον προμηθευτή του 1.757,35€. Μπορείς να βρεις και να γράψεις, στο πλαίσιο, έναν αριθμό που να εκφράζει το κέρδος ή τη ζημιά του εμπόρου για το μήνα αυτό; $\boxed{}$

2. Προσπάθησε να βρεις τις διαφορές

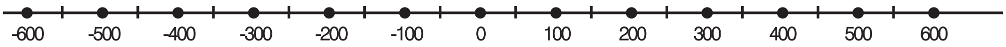
5–1	5–2,5	5–4	5–5	5–7,5	5–8

και σημείωσε τα αποτελέσματα που λείπουν στην ευθεία με τους αριθμούς.



(η δραστηριότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εισαγωγική στην τάξη για την παρουσίαση της αναγκαιότητας επέκτασης της πράξης της αφαίρεσης, πέρα από τους φυσικούς αριθμούς, όταν αφαιρούμε μεγαλύτερο αριθμό από μικρότερο)

3. Βρες μέχρι δέκα χρονολογίες που αφορούν τα πιο σημαντικά ιστορικά γεγονότα, από το 600 π.Χ. έως και το 600 μ.Χ. περίπου και τοποθέτησέ τις στην παρακάτω ευθεία των ρητών αριθμών.



4. Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους αριθμούς: 3, –8, +5, 9, –2, –7, –104, 35, +52.

Θετικοί αριθμοί	
Αρνητικοί αριθμοί	

5. Τοποθέτησε σε άξονα τα σημεία: –5, +3, 0, 1, –1, +4.
6. Βρες τα συμμετρικά σημεία ως προς την αρχή Ο του άξονα x'Ox των σημείων: Α με τετμημένη 2, Β με τετμημένη 5, Γ με τετμημένη –4, Δ με τετμημένη –3 και Γ με τετμημένη –2.

Α.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της έννοιας:

- η 1η, της απόστασης δύο σημείων του άξονα των ρητών (αρνητικών και θετικών) αριθμών,
- η 2η, των αντιθέτων ρητών αριθμών και
- η 3η, της διάταξης των ρητών (αρνητικών και θετικών) αριθμών.

Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο η προσπάθεια αυτή να καταλήξει στους ορισμούς: της απόλυτης τιμής ρητού αριθμού ως απόσταση του σημείου με τετμημένη τον ρητό από την αρχή Ο του άξονα, των αντιθέτων ρητών αριθμών και της διάταξης των ρητών αριθμών. Επίσης, στους κατάλληλους τρόπους για να βρίσκουν οι μαθητές, με ακρίβεια ή με προσέγγιση, τον ρητό που αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα, να αναγνωρίζουν ποια είναι η σχετική θέση στον άξονα των αντιθέτων αριθμών, να συγκρίνουν δύο ρητούς, σχετικά με τη θέση στον άξονα, και να διατάσσουν δύο ή περισσότερους ρητούς.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να κάνουν κατανοητό:

- το 1ο, τον τρόπο τοποθέτησης των ρητών στο άξονα και τη διάταξη διαφόρων ρητών αριθμών,
- το 2ο, την εύρεση του σημείου με τετμημένη αντίθετη από την τετμημένη ενός δεδομένο σημείου και
- το 3ο, την εύρεση των ρητών που έχουν δεδομένη απόλυτη τιμή.

<u>Οι δεκατρείς προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:</u>

(α) η $1^η$ και η $2^η$ είναι ασκήσεις συμπλήρωσης κενού,
(β) η $3^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης απαντήσεων σωστού ή λάθους,
(γ) η $4^η$ έως και η 6η αφορούν την απόλυτη τιμή ρητού,
(δ) η $7^η$ και η 8η αφορούν την εύρεση σημείων του άξονα με δεδομένες τετμημένες και
(ε) η $9^η$ έως και η $13^η$ αφορούν τη σύγκριση και τη διάταξη ρητών αριθμών.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Δύο αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές. Ποια σχέση συνδέει τους δύο αριθμούς;
2. Συμπλήρωσε τον πίνακα που ακολουθεί:

x	–4				
–x		–1			
–(–x)			5		
|x|				6	
|–x|					2

3. Να γίνουν οι πράξεις: (α) $|-3| + |-12| - |-8|$ και (β) $|-10|\cdot|-9| - \dfrac{|+8|\cdot|-5|}{|-10|}$
4. Σύγκρινε δύο αριθμούς που έχουν απόλυτες τιμές, οι οποίες διαφέρουν κατά 1.
5. Συμπλήρωσε με το κατάλληλο σύμβολο, $<$, $=$, ή $>$, τα κενά των σχέσεων:
(α) –3...–2, (β) –7...1, (γ) 0...+4, (δ) –10...–11, (ε) +22...35, (στ) 3...–38, (ζ) |+5|...|–5|, (η) |–9|...|+5|, (θ) –2...–|–2|, (ι) –4...–(–4).
6. Να διαταχθούν σε φθίνουσα σειρά οι αριθμοί: +8,6, 0, –7,4, ,+5,2, –1,33 και –6.

Α.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο</u> τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της έννοιας του αλγεβρικού αθροίσματος δύο ρητών (αρνητικών και θετικών) αριθμών και της ανάπτυξης της δεξιότητας για τον τρόπο υπολογισμού του, μέσα από την εύρεση των αυξομειώσεων της τιμής ενός προϊόντος, μέσα από την αντιστοίχιση τριών διαφορετικών εκφράσεων (λεκτική, αλγεβρική και τελικό αποτέλεσμα) του αθροίσματος.
Στη συνέχεια γίνεται προσπάθεια να εξάγουν οι μαθητές, αν είναι δυνατόν μόνοι τους, με την διακριτική καθοδήγηση του διδάσκοντος, τα συμπεράσματά τους υπό μορφή ορισμών και κανόνων. Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο αυτή η προσπάθεια να καταλήξει υπό μορφή κανόνα που ορίζει τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται το άθροισμα δύο ρητών σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται, σχετικά το πρόσημό τους και τη σύγκριση των απολύτων τιμών τους καθώς και για την επέκταση της ισχύος των ιδιοτήτων της πρόσθεσης από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς.

<u>Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν:</u>

- το $1^ο$, τον τρόπο εφαρμογής των κανόνων της πρόσθεσης των ρητών σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις με βάση τις αυξομειώσεις των ενδείξεων του θερμομέτρου και
- το $2^ο$, τον τρόπο που εφαρμόζεται για να υπολογιστούν αθροίσματα πολλών προσθετέων.

Οι οκτώ προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε έξι κατηγορίες:

(α) η $1^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης απαντήσεων σωστού ή λάθους,
(β) η $2^η$ έως και η 4η αφορούν την πρόσθεση δύο ρητών,
(γ) η $5^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(δ) η $6^η$ αφορά τον έλεγχο ορθότητας των προσθέσεων σε μαγικά τετράγωνα και
(ε) η $7^η$ και η 8η αφορούν τον υπολογισμό αθροισμάτων πολλών προσθετέων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Δίνονται τρεις ρητοί αριθμοί: x=–3,2, y=8, z=–4,5.
Υπολόγισε τα αθροίσματα: (α) των x και y με το z, (β) των x και y με το αντίθετο του z, (γ) του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z και (δ) του αντίθετου του x με το αντίθετο του y και το αντίθετο του z.
2. Δίνεται το άθροισμα Α = (–7,8) + (–4,8) + 6 + (–0,1) + 3,8 και ζητείται: (α) Να υπολογίσεις το Α, (β) Να βρεις το Β που προκύπτει από το Α, αν αντικατασταθούν όλοι οι όροι του με τους αντίθετους αριθμούς και (γ) Να υπολογίσεις το Β. Τι παρατηρείς;

Α.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της έννοιας της διαφοράς δύο ρητών (αρνητικών και θετικών) αριθμών και της ανάπτυξης της δεξιότητας του τρόπου υπολογισμού της, μέσα από τη διάταξη των θερμοκρασιών των διαφόρων μηνών του έτους από ένα
συγκεκριμένο διάγραμμα, τον υπολογισμό των διαφορών μεταξύ του πιο κρύου και πιο ζεστού μήνα του έτους καθώς και τον υπολογισμό των διαφορών μεταξύ των θερμοκρασιών κάθε δύο διαδοχικών μηνών.

Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο αυτή η προσπάθεια να καταλήξει στον κανόνα που ορίζει την αφαίρεση των ρητών αριθμών ως πρόσθεση του αντιθέτου ρητού του αφαιρετέου στον μειωτέο, καθώς και στους κανόνες που ισχύουν για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με προσθέσεις και αφαιρέσεις και τον τρόπο που γίνεται η απαλοιφή των παρενθέσεων σε αυτές.

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το $1^ο$ να δείξει τον τρόπο εφαρμογής του ορισμού της αφαίρεσης ρητών αριθμών,
- το $2^ο$, με αφορμή ένα καθημερινό πρόβλημα, η απάντηση του οποίου απαιτεί την εύρεση της λύσης μιας εξίσωσης που οδηγεί στην αφαίρεση δύο ρητών, γίνεται προσπάθεια να γνωρίσουν οι μαθητές ότι η διαφορά δύο ρητών είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης β+x=α, δηλαδή η x=α–β,
- το $3^ο$ αφορά δύο παραδείγματα για τον τρόπο που λύνονται οι χαρακτηριστικές εξισώσεις της μορφής x+α=β και α–x=β σύμφωνα με τη θεωρία και
- το $4^ο$ αφορά τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικής παράστασης με προσθέσεις και αφαιρέσεις, καθώς και την απαλοιφή των παρενθέσεων.

Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:

(α) η $1^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης απαντήσεων σωστού ή λάθους,
(β) η $2^η$, η $5^η$ και η $7^η$ αφορούν την εύρεση των διαφορών δύο ρητών αριθμών με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας,
(γ) η $3^η$, η $4^η$, η $8^η$ και η $9^η$ αφορούν τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με αυξανόμενο βαθμό δυσκολίας και
(δ) η $6^η$ αφορά τη λύση διαφόρων εξισώσεων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Υπολόγισε τις διαφορές: (α) $-10-(-10)$, (β) (στ) $-4{,}8-(-8{,}4)$, (γ) $5{,}25-\left(+\frac{5}{4}\right)$, (δ) $-12-\left(-\frac{3}{4}\right)$
2. Κάνε τις πράξεις: (α) $(-5)+(-2)-(+7)$, (β) $(-4)-(+10)+(+12)$.
3. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης: $α + 3 - β + γ - δ$, αν γνωρίζεις ότι: (α) $α=-2$, $β=-3$, $γ=0$, $δ=8$ και (β) $α=5$, $β=4$, $γ=-9$, $δ=-20$.
4. Βρες τις τιμές των x και y αν γνωρίζεις ότι: $Α = x + (-8) - (-3)$ και $Β = 3 - y +(-7)$ και ότι $Α=-Β$ και $x-y = 4$.
5. Υπολόγισε τι τιμή των παραστάσεων αφού πρώτα απαλείψεις τις παρενθέσεις και τις αγκύλες: (α) $0{,}54 - [3 + 0{,}45 - (2 - 0{,}1)]$, (β) $-3{,}5 + [-(3{,}7 - 2) -2{,}4] - (2{,}3 - 3{,}2)$ και (γ) $-(-3 + 1) - [-4 + (-2 + 8) - (-10 - 3 + 2)] - (-7 + 14)$.
6. Δίνεται η παράσταση $Α = (-5) + (+8) - (+10) - (-9)$ και ζητείται: (α) Να μετατρέψεις τη παράσταση Α, έτσι ώστε να γίνει άθροισμα ρητών αριθμών, (β) Μετά να χωρίσεις του θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς, (γ) Στη συνέχεια να μετατρέψεις την παράσταση Α σε άθροισμα ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού και (δ) να υπολογίσεις την παράσταση Α.

Α.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της έννοιας του γινομένου δύο ρητών αριθμών και της ανάπτυξης της δεξιότητας του τρόπου υπολογισμού του, μέσα από τη λύση πρακτικών προβλημάτων, η οποία απαιτεί τη χρήση των πρόσημων των ρητών αριθμών.

Για να γίνει φανερή στους μαθητές η αναγκαιότητα χρήσης των πρόσημων των ρητών, στην παρουσίαση του κανόνα πολλαπλασιασμού τους, πρέπει να έχει αυτή κάποιο συγκεκριμένο νόημα. Για παράδειγμα, γίνεται πιο εύκολα αποδεκτή η σύμβαση, όταν χρησιμοποιείται το αρνητικό πρόσημο προκειμένου να εκφραστεί η ζημία μιας επιχείρησης ή ενός εμπόρου. Επί του προκειμένου, είναι αναγκαίο αυτή η προσπάθεια να καταλήξει:

(α) στον κανόνα που ορίζει τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται το γινόμενο δύο ρητών σε όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται σχετικά το πρόσημό τους,

(β) στην επέκταση της ισχύος των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς,

(γ) στον ορισμό της έννοιας του αντιστρόφου ρητού αριθμού και

(δ) στον τρόπο του υπολογισμού του πρόσημου του γινομένου πολλών παραγόντων, ως άμεση συνάρτηση του πλήθους (άρτιο ή περιττό) των παραγόντων αυτών.

[Σημείωση: Στην προτεινόμενη δραστηριότητα για τη τάξη γίνεται προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η ανάγκη της χρήσης του αρνητικού πρόσημου ενός ρητού για να εκφραστεί η έννοια της ζημίας. Η σύμβαση, όμως, αυτή καλύπτει τις περιπτώσεις του γινομένου δύο ρητών που είναι και οι δύο θετικοί (χρόνος και ζημία) ή ο ένας θετικός (χρόνος) και ο άλλος αρνητικός (ζημία). Δεν καλύπτει, όμως, την περίπτωση που είναι και οι δύο αρνητικοί. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται, στη συνέχεια, το αριθμητικό μοντέλο που παρουσιάζει το ρυθμό αύξησης του γινομένου δύο ρητών (μέχρι να γίνει από αρνητικό θετικό), όταν ο ένας παράγων μειώνεται κατά μία μονάδα. Το βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου παρουσίασης είναι ότι, αναγκαστικά, αφορά μόνο τους ακέραιους αριθμούς και για αυτό το λόγο γίνεται, στη συνέχεια, η αναφορά της επέκτασης της ισχύος του κανόνα και στους ρητούς αριθμούς. Για να αντιμετωπιστεί αυτή ακριβώς η τρίτη περίπτωση του γινομένου δύο αρνητικών ρητών αριθμών προτείνεται παρακάτω να γίνει χρήση, αν το επιθυμεί ο διδάσκων, μιας άλλης σχετικής εισαγωγικής δραστηριότητας που δίνει τη δυνατότητα της χρήσης δύο αρνητικών, κατά σύμβαση, ρητών της ζημίας (πάλι) και του (αρνητικού αυτή τη φορά) χρόνου. Στην περίπτωση αυτή για να αποκτήσει ο χρόνος την έννοια του αρνητικού μεγέθους πρέπει να εκφράζει το παρελθόν σε σχέση με κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, τη παρούσα, που μπορεί να θεωρηθεί ως αρχή της μέτρησης του χρόνου].

ΠΡΟΣΘΕΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΤΑΞΗ:

Ένας επιχειρηματίας διαπιστώνει ότι έχει μηνιαία ζημιά 2.000 € και ότι στο τέλος του έτους το αποθεματικό του είναι μόνο 50.000 €. Προσπάθησε να βρεις σε έξι μήνες, από την αρχή του έτους, πόσο αποθεματικό θα του μείνει και πριν έξι μήνες πόσο αποθεματικό είχε.

[Υπόδειξη:

Η συνολική ζημία στο ερχόμενο εξάμηνο θα είναι: **(–2.000€)·(+6 μήνες) = –12.000€.**

Άρα το αποθεματικό θα γίνει: **50.000€ – 12.000€ = 38.000€.**

Η συνολική ζημιά στο περασμένο εξάμηνο ήταν: **(–2.000€)·(–6 μήνες) = +12.000€.**

Άρα το αποθεματικό ήταν: **50.000€ + 12.000€ = 62.000€].**

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τον τρόπο εφαρμογής των κανόνων του πολλαπλασιασμού και των ιδιοτήτων του σε διάφορες περιπτώσεις, καθώς και τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων που έχουν και γινόμενα ρητών αριθμών.

Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(β) η 2η και η 4η αφορούν την εύρεση του γινομένου δύο ρητών αριθμών,
(γ) η 3η η 5η και η 6η αφορούν την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας,
(δ) η 7η είναι άσκηση εφαρμογής του κανόνα των πρόσημων σε γινόμενο πολλών παραγόντων και
(ε) η 8η και η 9η αφορούν τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με παρενθέσεις.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης $\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)-(-1)(-0{,}5)10+(-2547)(-7596)0\left(-\frac{2}{3}\right)$.
2. Κάνε τις πράξεις: (α) $(15{,}7+25{,}3)(5{,}93-4{,}43)+(12{,}52+7{,}48)(0{,}857+1{,}143)$, (β) $-[-(-3)]5+2[-(-1)]$, (γ) $10-[-(-2)]+(-3)[-(-7)]-(-5)(-6+2)$.
3. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης $(2x+2)(4x-4)(3x+3)(5x-5)(6x+6)$, όταν $x=-2$

Α.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Γίνεται προσπάθεια να δειχθεί:

(α) ο κανόνας που ορίζει τη διαίρεση των ρητών αριθμών ως πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του διαιρέτη επί τον διαιρετέο,
(β) το πηλίκο α:β δύο ρητών ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης βx=α,
(γ) το πηλίκο και το γινόμενο δύο ρητών είναι ομόσημοι ρητοί αριθμοί και
(δ) να κατανοηθεί το πηλίκο ως λόγος δύο ρητών αριθμών.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο να δείξει τον τρόπο εφαρμογής του ορισμού της διαίρεσης ρητών αριθμών,

- το $2^{ο}$ την εύρεση της λύσης μιας εξίσωσης που οδηγεί στη διαίρεση δύο ρητών που γίνεται φανερό ότι το πηλίκο δύο ρητών είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης βx=α, δηλαδή η x=α:β και
- το $3^{ο}$ αφορά τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικής παράστασης με την απαλοιφή των παρενθέσεων, εφαρμόζοντας τους κανόνες της προτεραιότητας των πράξεων.

Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες:

(α) η $1^{η}$ είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(β) η $2^{η}$ και η $4^{η}$ αφορούν την εύρεση του πηλίκου δύο ρητών αριθμών,
(γ) η $3^{η}$ είναι άσκηση δεξιότητας εφαρμογής υπολογισμού των αποτελεσμάτων των τεσσάρων πράξεων σε δύο ρητούς αριθμούς,
(δ) η $5^{η}$ αφορά τη λύση διαφόρων εξισώσεων και
(ε) η $6^{η}$ και $7^{η}$ αφορούν τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με παρενθέσεις.

Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της ανάγκης της χρήσης του δεκαδικού και του περιοδικού δεκαδικού αριθμού ως μορφή των ρητών αριθμών.

Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο αυτή η προσπάθεια να καταλήξει στον ορισμό του περιοδικού δεκαδικού ρητού αριθμού και στον κανόνα που ισχύει για τον υπολογισμό της περιόδου αυτών, καθώς και στο τρόπο που συμβολίζεται.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δείξει, στους μαθητές, τον τρόπο υπολογισμού του ρητού με κλασματική μορφή από τη μορφή που έχει ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός ρητός αριθμός. Με την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων και της εφαρμογής γίνεται προσπάθεια να γίνει κατανοητή η ύπαρξη αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας των δύο μορφών (κλασματικής και δεκαδικής) των ρητών αριθμών.

Οι τρεις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) η $1^{η}$ είναι άσκηση δεξιότητας εφαρμογής υπολογισμού της δεκαδικής ή της περιοδικής δεκαδικής μορφής διαφόρων ρητών αριθμών με κλασματική μορφή,
(β) η $2^{η}$ είναι άσκηση δεξιότητας εφαρμογής υπολογισμού της κλασματικής μορφής ρητών αριθμών από την δεκαδική ή περιοδική δεκαδική μορφή τους και
(γ) η $3^{η}$ αφορά την εύρεση της δεκαδικής μορφής ρητών αριθμών, που εμφανίζονται ως περιοδικοί δεκαδικοί ρητοί με περίοδο το 9.

Η προτεινόμενη δραστηριότητα για το σπίτι

έχει στόχο να δείξει ότι με το παράδοξο του Ζήνωνα μπορούμε να φθάσουμε στην περιοδική δεκαδική μορφή $1,\overline{1}$ του κλασματικού ρητού αριθμού $1\frac{1}{9}$ που είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού της απόστασης S που πρέπει να διανύσει ο Αχιλλέας μέχρι να φθάσει τη χελώνα, που είναι $S = 1+0,1+0,01+0,001+\ldots =1,111\ldots = 1,\overline{1}$.

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση και κατανόηση της ανάγκης της χρήσης των δυνάμεων των ακεραίων, αρχικά, αριθμών.

Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο αυτή η προσπάθεια να καταλήξει:
(α) στον ορισμό της έννοιας της δύναμης ρητού αριθμού,
(β) στον κανόνα που ορίζει τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται το πρόσημο της δύναμης ενός ρητού αριθμού σχετικά με το πρόσημό της βάσης της δύναμης,
(γ) στις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό και
(δ) στον τρόπο του υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων με δυνάμεις τηρώντας την προβλεπομένη προτεραιότητα των πράξεων.

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τον τρόπο εφαρμογής των ιδιοτήτων των δυνάμεων σε διάφορες περιπτώσεις καθώς και τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων που έχουν δυνάμεις με εκθέτη φυσικό αριθμό.

Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:
(α) η $1^η$ είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού,
(β) η $2^η$ και $4^η$ αφορούν τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με δυνάμεις και
(γ) η $3^η$ είναι άσκηση αντιστοίχισης.

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Επί του προκειμένου είναι αναγκαίο να γίνει προσπάθεια ώστε με τα κατάλληλα παραδείγματα να εξαχθούν συμπεράσματα υπό μορφή ορισμών και κανόνων που να αφορούν:
(α) τον ορισμό της έννοιας της δύναμης ρητού αριθμού με εκθέτη ακέραιο και
(β) τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να δείξουν τον τρόπο εφαρμογής των ιδιοτήτων των δυνάμεων και τον τρόπο υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων που έχουν δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:
(α) η $1^η$ και η $2^η$ αφορούν τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων με δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο αριθμό και
(β) η $3^η$ και η $4^η$ είναι ασκήσεις για την εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

Α.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την πρακτική αναγκαιότητα εφαρμογής και χρήσης της τυποποιημένης μορφή πολύ μικρών αριθμών, όπως π.χ. για τη διάμετρο του ατόμου του υδρογόνου κλπ.
Γίνεται προσπάθεια να δειχθεί η τυποποιημένη μορφή, εκτός από πολύ μεγάλους αριθμούς, μπορεί να εκφράσει και τους πολύ μικρούς αριθμούς με μόνη διαφορά την επέκταση του τύπου και για ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) εκθέτη του 10.
Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχει σκοπό να δείξουν τον τρόπο γραφής των τυποποιημένων μορφών πολύ μικρών αριθμών.
Οι τρεις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα αφορούν τη μετατροπή πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών ρητών αριθμών σε τυποποιημένη μορφή.

Κεφάλαιο Β.1. Βασικές γεωμετρικές έννοιες

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 23 διδακτικές ώρες

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει τις βασικές γεωμετρικές γνώσεις και είναι καλό να αρχίσει με μια εισαγωγή στην οποία, μέσα από την καθημερινή πραγματικότητα του μαθητή, να εμφανίζονται ορισμένες βασικές γεωμετρικές έννοιες που θα συναντήσουμε παρακάτω, όπως: σημείο, γραμμή, μέσον, ευθεία, γωνία κλπ.

Β.1.1. Επίπεδο – Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Ημιεπίπεδο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:

- η 1η να γίνει κατανοητή η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος, ως ονομασία, του γνωστού σε όλους φυσικού αντικειμένου, της τεντωμένης κλωστής, σε αντίθεση με μια συλλογή διακεκριμένων σημείων, ως αντιπαράδειγμα.
- η 2η την εμπειρία του σχεδιασμού των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τρία σημεία του επιπέδου σε δύο διαφορετικές διατάξεις, προκειμένου να γίνει κατανοητό ότι για τον ορισμό μιας ευθείας αρκούν δύο σημεία και κάθε τρίτο σημείο ενδέχεται να ανήκει ή όχι σ' αυτήν.
- η 3η την κατανόηση της έννοιας του επιπέδου με τη χρήση φράσεων που περιέχουν τη λέξη «επίπεδο» με τη γεωμετρική ή τη μεταφορική της σημασία. Επίσης, μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να δώσουν και δικά τους τέτοια παραδείγματα. Να επισημάνουμε ότι μια γεωμετρική έννοια, όπως π.χ. το «επίπεδο», συχνά αλλάζει στον προφορικό λόγο νόημα χωρίς να χάνει την αρχική της σημασία, «παίζοντας έτσι σε πολλά επίπεδα».[Σημείωση: Πρέπει να ερμηνευθεί γιατί σχεδιάζουμε το απεριόριστο επίπεδο σε μια συγκεκριμένη σελίδα με ένα παραλληλόγραμμο και να ζητηθεί από τους μαθητές να σχεδιάσουν ευθείες παράλληλες και τεμνόμενες, πάνω σε ένα τέτοιο σχεδιασμένο επίπεδο. Επίσης στο φύλο του τετραδίου, μπορούν να σχεδιάσουν οι μαθητές, ευθείες παράλληλες, αλλά και τεμνόμενες, που το σημείο τομής τους να βρίσκεται έξω από την συγκεκριμένη σελίδα].

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

να καλύψουν την ανάγκη απόκτησης της επιθυμητής δεξιότητας των μαθητών πάνω στην εφαρμογή των ορισμών των κοινών γεωμετρικών εννοιών και του τρόπου σχεδιασμού τους. Το τελευταίο αναφέρεται στην ανάπτυξη συλλογιστικής, προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα υπολογισμού, γι' αυτό απαιτείται μια ιδιαίτερη διδακτική προσέγγιση, όπως λόγου χάριν η παρακάτω:

1ο βήμα: Ερευνούμε πόσες και ποιες γεωμετρικές έννοιες υπάρχουν στο πρόβλημα (Σημεία-Ευθείες)

2ο βήμα: Αναζητούμε και υπενθυμίζουμε τις γνώσεις που έχουμε για τις έννοιες αυτές, π.χ. «Από δύο σημεία διέρχεται μια και μόνο ευθεία».

3ο βήμα: Συντονίζουμε το διάλογο στην κατεύθυνση μιας απλής στρατηγικής λύσης, βοηθώντας με ερωτήσεις, όπως: Πόσα σημεία έχουμε; Με πόσες ευθείες ενώνεται το Α με τα υπόλοιπα σημεία; Πόσες φορές επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία; Υπάρχουν ευθείες που σχεδιάστηκαν δύο φορές;

4ο βήμα: Επαληθεύουμε στο σχήμα το αποτέλεσμα και επιβεβαιώνουμε την απάντησή μας

5ο βήμα: Επαναλαμβάνουμε σύντομα τη σειρά των συλλογισμών και τονίζουμε τη λογική σχέση μεταξύ τους.

6ο βήμα: Γενικεύουμε τη στρατηγική και τη λύση για οποιαδήποτε σημεία, υποδεικνύοντας και τη δυνατότητα της μαθηματικής σκέψης.

7ο βήμα: Δίνουμε μια διάσταση πρακτικής εφαρμογή του προβλήματος, αντικαθιστώντας π.χ. τα σημεία με πόλεις και τις ευθείες με δρόμους για να επισημάνουμε ότι τα μαθηματικά, εκτός των άλλων, είναι ένας τρόπος και μια γλώσσα για να περιγράψουμε όψεις και καταστάσεις του κόσμου που μας περιβάλλει.

Σημείωση: Πρέπει με κάθε ευκαιρία να τονίζουμε ότι μια άσκηση δεν είναι απλά και μόνο ένα «πρόβλημα που απαιτεί λύση», αλλά κατά κύριο λόγο, είναι μια διαδικασία που ενισχύει την εξάσκηση για σύνθεση γνώσεων και παραγωγή συλλογισμών.

Οι πέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(α) η πρώτη είναι άσκηση συμπλήρωσης κενού και

(β) οι υπόλοιπες τέσσερις είναι απλές και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών στα θέματα εφαρμογής των ορισμών των κοινών γεωμετρικών εννοιών και του τρόπου σχεδιασμού τους.

Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι, από τις οποίες

- η $1^η$ είναι ένα κουίζ με το οποίο ζητείται να γίνει απλώς μια σύγκριση των αποτελεσμάτων του τελευταίου παραδείγματος, με σκοπό να ελεγχθεί η παρατηρητικότητα των μαθητών και
- η $2^η$ αναφέρεται στην ονοματοδότηση ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Γράψε πέντε (5) σημεία ώστε ανά τρία να μην ανήκουν στην ίδια ευθεία και χάραξε όλες τις ευθείες, που διέρχονται απ' αυτά. Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;

   Προτεινόμενη λύση: Έστω ότι τα πέντε σημεία είναι τα Α, Β, Γ, Δ και Ε.

   Από κάθε ένα απ' αυτά π.χ. το Α διέρχονται άπειρες ευθείες, αλλά από αυτές μόνο τέσσερις διέρχονται και από τα υπόλοιπα **τέσσερα (4)** σημεία. Επομένως, οι ευθείες, που μας ενδιαφέρουν, είναι:

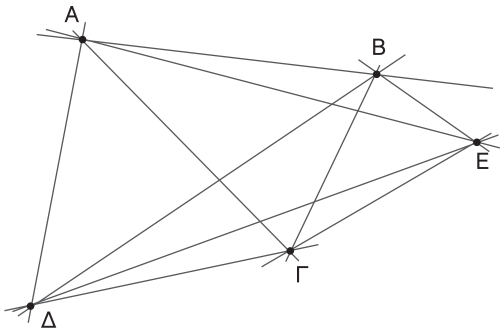
   από το σημείο Α: **ΑΒ**, **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΑΕ**

   από το σημείο Β: ΒΑ, **ΒΓ**, **ΒΔ**, **ΒΕ**

   από το σημείο Γ: ΓΑ, ΓΒ, **ΓΔ**, **ΓΕ**

   από το σημείο Δ: ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, **ΔΕ**

   από το σημείο Ε: ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ



   Επειδή γνωρίζουμε ότι από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία, πρέπει να διαγράψουμε τις μισές από τις ευθείες που βρήκαμε, διότι κάθε μια τη γράψαμε δύο φορές.

   Συνεπώς, από **είκοσι (20)** που βρήκαμε μας μένουν οι μισές, δηλαδή **δέκα (10)** διαφορετικές ευθείες, που είναι οι: **ΑΒ**, **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΑΕ**, **ΒΓ**, **ΒΔ**, **ΒΕ**, **ΓΔ**, **ΓΕ** και **ΔΕ**.

2. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
ΣΗΜΕΙΩΝ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2															
3															
4															
5															
6															

Β.1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

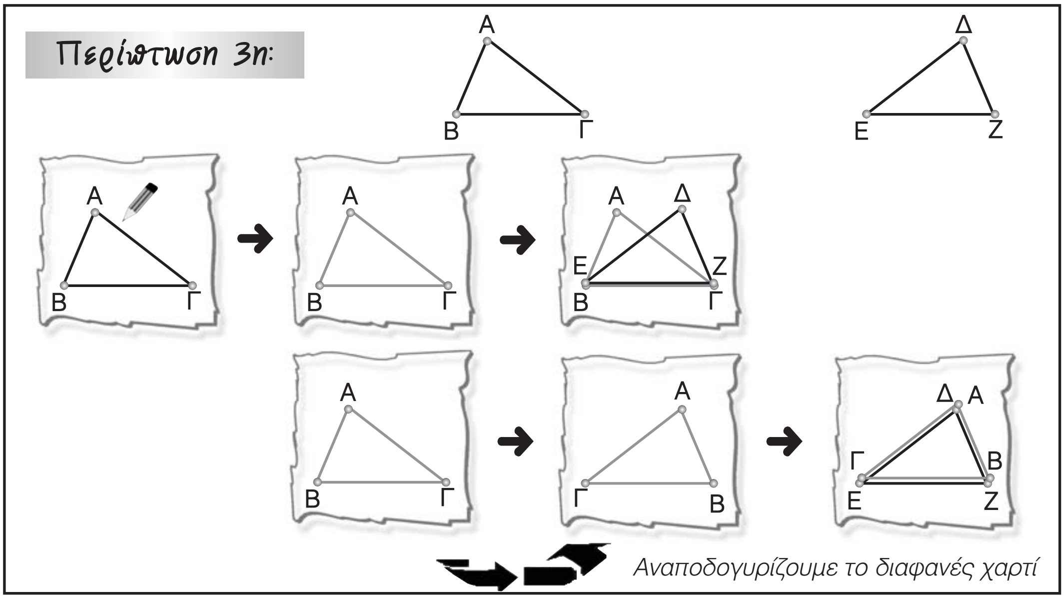
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο την κατανόηση της έννοιας της γωνίας και των στοιχείων που την ορίζουν. Δίνεται ο ορισμός και ο τρόπος συμβολισμού της έννοιας της γωνίας και συνδέεται άμεσα με γεωμετρική χρήση της έννοιας στα τρίγωνα και στα τετράπλευρα. Ορίζονται και κατηγοριοποιούνται οι έννοιες των κυρτών ή μη κυρτών ευθυγράμμων σχημάτων και δίνεται ο ορισμός των ίσων ευθυγράμμων σχημάτων.

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό να δώσει απάντηση στο ερώτημα για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να διαπιστωθεί στην πράξη η ισότητα των ευθυγράμμων σχημάτων. Έτσι μέσα από την ανάπτυξή του παρουσιάζεται, με σχηματικό τρόπο η διαδικασία του ελέγχου της ταύτισης των δύο συγκρινόμενων σχημάτων, σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:

(α) με την αποτύπωση σε διαφανές χαρτί του ενός σχήματος και

(β) με την επίθεση αυτού πάνω στο άλλο. Παρακάτω δίνεται, πρόσθετα και τρίτη περίπτωση η οποία μπορεί να αναφερθεί εάν θεωρηθεί σκόπιμο από τον διδάσκοντα.



Οι πέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(α) οι τέσσερις πρώτες είναι απλές εφαρμογές της θεωρίας και

(β) η τελευταία είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης με αντιστοίχιση.

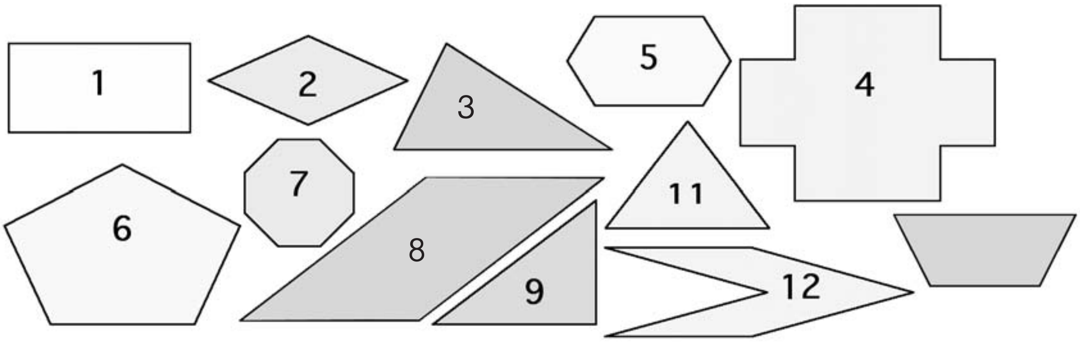
Προτείνεται μία δραστηριότητα για το σπίτι που αφορά: στον έλεγχο της ικανότητας των μαθητών για αναγνώριση και κατηγοριοποίηση των ευθυγράμμων σχημάτων. Ζητείται από το μαθητή να ανασυνθέσει ορισμένα κομμάτια, που σχηματίζουν ένα τετράγωνο, με τρόπο τέτοιο ώστε να δημιουργηθούν διάφορα ευθύγραμμα γνωστά σχήματα (π.χ. γράμματα, αριθμοί κλπ) και με σκοπό να ασχοληθεί με τρόπο ευχάριστο και διασκεδαστικό και να εξασκηθεί στην τοποθέτηση των προκαθορισμένων ευθυγράμμων σχημάτων, ταιριάζοντας τις πλευρές και τις γωνίες τους για να προκύψουν τα επίσης προκαθορισμένα νέα ευθύγραμμα σχήματα.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Βρες ποια είναι η σχέση μεταξύ του πλήθους των κορυφών και των πλευρών σε: (α) μια ανοικτή τεθλασμένη γραμμή και (β) μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή.
2. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ														
ΣΗΜΕΙΩΝ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3															
4															
5															
6															
7															

3. Ομαδοποίησε τα παρακάτω σχήματα με κριτήρια, που θα επιλέξεις εσύ. Προσπάθησε να δικαιολογήσεις κατάλληλα το αποτέλεσμα (Ζητείται η κατηγοριοποίηση διαφόρων ευθυγράμμων σχημάτων, με κάποιο κριτήριο επιλογής του μαθητή, όπως π.χ. αριθμός πλευρών, κυρτό – μη κυρτό).



Β.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες
Αφιερώνεται μέρος της παραγράφου στη μέτρηση και στις μονάδες μήκους, αρχής γενομένης με την ιστορική αναδρομή. Παρατίθενται αναφορά στα όργανα μέτρησης μήκους, πίνακες, κυρίως, με τις υποδιαιρέσεις του μέτρου (m), η μέτρηση μήκους με το υποδεκάμετρο και οι ορισμοί της απόστασης δύο σημείων και του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος.

<u>Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό</u> την απόκτηση της δεξιότητας των μαθητών πάνω στα θέματα:

(α) της κατασκευής ενός ευθυγράμμου τμήματος δεδομένου μήκους, με τη χρήση του υποδεκάμετρου ή του διαβήτη (διαστημόμετρο),

(β) της σύγκρισης των ευθυγράμμων τμημάτων με δύο τρόπους με το υποδεκάμετρο ή με το διαβήτη και

(γ) της εύρεσης του μέσου ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Οι δώδεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

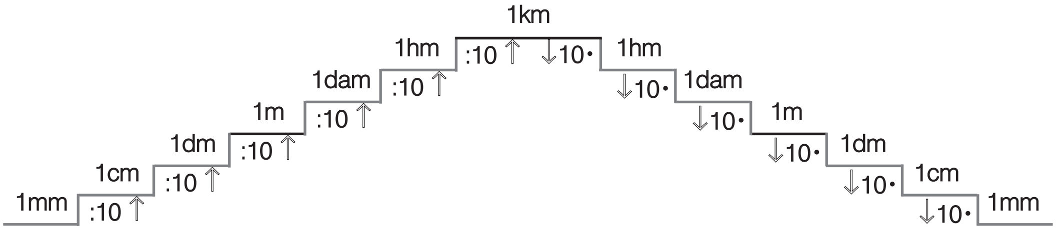
(α) οι δύο πρώτες είναι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης, με συμπλήρωση κενών και πολλαπλής επιλογής,

(β) οι επόμενες πέντε έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας του χειρισμού της μετατροπής των μετρήσεων στα πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια του μέτρου και

(γ) οι τελευταίες πέντε αφορούν στην κατασκευή ευθυγράμμων τμημάτων, στον υπολογισμό τους, στη σύγκριση μεταξύ τους και στο χειρισμό της έννοιας του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος.

ΠΡΟΣΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Φτιάχνουμε μια «σκάλα», που για να την «ανέβουμε», πρέπει από κάθε σκαλοπάτι στο επόμενο να διαιρούμε με το 10, ενώ για να την «κατεβούμε» πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με το 10.



ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα.

mm	3.270	60	730												
cm				254	700	2.000									
dm							40	150							
m									5	2	6,4	0,7			
km													4,27	0,2	2

2. Συμπλήρωσε τα κενά του πίνακα.

Συμιγγής	2m7dm	3cm5mm	4km350m	3dm7cm	3dm7cm	35m6dm8mm	12cm11mm	7dm3cmm	1m2cm	5dm3mm	3m4dm	5cm6mm	3m4dm7cm	1m37cm8mm							
mm	2700															93					
cm	270																387				
dm	27														37						
m	2,7																	3,75	0,07	6,07	4,15

3. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον πίνακα είναι τα μήκη των πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, εκφρασμένα με διαφορετική μονάδα. Συμπλήρωσε τον πίνακα και υπολόγισε την περίμετρο του σε m, dm, cm και mm

	AB	ΒΓ	ΓΔ	ΔΑ	Περίμετρος
m	0,5				
dm		32			
cm			105		
mm				900	

4. Σε μια ευθεία ε να πάρεις με τη σειρά τα σημεία Α, Κ και Β έτσι, ώστε να είναι: ΑΚ=2,4cm και ΚΒ=2,4cm. Από το Κ να φέρεις την κάθετη στην ε και πάνω σ' αυτή να πάρεις ένα σημείο Γ. Να συγκρίνεις τα μήκη των τμημάτων ΓΑ και ΓΒ.
5. Σε μια ευθεία ε να πάρεις με τη σειρά τα σημεία Β, Ο και Γ έτσι, ώστε να είναι: ΒΟ=2cm και ΟΓ=3cm. Από το Ο να φέρεις την κάθετη στην ε και πάνω σ' αυτή να πάρεις ένα σημείο Α και να συγκρίνεις τα μήκη των τμημάτων ΑΒ και ΑΓ.
6. Σε μια ευθεία ε να πάρεις τα σημεία Α, Β και Γ, έτσι ώστε ΑΒ=ΒΓ=1,5cm. Στα σημεία Α, Β και Γ να φέρεις κάθετες στην ε. Να χαράξεις μια άλλη ευθεία ε' που να τέμνει τις κάθετες στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Να συγκρίνεις τα τμήματα ΔΕ και ΕΖ.
7. Να γράψεις δύο παράλληλες ευθείες ε και ε' και να πάρεις ένα σημείο Κ εκτός των παραλλήλων αυτών. Να φέρεις την ΚΑ κάθετη στην ε και να πάρεις στην ε τα σημεία Β και Γ έτσι, ώστε ΑΒ=ΑΓ. Εάν οι ευθείες ΚΒ και ΚΓ τέμνουν την ε' στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, να συγκρίνεις τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ.
8. Να συγκρίνεις την απόσταση των σημείων Α και Β με την απόσταση των Γ και Δ: (α) με το μάτι, (β) με το υποδεκάμετρο και (γ) με το διαβήτη. $A \longleftrightarrow B \quad \Gamma \longleftrightarrow \Delta$
9. Να συγκριθούν μεταξύ τους οι πλευρές ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου.
10. Σημείωσε πάνω σε μια ευθεία ε δύο σημεία Α και Β, έτσι ώστε ΑΒ=2cm. Να βρεις στην ε ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε ΜΑ=4cm. Πόσα τέτοια σημεία υπάρχουν; Τι παρατηρείς για το σημείο Β;
11. Πάρε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=6cm. Να βρεις το μέσον του Ο και στη συνέχεια να βρεις τα μέσα των ΑΟ και ΟΒ. Τι παρατηρείς;
12. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=6cm, να πάρεις ένα σημείο Κ τέτοιο, ώστε ΑΚ=2cm και ένα σημείο Λ τέτοιο, ώστε ΒΛ=1,8cm. Αν Ο είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, να συγκρίνεις τα τμήματα ΚΟ και ΟΛ.

Β.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες
<u>Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο</u> να δείξει στους μαθητές την ανάγκη υπολογισμού του αθροίσματος και της διαφοράς συγκεκριμένων ευθυγράμμων τμημάτων(λύνεται ως υπόδειγμα).
<u>Οι έντεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα</u> είναι απλές έως μέτριας (εκτός από την τελευταία) δυσκολίας και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας πρόσθεσης και αφαίρεσης ευθυγράμμων τμημάτων.
<u>Προτείνεται μία δραστηριότητα για το σπίτι</u> με την οποία επιδιώκεται να γίνει κατανοητό ότι «η ευθεία είναι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων» με παράδειγμα από τη ζωή για να οδηγηθούν οι μαθητές στην απόδειξή του, η οποία απαιτεί να είναι γνωστή η διαδικασία της πρόσθεσης ευθυγράμμων τμημάτων.
<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Σχεδίασε μια τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ έτσι, ώστε: ΒΓ=4·ΑΒ και ΓΔ=2·ΑΒ. Αν είναι ΒΓ=8cm, να βρεις το μήκος της τεθλασμένης γραμμής
2. Σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 16cm πάρε τα σημεία Γ, Δ και Ο, τέτοια ώστε: ΑΒ=4·ΑΓ, ΓΒ=4·ΔΒ και Ο το μέσο του ΓΔ. Βρες: (α) το μήκος του ΟΔ και (β) το μήκος του ΑΜ, αν Μ είναι το μέσο του ΑΟ.
3. Σε μια ημιευθεία Οx να πάρεις τα σημεία Κ και Λ, έτσι ώστε ΟΚ=1,6cm και ΟΛ=3cm. Αν Α είναι το μέσο του ΚΛ, να βρεις το μήκος του ΟΑ.

Β.1.5. Μέτρηση, σύκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές ότι το μέτρο της γωνίας εξαρτάται μόνο από το άνοιγμά της και όχι από το μήκος των πλευρών της.

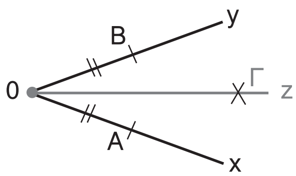
Με αφορμή την παραπάνω συζήτηση θίγεται και το θέμα της μοναδικότητας του μέτρου, ως βασικού κριτηρίου για την ισότητα μεταξύ δύο γωνιών. Αναφέρεται το μοιρογνωμόνιο, ως όργανο μέτρησης γωνιών και η μονάδα μέτρησης η μοίρα και οι υποδιαιρέσεις της. Επειδή οι μοίρες παρουσιάζονται με τη μορφή συμμιγών αριθμών, πράγμα που δυσκολεύει τους μαθητές, καλό θα είναι να προκληθεί μια συζήτηση για το πώς προέκυψαν αυτές ιστορικά. Για το λόγο αυτό παρατίθεται ιστορικό σημείωμα που αφορά στα εξηνταδικά συστήματα αρίθμησης.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- με το 1ο να κωδικοποιηθούν και οι ορισμοί σύγκρισης των γωνιών (ίση, μεγαλύτερη, μικρότερη),
- με το 2ο να γίνει εφαρμογή της ίδιας μεθόδου για να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι «οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες» και
- με το 3ο να επιχειρηθεί η κωδικοποίηση των δύο διαφορετικών τρόπων κατασκευής της διχοτόμου γωνίας, με μοιρογνωμόνιο και με δίπλωση του χαρτιού σχεδίασης, αφού έχει προηγουμένως δοθεί ο ορισμός της. Παρακάτω δίνεται πρόσθετα και τρίτη περίπτωση η οποία μπορεί να αναφερθεί εάν θεωρηθεί σκόπιμο από τον διδάσκοντα.

  3ος τρόπος: Με «το κανόνα και το διαβήτη»:

  Με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας γράφουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές της σε δύο σημεία κάθε μια από αυτές, το Α και το Β. Χωρίς να αλλάξουμε το άνοιγμα του διαβήτη και με κέντρα τα σημεία Α και Β γράφουμε δύο ίσους κύκλους, που τέμνονται στα σημεία Ο και Γ. Η ευθεία ΟΓ είναι η διχοτόμος της γωνίας. Μπορείς να δικαιολογήσεις το συμπέρασμα αυτό;



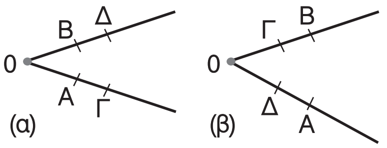
Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι απλές και έχουν σκοπό:

(α) την ανάπτυξη της δεξιότητας εκτίμησης του μέτρου και της κατασκευής γωνίας,
(β) την αναγνώριση των γωνιών και την ονομασία τους,
(γ) τη σύγκριση γωνιών και
(δ) την κατασκευή της διχοτόμου γωνίας.

Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες για το σπίτι έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών στην κατασκευή ίσων μεταξύ τους γωνιών.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Σύγκρινε τις γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου και υπολόγισέ τις με το μοιρογνωμόνιο.
2. Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών του ισοπλεύρου τριγώνου.
3. Σύγκρινε τις γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ στις δύο περιπτώσεις.



4. Σχεδίασε γωνία $x\hat{O}y=90^\circ$ και πάρε σημείο Α της πλευράς Οx, ώστε να είναι ΟΑ=3,5cm. Να βρεις σημείο Β της Οy, ώστε να είναι ΑΒ=7cm. Να μετρήσεις τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΟΑΒ.

5. Ένα πλοίο μετά την αναχώρησή του διανύει 100km προς το Βορρά και μετά στρίβει 60° προς τα δεξιά. Μετά από άλλα 80km πορεία, στρίβει 25° προς τα αριστερά και μετά τα επόμενα 60km φθάνει στον προορισμό του. (α) Να χαράξεις, στο τετράδιό σου, την πορεία του πλοίου, σχεδιάζοντας τα 20km με 1cm. (β) Να μετρήσεις τη γωνία που σχηματίζει η τελευταία πορεία του πλοίου, με τη διεύθυνση Βορράς - Νότος.

Β.1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες
<u>Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:</u>

(α) η $1^η$ την κωδικοποίηση των προηγηθέντων γνώσεων σχετικά με τα είδη των γωνιών, με την εποπτική χρήση των δεικτών του ρολογιού, παράλληλα με την παρουσίαση διαφόρων εικονιδίων, των οποίων τα σχήματα μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα διάφορα είδη γωνιών και

(β) η $2^η$ την αποσαφήνιση της σχετικότητας της έννοιας της καθετότητας και της απολυτότητας της έννοιας της κατακόρυφης ενός τόπου. [<u>Σημείωση:</u> Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές, της ηλικίας αυτής, συνήθως, συγχέουν τις σχετικές έννοιες (όπως είναι αυτή της καθετότητας) με τα πρότυπα των απολύτων εννοιών (όπως είναι αυτή της κατακόρυφης, σχετικά με την οριζόντια κατεύθυνση). Για αυτόν το λόγο δίνεται η παράσταση ενός σπιτιού με δύο καμινάδες (μία κανονική και μία κάθετη στη στέγη), ώστε να δοθεί η ευκαιρία, με χιουμοριστικό τρόπο, να γίνει η σημαντική διευκρίνιση που αφορά στη σχετικότητα της έννοιας της καθετότητας].

Στη συνέχεια, γίνεται παράθεση των ορισμών για όλα τα διαφορετικά είδη γωνιών, με βάση το μέτρο τους σε μοίρες, επισημαίνονται ορισμένα σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με τις πλευρές της ευθείας, της μηδενικής και της πλήρους γωνίας και δίνονται οι ορισμοί και ο συμβολισμός των καθέτων ευθειών, των καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων ή των καθέτων ημιευθειών.

<u>Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό</u> την απόκτηση από τους μαθητές της δεξιότητας να διαπιστώνουν την καθετότητα δύο ευθειών και να σχεδιάζουν την κάθετη μιας ευθείας σε μία άλλη. Έμφαση πρέπει να δοθεί στο σωστό χειρισμό των γεωμετρικών οργάνων για τον σχεδιασμό κάθετων ευθειών. Στις εφαρμογές αυτές υπάρχουν ελάχιστα σχόλια, που προφανώς θα κούραζαν, όμως, η ίδια η εικόνα είναι αρκούντως επεξηγηματική.

<u>Οι οκτώ προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:</u>

(α) η $1^η$ είναι για αυτοαξιολόγηση πολλαπλής επιλογής,

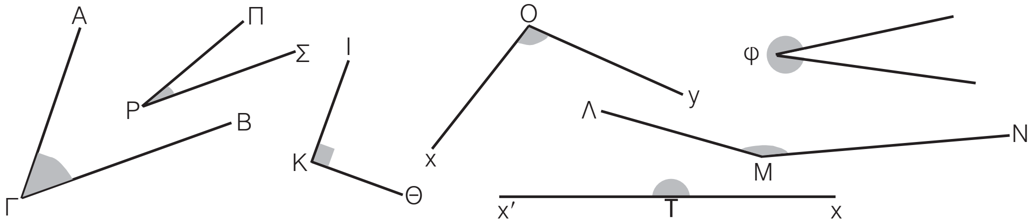
(β) η $2^η$ έως και η $7^η$ έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας σχεδιασμού καθέτων ευθειών σε διάφορες περιπτώσεις και

(γ) η $8^η$ είναι άσκηση αντιστοίχισης.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Να εκφράσεις σε μοίρες την πλήρη, την ευθεία και την ορθή γωνία.
2. Να εκφράσεις σε μοίρες το μέτρο των ίσων γωνιών, στις οποίες χωρίζονται η πλήρης, η ευθεία και η ορθή γωνία από τις διχοτόμους τους.
3. Μία γωνία που οι πλευρές της ανήκουν στην ίδια ευθεία, τι είδους μπορεί να είναι; Να διακρίνεις περιπτώσεις.
4. Είναι δυνατόν τρεις ευθείες του επιπέδου να είναι κάθετες ανά δύο μεταξύ τους;
5. Να συγκρίνεις την πλήρη και την ευθεία γωνία με την ορθή.
6. Σχεδίασε τη διχοτόμο μιας πλήρους, μιας ευθείας και μιας ορθής γωνίας.

7. Σχεδίασε δύο τεμνόμενες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και έστω **Ο** το σημείο τομής τους. Φέρε από σημείο **Α** της $ε_1$ κάθετη στην $ε_2$ και από σημείο **Β** της $ε_2$ κάθετη στην $ε_1$ και σύγκρινε τη γωνία που σχηματίζουν, μεταξύ τους, αυτές οι δύο με τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Επίσης, να ελέγξεις σε ποια περίπτωση η γωνία αυτή είναι ορθή.
8. Αφού εκτιμήσεις το άνοιγμα των γωνιών, να συμπληρώσεις τον πίνακα, βάζοντας ένα x, στο αντίστοιχο κουτάκι στη γραμμή που έχει το όνομα της γωνίας



Γωνίες	0° έως 90°	90°	90° έως 180°	180°	180° έως 360°	Οξεία	Ορθή	Αμβλεία	Ευθεία	Μη κυρτή
$Α\widehat{Γ}Β$										
$Π\widehat{Ρ}Σ$										
$Ι\widehat{Κ}Θ$										
$\widehat{φ}$										
$x\widehat{Ο}y$										
$Λ\widehat{Μ}Ν$										
$x\widehat{Τ}x'$										

Β.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση της έννοιας των εφεξής γωνιών. Δίνονται, σε διαδοχικά σχήματα, δύο σχετικά αντιπαραδείγματα και ένα σωστό και ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα κενά στις αντίστοιχες περιγραφές τους, ώστε, συγκριτικά, να επιλέξουν την σωστή έκφραση του ορισμού των εφεξής γωνιών.

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο να δείξει, με παραστατικό τρόπο στους μαθητές, τον τρόπο με το οποίο μπορούν να γίνουν δύο γωνίες εφεξής, με τη βοήθεια ενός διαφανούς χαρτιού.
- στο 2ο να χρησιμοποιηθεί ακριβώς η ίδια μέθοδος για να γίνει κατανοητή η έννοια του αθροίσματος των δύο γωνιών.
  [Σημείωση: Είναι σκόπιμο να διαπιστώσουν οι μαθητές με το μοιρογνωμόνιο ότι αν προσθέσουν δύο γωνίες, μ' αυτόν τον τρόπο, προκύπτει γωνία, της οποίας το μέτρο ισούται με το άθροισμα των μέτρων των αρχικών γωνιών].
- το 3ο να γίνει εφαρμογή του 1ου για δύο συγκεκριμένες γωνίες π.χ. 50° και 82° και
- στο 4ο, αφού σχεδιαστούν τρεις εφεξής και διαδοχικές γωνίες, των οποίων οι μη κοινές πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες, να βρεθεί το άθροισμά τους, που είναι 180°.

Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμπλήρωση κενών και
(β) οι επόμενες τρεις είναι απλές και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας για την αναγνώριση των εφεξής και των διαδοχικών γωνιών σε διάφορα σχήματα.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Βρες το άθροισμα δύο γωνιών με μέτρα 37° και 53°, αφού τις κάνεις εφεξής.
2. Βρες το άθροισμα τριών γωνιών με μέτρα 43°, 78° και 55°, αφού τις κάνεις διαδοχικές.
3. Δίνονται δύο εφεξής γωνίες $x\hat{O}y=30°$ και $y\hat{O}z=50°$ και οι διχοτόμοι του $O\delta_1$ και $O\delta_2$, αντίστοιχα. Να υπολογίσεις τη γωνία $\delta_1\hat{O}\delta_2$ και να τη συγκρίνεις με τη $x\hat{O}z$.
4. Αν η μια γωνία από εκείνες που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες, είναι: (α) το ένα τρίτο μιας άλλης ή (β) το ένα τέταρτο μιας άλλης, υπολόγισε και τις τέσσερις γωνίες.

Β.1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει σκοπό την κατανόηση των εννοιών;

(α) των παραπληρωματικών και

(β) των συμπληρωματικών γωνιών.

Στη συνέχεια, δίνονται οι ορισμοί των εννοιών των παραπληρωματικών, των συμπληρωματικών και των κατακορυφήν γωνιών, με απλό αριθμητικό τρόπο οι δύο πρώτοι και με γεωμετρικό ο τρίτος.

Τα έξι προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

(α) Τα δύο πρώτα την απόκτηση της δεξιότητας των μαθητών στον υπολογισμό και την κατασκευή, με τη χρήση του μοιρογνωμονίου, της παραπληρωματικής ή της συμπληρωματικής δεδομένης γωνίας.

(β) στο 3ο να γίνει κατανοητή η έννοια της κατακορυφήν γωνίας με τη χρήση ενός αντιπαραδείγματος,

(γ) στο 4ο να δειχθεί ότι «οι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες» και

(δ) στα δύο τελευταία ότι για να αποδειχθεί ότι δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερεις ορθές και να βρεθούν οι τρεις από τις τέσσερις γωνίες που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες, όταν είναι γνωστή η μια γωνία γίνεται συνδιασμός της έννοιας των παραπληρωματικών γωνιών και της έννοιας των κατακορυφήν γωνιών.

Οι έντεκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης πολλαπλής επιλογής και

(β) η 2η έως και 11η είναι απλές και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών στο χειρισμό προβλημάτων, που αφορούν στον υπολογισμό, την κατασκευή και την εφαρμογή των ορισμών και των προτάσεων που διδάχτηκαν.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Υπολόγισε δύο γωνίες αν είναι συμπληρωματικές και η μία από αυτές είναι τριπλάσια της άλλης.
2. Υπολόγισε δύο γωνίες αν είναι παραπληρωματικές και η μία από αυτές είναι τετραπλάσια της άλλης.
3. Υπολόγισε δύο γωνίες αν είναι συμπληρωματικές και η μία από αυτές είναι τριπλάσια της άλλης.
4. Εάν είναι γνωστό ότι η μια γωνία από τις τέσσερις που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες, είναι διπλάσια μιας άλλης, να υπολογιστούν και οι τέσσερις γωνίες.
5. Αν μια γωνία είναι μεγαλύτερη κατά 24° από την παραπληρωματική της, πόσο είναι κάθε μια απ' αυτές;
6. Σχεδίασε μια γωνία 135° και την κατακορυφήν της. Φέρε τις διχοτόμους των γωνιών αυτών και υπολόγισε την γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους.

7. Σχεδίασε τις διχοτόμους (α) δύο παραπληρωματικών και (β) δύο συμπληρωματικών γωνιών και μέτρησε την γωνία, που σχηματίζουν μεταξύ τους. Μπορείς να γενικεύσεις το συμπέρασμά σου;
8. Μετρήθηκε μια γωνία με ακρίβεια και βρέθηκε ότι το μέτρο της είναι: $\hat{\alpha}=67^\circ 35' 26''$. Να υπολογιστεί η παραπληρωματική και η συμπληρωματική της γωνία.

Προτεινόμενη λύση:

Εάν ονομάσουμε $\hat{\beta}$ το μέτρο της παραπληρωματικής και $\hat{\gamma}$ το μέτρο της συμπληρωματικής της γωνίας, θα έχουμε:

(α) Για την παραπληρωματική έχουμε:
$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^\circ$ ή $\hat{\beta}=180^\circ-\hat{\alpha}$, συνεπώς $\hat{\beta}=180^\circ-67^\circ 35' 26''$.
Βρίσκουμε ότι: $\hat{\beta}=112^\circ 24' 34''$.

Κάνουμε την αφαίρεση

$$\begin{array}{rrr} 180^\circ & 0' & 0'' \\ -67^\circ & 35' & 26'' \end{array}$$

ή

$$\begin{array}{rrr} 179^\circ & 59' & 60'' \\ -67^\circ & 35' & 26'' \\ \hline 112^\circ & 24' & 34'' \end{array}$$

(β) Για την συμπληρωματική έχουμε:
$\hat{\alpha}+\hat{\gamma}=90^\circ$ ή $\hat{\gamma}=90^\circ-\hat{\alpha}$, συνεπώς $\hat{\gamma}=90^\circ-67^\circ 35' 26''$.
Βρίσκουμε ότι $\hat{\gamma}=22'^\circ 24' 34''$

Κάνουμε την αφαίρεση

$$\begin{array}{rrr} 90^\circ & 0' & 0'' \\ -67^\circ & 35' & 26'' \\ \hline \end{array}$$

ή

$$\begin{array}{rrr} 89^\circ & 59' & 60'' \\ -67^\circ & 35' & 26'' \\ \hline 22^\circ & 24' & 34'' \end{array}$$

9. Δύο γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι συμπληρωματικές. Το μέτρο της $\hat{\alpha}$ δίνεται στο παρακάτω πίνακα (α) Σχεδιάστε την $\hat{\alpha}$, (β) Σχεδιάστε και μετρήστε την $\hat{\beta}$ με το μοιρογνωμόνιο, (γ) Υπολογίστε την $\hat{\beta}$. Μετά συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα.

α	15°	18°	30°	45°	60°	90°
β από μέτρηση						
β από υπολογισμό						

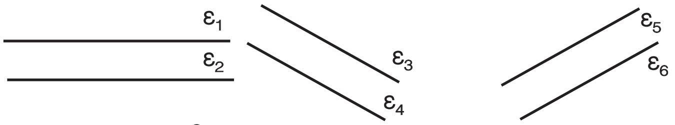
Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

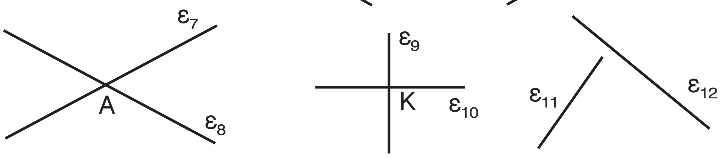
Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο να προβληματίσουν τους μαθητές για τη σχετική θέση δύο ευθειών στο χώρο και ειδικότερα στο επίπεδο και να οδηγηθούν στο λογικό συμπέρασμα ότι δύο μόνο δυνατότητες υπάρχουν: ή τέμνονται ή είναι παράλληλες.

Με αφορμή τις παραπάνω δραστηριότητες διατυπώνονται οι ορισμοί των παραλλήλων ευθειών, των παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων και των τεμνομένων ευθειών, καθώς και οι σχετικοί συμβολισμοί. Ο διδάσκων θα πρέπει να επιμένει στη σχεδίαση παραλλήλων ευθειών σε διάφορες θέσεις στο επίπεδο του πίνακα ή των τετραδίων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Σχήμα 1



Σχήμα 2



Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:
- το 1^{ο} την αναγνώριση και το διαχωρισμό των παραλλήλων και των τεμνομένων ευθειών
- το 2^{ο} δίνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να φέρουμε παράλληλη ευθεία προς μία άλλη από ένα σημείο εκτός αυτής, με δύο τρόπους:
  (α) κάνοντας ταυτόχρονη χρήση του κανόνα και του γνώμονα και
  (β) φέρνονταςμε τον γνώμονα κάθετη από το σημείο στη δεδομένη ευθεία και μετά πάλι άλλη κάθετη σ' αυτή στο σημείο αυτό.

Με αφορμή το θέμα αυτό μπαίνει, εύλογα, το αίτημα της μοναδικότητας της παραλλήλου προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής. Στο ιστορικό σημείωμα που παρατίθεται, γίνεται αναφορά στον Ευκλείδη και στο «αίτημα» που συνδέθηκε με το όνομά του. Είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίσουν οι μαθητές από την ηλικία αυτή τα θέματα αυτού του είδους, που έχουν και φιλοσοφική χροιά, πέραν της επιστημολογικής και πολιτισμικής.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:
(α) η 1^{η} και η 2^{η} είναι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης, πολλαπλής επιλογής και συμπλήρωσης κενών και
(β) η 3^{η} έως και η 6^{η} είναι απλές ασκήσεις, που έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών να χειρίζονται θέματα παραλλήλων ευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων, με το να τα αναγνωρίζουν και να τα κατασκευάζουν.

Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

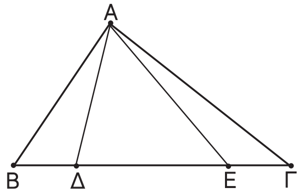
Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:
- η 1^{η} τη διαπίστωση ότι το κάθετο τμήμα από ένα σημείο σε μια ευθεία είναι το μικρότερο, απ' όσα ορίζονται από το σημείο αυτό και τα διάφορα σημεία της ευθείας. Συνδέεται, έτσι, η έννοια της απόστασης σημείου από ευθεία με το «συντομότερο δυνατό δρόμο» και μέσω αυτού διαπιστώνεται και η μοναδικότητα της κάθετης από σημείο σε ευθεία.
- η 2^{η} οδηγεί στη διαπίστωση της σταθεράς απόστασης μεταξύ των παραλλήλων ευθειών, που πρέπει να είναι οι σιδηροτροχιές του τραίνου, που αυτή είναι πάλι ο συντομότερος δρόμος από ένα σημείο μιας ευθείας στην παράλληλή της ευθεία.
  [Σημείωση: Με αφορμή την παραπάνω συζήτηση θίγεται και το θέμα της μοναδικότητας της απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, που στο 2^{ο} παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν, με δοκιμές, ότι το κάθετο τμήμα είναι πράγματι το ελάχιστο δυνατό από όλα τα άλλα ευθύγραμμα τμήματα που μπορούμε να φέρουμε. Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει και από το 3^{ο} παράδειγμα – εφαρμογή για την απόσταση των παραλλήλων ευθειών].

Τα τέσσερα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να αντιμετωπιστούν θέματα κατασκευαστικά που είναι συνέπειες των προηγούμενων ορισμών και συμπερασμάτων.

Οι επτά προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα :
(α) η 1^{η} είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμπλήρωση κενών και
(β) οι υπόλοιπες έξι είναι μέτριας δυσκολίας και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών να χειρίζονται θέματα σχετικά με τις έννοιες που αναπτύχθηκαν σ' αυτή την παράγραφο.

Προτείνεται δραστηριότητα για το σπίτι με την οποία επιδιώκεται η κατασκευή ενός τριγώνου με δεδομένα τα μήκη των πλευρών του, υπό κλίμακα, καθώς και ο υπολογισμός του ύψους του.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:



1. Στο διπλανό σχήμα φέρε από το σημείο Α το κάθετο τμήμα ΑΚ στην ΒΓ. Σύγκρινε τα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ και ΑΓ. Τι παρατηρείς; Μπορείς να δικαιολογήσεις το συμπέρασμά σου;
2. Πάνω σε δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy πάρε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε ΟΑ=ΟΒ. Από το Α φέρε Αy'//Οy και από το Β την Βx'//Οx. Ονόμασε Κ το σημείο της τομής των Αy' και Βx'. Φέρε τις διαγώνιες του ΑΟΒΚ και διαπίστωσε τη σχετική τους θέση. Επίσης, αφού σχεδιάσεις τις αποστάσεις του Ο από τις ευθείες Αy' και Βx' και του Κ από τις Οx και Οy, να συγκρίνεις τις τέσσερις ημι-ευθείες μεταξύ τους.
3. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ κάθετες. Να πάρεις σημείο Ε στην προέκταση της πλευράς ΑΓ προς το Γ. Στη συνέχεια να κατασκευάσεις ένα νέο τρίγωνο ΓΕΔ, έτσι ώστε οι πλευρές ΓΕ και ΕΔ να είναι κάθετες. Τι είναι μεταξύ τους οι ευθείες ΑΒ και ΕΔ;
4. Δίνονται δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy. Να βρεθεί το σημείο εκείνο της Οy που απέχει από την Οx απόσταση 2 cm.
5. Φέρε από τις κορυφές Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο Δ. Βρες και σύγκρινε τις αποστάσεις των Β και Δ από την ΑΓ. Κάνε το ίδιο και για τις αποστάσεις των Γ και Δ από την ΑΒ. Εξέτασε και δικαιολόγησε τη σχετική θέση των ευθειών ΑΒ και ΓΔ, καθώς επίσης και των ΑΓ και ΒΔ.
6. Σχεδίασε τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ και ΕΒΓ, έτσι ώστε οι κορυφές Α, Δ και Ε να βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ και τα ύψη των τριγώνων αυτών από τις κορυφές Α, Δ και Ε να είναι ίσα με 3cm το καθένα. Βρες (α) ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών ΑΔ και ΔΕ; (β) ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών ΑΔ και ΒΓ; Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β, που απέχουν 2cm από την ε και δεν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος αυτής. Σχεδίασε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες προς την ε έτσι ώστε η $ε_1$ να διέρχεται από το Α και η $ε_2$ από το Β. Ποια είναι η σχετική θέση των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$;

Β.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 1 διδακτική ώρα

Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο τη διαισθητική και εμπειρική εμπέδωση των εννοιών του κύκλου και του κυκλικού δίσκου. Στη συνέχεια, δίνεται ο ορισμός της έννοιας του κύκλου ως γεωμετρικού τόπου των σημείων που απέχουν ίση απόσταση (ακτίνα) από ένα σημείο (κέντρο). Καθορίζεται ο συμβολισμός του κύκλου (Ο,ρ) και ο τρόπος της κατασκευής του με διαβήτη. Δίνονται οι ορισμοί των ίσων κύκλων και των ομόκεντρων κύκλων και ακολουθούν οι ορισμοί των εννοιών της χορδής, της διαμέτρου, του τόξου και του κυκλικού δίσκου. Ακολουθεί η πρόταση που αφορά τη σχέση ακτίνας και διαμέτρου.
[Σημείωση: Εδώ, μπορεί να αναφερθεί ο διαχωρισμός του επιπέδου, από έναν κύκλο, σε τρία διακεκριμένα μέρη: το εσωτερικό, την περιφέρεια και το εξωτερικό μέρος, ως σύνολα σημείων που έχουν την ιδιότητα να απέχουν από το κέντρο του κύκλου μικρότερη, ίση και μεγαλύτερη απόσταση από την ακτίνα του αντίστοιχα].

Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει σκοπό την απόκτηση της δεξιότητας των μαθητών πάνω στην κατασκευή ενός τριγώνου με δεδομένες τις τρεις πλευρές ή και άλλων γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι απλές και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών σε κατασκευές σχετικές με τις έννοιες που αναπτύχθηκαν σ' αυτήν την παράγραφο.

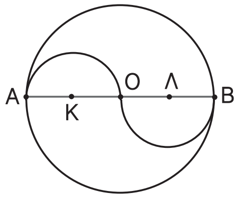
Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι από τις οποίες

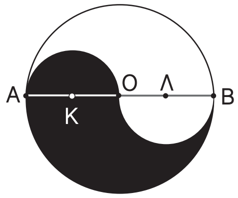
- η 1η είναι ένα παιχνίδι που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα\ την έννοια του κύκλου και
- η 2η αφορά κατασκευές δύο τριγώνων με δεδομένες τις τρεις πλευρές, τα μήκη των οποίων, όμως, δεν είναι τέτοια που να επιτρέπουν τις κατασκευές αυτές, με σκοπό να γίνουν κατανοητοί οι αντίστοιχοι περιορισμοί που πρέπει να ισχύουν σ' αυτές τις περιπτώσεις.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Πάρε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=4cm και χρωμάτισε τα σημεία του επιπέδου, που απέχουν από το Α λιγότερο από 2cm και από το Β λιγότερο από 36mm. Βρες τα σημεία του επιπέδου που απέουν από ένα σημείο Μ: (α) περισσότερο από 1,5cm, (β) λιγότερο από 2,5cm και (γ) περισσότερο από 1,5cm και ταυτόχρονα λιγότερο από 2,5cm.

2. Σχεδίασε το κινέζικο σύμβολο Yin-Yan
Λύση: Διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ** σε τέσσερα ίσα μέρη. Έστω ότι τα μέσα των **ΑΒ**, **ΑΟ** και **ΟΒ** είναι τα **Ο**, **Κ** και **Λ** αντίστοιχα.
Σχεδιάζουμε τον κύκλο (**Ο,ΑΒ/2**) και χαράσσουμε τα ημικύκλια (**Κ,ΑΒ/4**) και (**Λ,ΑΒ/4**), το ένα προς τα πάνω και το άλλο προς τα κάτω. Όταν γραμμοσκιάσουμε το ένα από τα δύο μέρη του κυκλικού δίσκου που δημιουργούνται από τα ημικύκλια και το μεγάλο κύκλο, έχουμε το ζητούμενο σχήμα.





Β.1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο: τη συσχέτιση της γνωστής αναπαράστασης, που συναντάμε συχνά στην καθημερινή ζωή (δημοσκοπήσεις, εκλογές κλπ), με την έννοια του μέτρου του τόξου, ως ποσοστού τυχόντος κύκλου. Σκοπός είναι να γίνει κατανοητό, από τους μαθητές ότι το μέτρο του τόξου ταυτίζεται με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και όχι με το μήκος του, με το οποίο έχει σχέση απλής αναλογίας.

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της έννοιας της επίκεντρης γωνίας, η αντιστοίχισή της με το τόξο και η συνθήκη, με την οποία δύο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα και αντίστροφα.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο να δείξει ότι για να κατασκευάσουμε μία γωνία δεδομένου μέτρου σε μοίρες, χρησιμοποιώντας το μοιρογνωμόνιο, την καθιστούμε επίκεντρη γωνία του κύκλου του μοιρογνωμονίου και κάνουμε χρήση των συμπερασμάτων της ενότητας αυτής.
- το 2ο και 3ο αφορούν τον τρόπο κατασκευής ενός τριγώνου, όταν δίνονται δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία ή μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτή γωνίες, αφού και στις δύο περιπτώσεις κάνουμε χρήση της ίδιας μεθόδου κατασκευής γωνίας.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) η 1η έως και η 3η είναι απλές εφαρμογές της θεωρίας,
(β) η 4η έως και 5η είναι περισσότερο σύνθετες και
(γ) η 6η είναι άσκηση κατασκευής τριγώνου από τρεις πλευρές και εύρεσης, των γωνιών του με μέτρηση.

Προτείνεται δραστηριότητα για το σπίτι με την οποία επιδιώκεται ο έλεγχος της κατανόησης των ορισμών και κανόνων της θεωρίας.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Σχεδίασε δύο ευθείες $ε_1 \perp ε_2$ και να ονομάσεις Ο το σημείο της τομής τους. Πάρε σημείο Α της $ε_1$, ώστε να είναι ΟΑ=52mm. Γράψε ημιευθεία Αx, που σχηματίζει με την ημιευθεία ΑΟ γωνία 42°. Ονόμασε Β το σημείο στο οποίο η ημιευθεία Αx τέμνει την $ε_2$ και μέτρησε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΟΑΒ.
2. Σχεδίασε μια γωνία $x\hat{O}y=76°$. Γράψε μια ημιευθεία Οz που να χωρίζει τη γωνία $x\hat{O}y$ σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μια να είναι 56°.
3. Σχεδίασε ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και πάρε σημείο Α της πλευράς Οx, ώστε να είναι ΟΑ=3,5cm. Βρες σημείο Β της Οy, ώστε να είναι ΑΒ=7cm. Μέτρησε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΟΑΒ.
4. Σχεδίασε ένα κυκλικό διάγραμμα και ένα ημικυκλικό διάγραμμα, που να περιγράφει την κατανομή των ποσοστών 40%, 35% και 25%.
5. Τοποθέτησε ένα «Χ» στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΜΟΙΡΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ						
	100%	25%	30%	75%	12,5%	50%	10%
36°							
45°							
90°							
108°							
180°							
270°							
360°							

Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο να δείξει τον τρόπο κατασκευής εφαπτόμενου κύκλου σε μία δεδομένη ευθεία σ' ένα σημείο της,
- το 2ο την κατασκευή εφαπτομένης ευθείας σε δεδομένο κύκλο σ' ένα σημείο του και
- το 3ο την κατασκευή εφαπτόμενων τμημάτων στα άκρα μιας χορδής κύκλου.

Οι πέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι εύκολες και έχουν σκοπό την ανάπτυξη της δεξιότητας των μαθητών σε κατασκευές σχετικές με τις έννοιες που αναπτύχθηκαν σ' αυτή την ενότητα.

Προτείνονται δύο δραστηριότητες για το σπίτι που έχουν το ίδιο σκοπό με τις ασκήσεις.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

[Σημείωση: Πρέπει να κατανοηθεί καλά ότι η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου από μια ευθεία, χαρακτηρίζει και τη σχέση της ευθείας, ως προς τον κύκλο. Επίσης, πρέπει οι μαθητές να μπορούν να σχεδιάζουν εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του κύκλου].

1. Σύγκρινε τα εφαπτόμενα τμήματα, που ορίζονται από ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και τα σημεία επαφής των εφαπτομένων ευθειών, οι οποίες άγονται προς το κύκλο αυτό από το εξωτερικό αυτό σημείο.
2. Βρες πόσοι κύκλοι που να διέρχονται από το ίδιο σημείο Μ με ακτίνα 4 cm μπορούν να σχεδιαστούν. Που θα βρίσκονται τα κέντρα τους;

3. Σχεδίασε έναν κύκλο κέντρου Ο και να πάρεις ένα σημείο Α εκτός του κύκλου. Χάραξε την ΟΑ, στη συνέχεια, χάραξε τον κύκλο κέντρου (Α,ΑΟ) και ονόμασε Β το σημείο, που η ΟΑ ξανατέμνει τον τελευταίο κύκλο και Γ, Δ τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Φέρε τις ευθείες ΒΓ, ΒΔ. Τι παρατηρείς;
4. Σχεδίασε έναν κύκλο και πάρε τέσσερα τυχαία σημεία του. (α) Σχεδίασε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά και προέκτεινέ τις ώσπου να τμηθούν. Τι σχήμα δημιουργείται; Πότε θα ήταν τετράγωνο; (β) Σχεδίασε τις χορδές που έχουν άκρα αυτά τα τέσσερα σημεία του κύκλου. Τι σχήμα προκύπτει;
5. Σε έναν κύκλο να φέρεις δύο τυχαίες διαμέτρους και να ενώσεις τα άκρα τους. (α) Μέτρησε τις γωνίες του τετραπλεύρου (β) Γράψε τις εφαπτόμενες στα άκρα των διαμέτρων και να τις προεκτείνεις μέχρι να τμηθούν. Μέτρησε τις πλευρές του εξωτερικού τετραπλεύρου. Τι παρατηρείς; (γ) Αν οι αρχικές διάμετροι ήταν κάθετοι μεταξύ τους, τι θα είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

(α) Ενδεικτικοί στόχοι:
- Η αναγνώριση των νοημάτων των μαθηματικών εννοιών
- Η εκτίμηση της συνεισφοράς των μαθηματικών όρων στην απόδοση ευρύτερης σημασίας νοημάτων, που συνδέονται με όλα τα γνωστικά αντικείμενα
- Ο εντοπισμός της εννοιολογικής διαφοράς που μπορεί να έχουν οι μαθηματικοί όροι, όταν χρησιμοποιούνται σε άλλα αντικείμενα ή στην καθημερινή ζωή

(β) Ενδεικτικές πηγές:
- Σχεδόν ολόκληρος ο έντυπος, ηλεκτρονικός και προφορικός λόγος

(γ) Μαθήματα σύνδεσης: Όλα τα μαθήματα.

Κεφάλαιο Β.2. Συμμετρία

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 10 διδακτικές ώρες

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να εξεταστεί, αναλυτικά, η συμμετρία με αφετηρία τα υλικά σώματα ή μορφώματα και στη συνέχεια να αναπτυχθεί η αντίστοιχη γεωμετρική έννοια που θα αποκαλύψει τις ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων. Για να αναδειχθεί, έτσι, η σχέση της Γεωμετρίας με τη φυσική πραγματικότητα και κυρίως η ερμηνευτική της δυνατότητα. Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να μπορούν οι μαθητές, αφενός, να αναγνωρίζουν την εσωτερική συμμετρία σε διάφορα σχήματα, αφετέρου να αναπαράγουν ένα σχήμα με τη χρήση των κανόνων συμμετρίας. Η ανάπτυξη του κεφαλαίου της συμμετρίας έγινε με πολλές εικόνες και παραδείγματα στο βιβλίο του μαθητή, ώστε ο διδάσκων να έχει επαρκές διδακτικό υλικό για τις ώρες που διατίθενται. Εν τούτοις, πιστεύουμε ότι η προφορική ανάπτυξη απ' αυτόν μπορεί να δώσει ευρύτερη διάσταση στο θέμα, με την αναφορά του ρόλου της συμμετρίας ειδικότερα στην Αρχιτεκτονική, στην Τεχνολογία, στη Φύση, στη Βιολογία και στην Τέχνη.
Το αντικείμενο είναι κατάλληλο και για ομαδική εργασία μαθητών, εφόσον υπάρχει η δυνατότητα. Το κεφάλαιο της συμμετρίας ενδείκνυται, ιδιαίτερα, ώστε να ασκηθούν οι μαθητές στη σωστή χρήση των γεωμετρικών οργάνων και να αποκτήσουν την απαιτούμενη ευχέρεια στις σχετιές κατασκευές. Επίσης, δίνεται η δυνατότητα, μέσα από την αναγνώριση συμμετριών, να γίνει μια άλλη προσέγγιση σύγκρισης γεωμετρικών στοιχείων σχημάτων με ευχερέστερο τρόπο, που θα διευκολύνει μελλοντικά τους μαθητές σε αυστηρότερες αποδεικτικές διαδικασίες.

Β.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> 2 διδακτικές ώρες

<u>Η προτεινόμενη δραστηριότητα για τη τάξη έχει σκοπό</u> την κατανόηση των ιδιοτήτων που έχουν τα συμμετρικά σημεία και τα συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα συμμετρίας.

<u>Τα εννέα προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:</u>

(α) το $1^{ο}$ την κατανόηση της ιδιότητας των ιδίων σημείων του άξονα συμμετρίας,

(β) το $2^{ο}$ έως και το $7^{ο}$ να αποκτήσουν οι μαθητές τη δεξιότητα στην κατασκευή των συμμετρικών ως προς άξονα συμμετρίας διαφόρων βασικών γεωμετρικών σχημάτων (σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, ημιευθείας, γωνίας, τριγώνου και κύκλου)

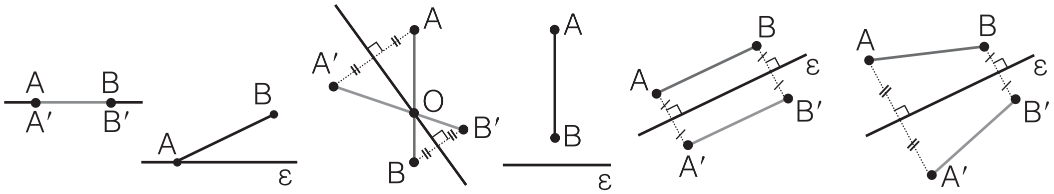
(γ) στο $8^{ο}$ και στο $9^{ο}$ να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με δύο σχετικά δύσκολα γεωμετρικά προβλήματα.

<u>Οι τρεις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα αποσκοπούν</u> στην εξοικείωση των μαθητών με την κατασκευή συμμετρικών διαφόρων σχημάτων.

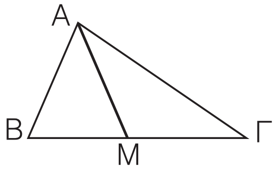
<u>Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες για το σπίτι είναι</u> δύο ασκήσεις ενδιαφέρουσες μεν, αλλά για λίγους μαθητές αυτής της ηλικίας.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Βρες το συμμετρικό του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, ως προς την ευθεία ε.



2. Αν τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς άξονα μια ευθεία ε, τότε τι είναι η ευθεία ε στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;
3. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ το μέσο της πλευράς ΒΓ είναι το Μ και διάμεσος η ΑΜ. Βρες τα συμμετρικά Β' και Γ' των κορυφών Β και Γ αντίστοιχα, ως προς άξονα την ευθεία ΑΜ και σχεδίασε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα την ευθεία ΑΜ. Μετά εξέτασε το είδος του τετραπλεύρου ΒΒ'ΓΓ'.
4. Πάρε ένα σημείο Α στην πλευρά Οx μιας τυχαίας γωνίας $x\widehat{O}y$ και βρες το συμμετρικό Α' του Α, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία Οy. Δικαιολόγησε ότι η Οy είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{O}A$.
5. Δίνεται μια γωνία $x\widehat{O}y$, τα σημεία Α και Β στις πλευρές Οx και Οy αντίστοιχα και μια τυχαία ευθεία ε, που περνά από την κορυφή Ο και βρίσκεται στο εξωτερικό της $x\widehat{O}y$. Παίρνουμε τα συμμετρικά Α′ και Β′ των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία ε. Σύγκρινε τις γωνίες $A\widehat{O}B$ και $A'\widehat{O}B'$.
6. Σε κύκλο (Ο, 2cm) πάρε τρία σημεία Α, Β και Γ. Φέρε μια ευθεία ε που να περνάει από το κέντρο Ο και να μην περιέχει τα σημεία Α, Β και Γ. Να χρησιμοποιήσεις μόνο το διαβήτη και να σχεδιάσεις το συμμετρικό τρίγωνο Α′Β′Γ′ του ΑΒΓ ως προς την ευθεία ε.
7. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Κατασκεύασε το συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΑΜ. Είναι η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου που κατασκεύασες; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.



8. Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=35^\circ$ και ΑΒ=ΑΓ=4,5cm. Μετά κατασκεύασε το συμμετρικό Β′ του Β ως προς την ΑΓ, καθώς και το συμμετρικό Γ′ του Γ ως προς την ΑΒ. (α) Τι είδους είναι το τρίγωνο ΑΒ′Γ′; (β) Βρες πόσες μοίρες είναι η γωνία $B'\widehat{A}\Gamma'$, καθώς και τα μήκη των πλευρών ΑΒ′ και ΑΓ′. Να δικαιολογήσεις τις απαντήσεις σου.

Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ:</u> Έως 1 διδακτική ώρα

Στην παράγραφο αυτή ο πρώτος στόχος είναι να αναγνωρίζουν οι μαθητές στις εικόνες ή στα σχήματα την ύπαρξη αξόνων συμμετρίας. Η διαπίστωσή της θα γίνεται με πρόχειρη αντιγραφή του σχήματος σε διαφανές χαρτί και με δίπλωση κατά μήκος του πιθανού άξονα. Προτείνεται η έγκαιρη ενημέρωση των μαθητών, ώστε να έχουν μαζί τους φύλλα από διαφανές χαρτί. Οι γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων προκύπτουν ως συνέπειες της συμμε-τρίας, που διαπιστώθηκε. Με τον τρόπο αυτόν μπορούμε να εξηγήσουμε με απλά λόγια στους μαθητές ότι η αρχική εμπειρία μετασχηματίζεται σε αντίστοιχη γεωμετρική έννοια, που την απεικονίζουμε με το σχήμα. Ερευνώντας στη συνέχεια το σχήμα, ανακαλύπτουμε τις γεωμετρικές του ιδιότητες που μας βοηθούν τελικά να ερμηνεύσουμε και να κατανοήσουμε την ίδια τη φύση.

<u>Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο</u> την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης σχημάτων με άξονες συμμετρίας, με σκοπό τη διαισθητική και εμπειρική ανακάλυψη, από τους μαθητές, του ορισμού του άξονα συμμετρίας σχήματος.

<u>Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή αφορά</u> τους άξονες συμμετρίας του κύκλου.

<u>Οι πέντε προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:</u>

(α) η $1^η$ είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης πολλαπλής επιλογής,

(β) η $2^η$ έως και η $5^η$ αφορούν την εύρεση των αξόνων συμμετρίας διαφόρων σχημάτων.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Μεταξύ των παρακάτω αριθμητικών ψηφίων να βρεθούν εκείνα που έχουν:
(α) ένα άξονα συμμετρίας, (β) δύο άξονες συμμετρίας, (γ) κανένα άξονα συμμετρίας.

2. Εάν ονομάσουμε συμμετρικούς τους αριθμούς που σχηματίζονται μόνον από ψηφία που έχουν τουλάχιστον έναν άξονα συμμετρίας, τότε:
   – Βρες και γράψε τους συμμετρικούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 10 και του 100.
   – Μεταξύ των συμμετρικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του αριθμού 35.000 και μικρότεροι του αριθμού 40.000 ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;
   – Ποιος είναι ο μικρότερος πενταψήφιος συμμετρικός αριθμός και ποιος ο μεγαλύτερος;
   – Βρες δύο συμμετρικούς αριθμούς, μεταξύ του 10 και του 100, που έχουν άθροισμα ένα συμμετρικό αριθμό και μετά το ίδιο για αριθμούς μεταξύ του 100 και του 1000.
3. Υπάρχουν άξονες συμμετρίας στο πλάγιο παραλληλόγραμμο;
4. Να ξαναδείς ένα-ένα όλα τα σχήματα, που αναφέρονται σ' αυτό το κεφάλαιο, να βρεις αυτά που δεν έχουν άξονα συμμετρίας και αφού εντοπίσεις το λόγο της ασυμμετρίας τους να διερευνήσεις τη δυνατότητα, με κατάλληλη διόρθωσή τους, να γίνουν συμμετρικά.
5. Σχεδίασε μια ευθεία ε και κατασκεύασε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=4cm και $\widehat{A}=50^\circ$ έτσι, ώστε η ευθεία ε να είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου αυτού.

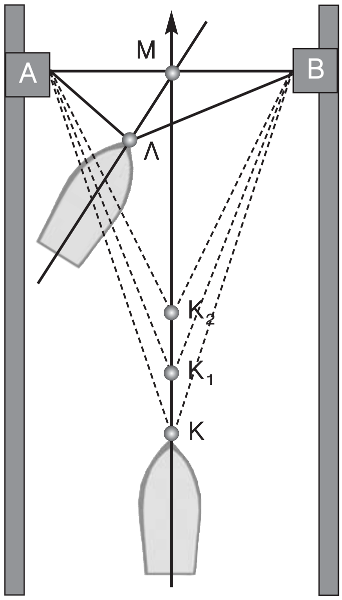
Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την, με ευρετικό τρόπο, προσέγγιση της αναγκαιότητας χάραξης της μεσοκαθέτου για την πορεία ενός πλοίου.

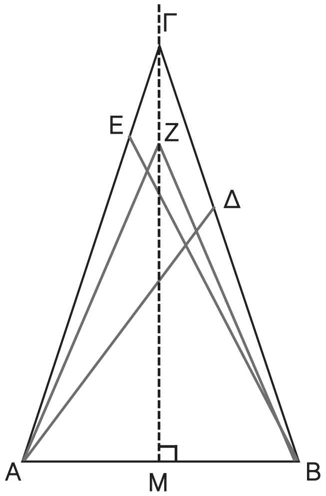
Αναλυτικά η προτεινόμενη ανάπτυξη της δραστηριότητας είναι:

Πρώτο μέρος. Η αναζήτηση και η έρευνα της έννοιας.



- Θέτουμε το πρόβλημα: Ας προσπαθήσουμε να βρούμε ποια πρέπει να είναι η πορεία ενός πλοίου, ώστε να περάσει με ασφάλεια το στενό του Ευρίπου.
- Κάνουμε το αρχικό σχήμα, υπενθυμίζοντας ότι το πέρασμα είναι στενό και επικίνδυνο, λόγω του ρεύματος του Ευβοϊκού κόλπου και των ανέμων.
- Κατευθύνουμε τη συζήτηση που ακολουθεί, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν διαισθητικά στην αρχή ότι, σε κάθε στιγμή η πλώρη Κ του πλοίου πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β. Δηλαδή να είναι: ΚΑ=ΚΒ, $K_1A=K_1B$, $K_2A=K_2B$ και ΜΑ=ΜΒ. Έτσι το σημείο Μ πρέπει να είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και η πορεία του πλοίου, δηλαδή τα σημεία Κ, K_1, K_2, ..., Μ να βρίσκονται σε μια ευθεία **κάθετη** στο τμήμα ΑΒ.
- Αποκλείουμε τη δυνατότητα να υπάρχει διαφορετική πορεία, άρα και δεύτερη ή εναλλακτική λύση. Ρωτούμε δηλαδή τι θα συνέβαινε αν το πλοίο δεν περνούσε από το μέσο Μ του ΑΒ ή αν περνούσε από το μέσο, αλλά ακολουθώντας πορεία διαφορετική από την κάθετη, π.χ. με ΛΑ<ΛΒ.
- Από τις απαντήσεις και τα συμπεράσματα των μαθητών, προκύπτει η ανάγκη να εκφράσουμε την έννοια της μεσοκάθετης ευθείας ενός ευθυγράμμου τμήματος και να διαπιστώσουμε την ιδιότητα, που έχουν όλα ανεξαιρέτως τα σημεία της.

Δεύτερο μέρος: Η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.



- Οι παρατηρήσεις γενικεύονται, αναφερόμενοι πια σε ένα «γενικό» γεωμετρικό σχήμα, που μετασχηματίζει τη διαισθητική αντίληψη της πορείας του πλοίου, στη συγκεκριμένη γνώση της έννοιας της μεσοκάθετης ευθυγράμμου τμήματος.
- Συμπληρώνουμε αυτήν την έννοια, με τη δυνατότητα γεωμετρικής κατασκευής της. Πρώτα, με υποδεκάμετρο και γνώμονα και έπειτα - πιο γεωμετρικά - με δύο τεμνόμενους κύκλους. Εξασφαλίζουμε, έτσι, τη σύνδεση της με τις άλλες γεωμετρικές έννοιες και την ένταξή της στη γεωμετρική σκέψη.

Τρίτο μέρος. Η χρήση της έννοιας για τη λύση προβλημάτων.

- Πόσα ισοσκελή τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε με βάση ένα συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

- Θεωρούμε ένα από αυτά, το ΓΑΒ, του οποίου η βάση ΑΒ είναι μικρότερη από τις ίσες πλευρές ΓΑ και ΓΒ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ, την ΑΓ στο Ε και τη μεσοκάθετη ΜΓ του ΑΒ στο σημείο Ζ. Να εξεταστεί το είδος των τριγώνων ΒΑΔ, ΒΑΖ, ΒΑΕ.
- Να διαπιστωθεί ότι οι μεσοκάθετες των χορδών ΒΔ, ΒΖ και ΒΕ περνούν από το σημείο Α.

<u>Με τα πέντε προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές γίνεται προσπάθεια</u> να αποκτήσουν οι μαθητές ευχέρεια με την κατασκευή της μεσοκαθέτου. Πιο συγκεκριμένα:

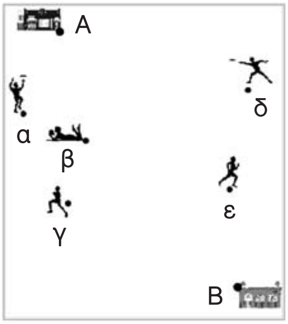
- στο 1ο η κατασκευή αυτή γίνεται κλασσικά με τον κανόνα και το γνώμονα
- στο 2ο η ίδια κατασκευή γίνεται με «τον κανόνα και το διαβήτη» (υπάρχει, στη συνέχεια, ειδική ιστορική αναφορά στον Ευκλείδη και την αντίστοιχη θεωρητική μεθοδολογία)
- τα επόμενα τρία αναφέρονται στις γνωστές κατασκευές, με την ίδια μέθοδο (με τον κανόνα και το διαβήτη), που αφορούν στην κάθετο σε ευθεία από σημείο αυτής ή εκτός αυτής και στην κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου.

<u>Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:</u>

(α) η $1^η$ είναι άσκηση αυτοαξιολόγησης, με συμπλήρωση κενών,
(β) η $2^η$ έως και η $6^η$ είναι απλές εφαρμογές κατασκευής της μεσοκαθέτου και αναφέρονται στη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της και
(γ) η $7^η$ έως και $9^η$ είναι μέτριας δυσκολίας, με τον ίδιο γνωστικό στόχο.

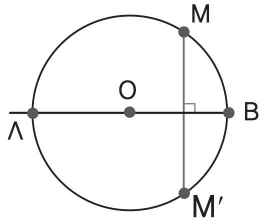
<u>Προτείνονται τρεις δραστηριότητες για το σπίτι:</u> η πρώτη αναφέρεται στην εύρεση της άγνωστης θέσης του κέντρου ενός κύκλου και οι δύο επόμενες, μέσα από την προσπάθεια επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων της πραγματικότητας, ζητούν την κατασκευή του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ:</u>



1. Το διπλανό σχήμα παριστάνει μια πλαζ, στην οποία υπάρχουν στις θέσεις Α και Β δύο καντίνες με παγωτά. Υποθέτουμε ότι κάθε λουόμενος, που θέλει να αγοράσει παγωτό πηγαίνει στην πλησιέστερη καντίνα. Τα α, β, γ, δ, ε είναι οι θέσεις των λουόμενων. Βρες:(α) Σε ποια καντίνα θα πάει ο καθένας.(β) Την περιοχή που ανήκει σε κάθε καντίνα.
2. Κατασκεύασε, με κανόνα και διαβήτη, ένα τετράγωνο πλευράς α.
3. Ο Ηλίας, ο Γιώργος και η Μάρθα μένουν στα σπίτια Α, Β, Γ αντιστοίχως και το σχολείο τους απέχει την ίδια απόσταση από τα τρία σπίτια. Μπορείς να βρεις τη θέση του σχολείου;
4. Με αρχή ένα σημείο Ο της ε, γράψε μια ημιευθεία Οx, η οποία δεν περιέχεται και δεν είναι κάθετη στην ε. Πάρε δύο σημεία Α και Β της Οx και βρες ένα σημείο της ε, που να ισαπέχει από τα Α και Β.
5. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) γράψε τους κύκλους, που έχουν διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Φέρε την κοινή χορδή τους και βρες εάν αυτή είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.
6. Σχεδίασε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και την ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ. Βρες το σημείο Μ της ε, που ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ.

7. Σχεδίασε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στο οποίο να είναι ΑΒ=ΑΔ και ΒΓ=ΓΔ και δικαιολόγησε γιατί η διαγώνιος ΑΓ είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΒΔ.
8. Έστω η διάμετρος ΑΒ του κύκλου (Κ, ρ). Φέρε δύο διαδοχικές χορδές ΑΓ και ΓΔ και κατασκεύασε τις μεσοκάθετες $ε_1$ και $ε_2$ των χορδών αυτών. Βρες εάν οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και η διάμετρος ΑΒ έχουν κάποιο κοινό σημείο. Ποιο είναι αυτό;
9. Δικαιολόγησε γιατί κάθε σημείο της εφαπτομένης ενός κύκλου, εκτός του σημείου επαφής, είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.
10. Στο σχήμα: (α) Να δικαιολογήσεις ότι τα Μ, Μ' είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ. (β) Να συγκρίνεις το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ με το ΑΜ' και το ΒΜ με το ΒΜ'. (γ) Να βρεις το συμμετρικό του ημικυκλίου ΑΜΒ ως προς την ΑΒ. (δ) Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου ως προς την ΑΒ.



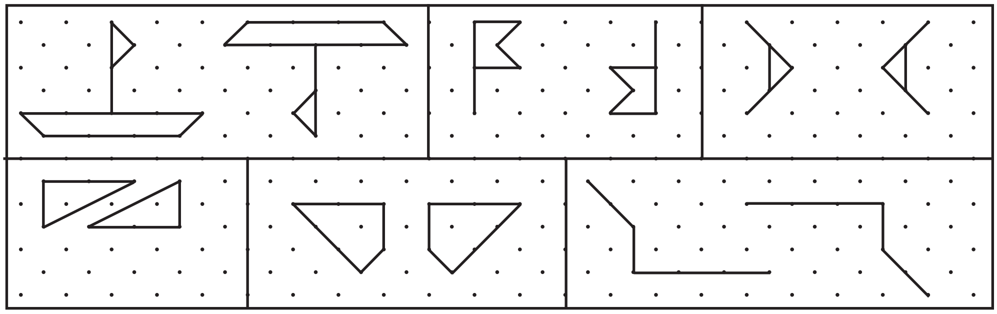
Β.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Ο στόχος, εδώ, είναι οι μαθητές να κατασκευάζουν τα συμμετρικά σχήματα ως προς κέντρο δεδομένων σχημάτων, ξεκινώντας από το συμμετρικό σημείου και προχωρώντας σταδιακά σε συνθετότερα σχήματα. Η κατασκευή, στην τάξη, συμμετρικών σχημάτων από τους μαθητές θα δώσει την ευκαιρία στο διδάσκοντα να αξιολογήσει το ποσοστό αφομοίωσης του θέματος. Πιο συγκεκριμένα να εξάγουν συμπεράσματα, όπως: «Δύο σημεία Μ και Μ' είναι συμμε-τρικά ως προς σημείο Ο, όταν το Ο είναι μέσο του ΜΜ'», «Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα» .

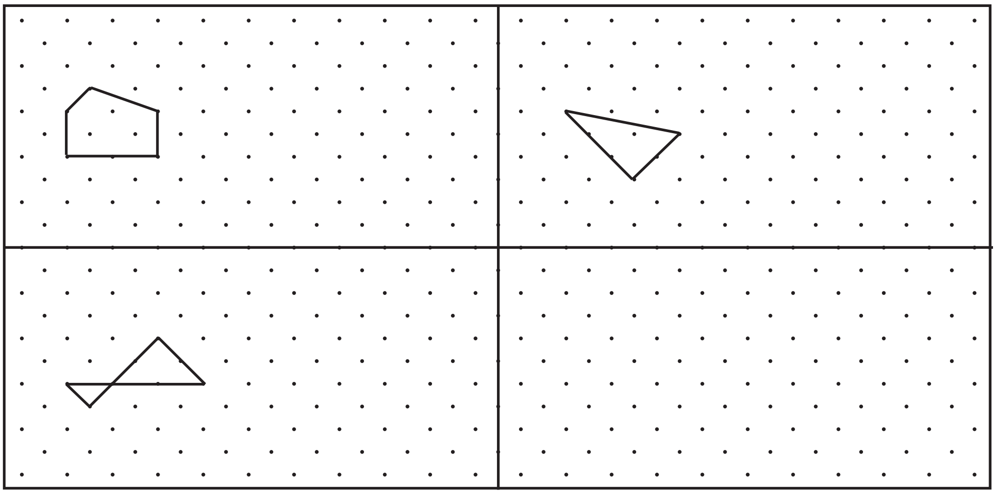
Η προτεινόμενη δραστηριότητα για τη τάξη έχει σκοπό την κατανόηση των ιδιοτήτων που έχουν τα συμμετρικά σημεία και τα συμμετρικά σχήματα ως προς κέντρο συμμετρίας.
Τα έξι προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να αποκτήσουν οι μαθητές τη δεξιότητα στην κατασκευή των συμμετρικών ως προς κέντρο συμμετρίας διαφόρων βασικών γεωμετρικών σχημάτων (σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, ημιευθείας, γωνίας, τριγώνου και κύκλου).
Οι δύο προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι μέτριας δυσκολίας και αποσκοπούν στην εξοικείωση των μαθητών με την κατασκευή συμμετρικών διαφόρων σχημάτων.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:
1. Αν τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Ο, τότε τι είναι το Ο για το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;
2. Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ, με $A\hat{O}B$ =90ο και ΟΑ=ΟΒ. Βρες τα συμμετρικά σημεία Α' και Β' των Α και Β αντίστοιχα, ως προς κέντρο συμμετρίας το Ο και εξέτασε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΑ'Β'.
3. Πάρε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, μια ευθεία ε και ένα σημείο Ο. Βρες το συμμετρικό Α'Β'Γ' του ΑΒΓ ως προς άξονα την ευθεία ε και το συμμετρικό $A_1B_1Γ_1$ του ΑΒΓ ως προς κέντρο το Ο και σύγκρινε τα τρίγωνα Α'Β'Γ' και Α1Β1Γ1. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
4. Σχεδίασε τρίγωνο ΑΒΓ, κατασκεύασε το συμμετρικό Δ του Α ως προς το Β και το συμμετρικό Ε του Δ ως προς την ευθεία ΒΓ. Δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΕΑ είναι ισοσκελή.

5. Παρατήρησε προσεκτικά τα παρακάτω ζευγάρια σχημάτων. Υπάρχει ένα ζευγάρι που έχει κατασκευαστεί διαφορετικά από τα άλλα. Βρες τον τρόπο κατασκευής αυτού και των άλλων.



Αφού βρεις τον τρόπο κατασκευής του ενός ζευγαριού, που διαφέρει από τα άλλα, να τον χρησιμοποιήσεις για να βρεις το ταίρι για καθένα από τα παρακάτω σχήματα. Το τελευταίο να είναι δικής σου επινόησης.



Β.2.5. Κέντρο συμμετρίας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η συμμετρία ως προς κέντρο διαπιστώνεται με τη στροφή του σχήματος κατά 180˚. Σκόπιμο είναι, πάντα, να αντιγράφεται πρόχειρα το σχήμα σε διαφανές χαρτί. Επειδή οι μαθητές αυτής της ηλικίας δυσκολεύονται κάπως στην περιστροφή, ίσως εξυπηρετεί να τοποθετούν κατακόρυφα το μολύβι τους στο πιθανό κέντρο συμμετρίας του σχήματος, ώστε το χαρτί να μπορεί να στρέφεται ευκολότερα. Από τα βασικά συμπεράσματα των εφαρμογών της συμμετρίας είναι η ισότητα των σχημάτων, την οποία οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν και να την κατανοήσουν απόλυτα.

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την ανάπτυξη της δεξιότητας αναγνώρισης σχημάτων με κέντρο συμμετρίας, με σκοπό τη διαισθητική και εμπειρική ανακάλυψη, από τους μαθητές, του ορισμού του κέντρου συμμετρίας σχήματος.

Μέσα από την ανάπτυξη της δραστηριότητας, αλλά και των παραδειγμάτων – εφαρμογών γίνεται προσπάθεια να αποκτήσουν οι μαθητές την ευχέρεια να αναγνωρίζουν τα συμμετρικά σχήματα, τη σχέση ισότητας των συμμετρικών σχημάτων και να βρίσκουν τα συμμετρικά σημείων και σχημάτων ως προς σημείο, καθώς και να γνωρίσουν τις συνακόλουθες γεωμετρικές ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα να εξάγουν συμπεράσματα, όπως: «Το κέντρο συμμετρίας είναι συμμετρικό του εαυτού του», «Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα».

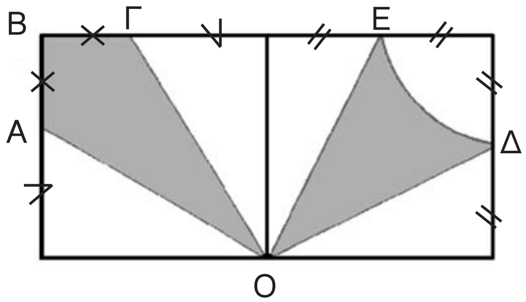
Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

- το 1ο τις ιδιότητες του κέντρου συμμετρίας του παραλληλογράμμου,
- το 2ο την εύρεση του κέντρου συμμετρίας του κύκλου και
- το 3ο την εξαγωγή του συμπεράσματος ότι ευθείες συμμετρικές ως προς κέντρο είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Οι τρεις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα αφορούν την εύρεση ύπαρξης κέντρου συμμετρίας διαφόρων σχημάτων και την κατάταξη διαφόρων γνωστών γεωμετρικών σχημάτων ανάλογα με τον αριθμό των αξόνων και του κέντρου συμμετρίας τους.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Αν γνωρίζουμε ότι ισχύει: ΟΑ=ΟΒ, είναι απαραίτητα το σημείο Ο μέσο του τμήματος ΑΒ;
2. Αν υπάρχουν άξονες συμμετρίας σ' ένα σχήμα, που περνούν από το ίδιο σημείο, υπάρχει πάντα και κέντρο συμμετρίας στο σχήμα; Δικαιολόγησε την απάντησή σου εξετάζοντας τα σχήματα: (α) ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, τετράγωνο και (β) ισόπλευρο τρίγωνο.
3. Εξέτασε εάν έχουν κέντρο συμμετρίας (α) δύο κατακορυφήν γωνίες και (β) δύο εντός εναλλάξ γωνίες. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
4. Πόσους και ποιους άξονες συμμετρίας έχει: (α) το ισοσκελές τρίγωνο, (β) το ισόπλευρο τρίγωνο, (γ) το ισοσκελές τραπέζιο.
5. Πόσους και ποιους άξονες συμμετρίας έχει: (α) το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (β) ο ρόμβος, (γ) το τετράγωνο; Γιατί το τετράγωνο έχει περισσότερους;
6. Συμπλήρωσε το παρακάτω σχήμα έτσι, ώστε το Ο να γίνει κέντρο συμμετρίας του.



Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Ειδικά, στη συμμετρία ως προς κέντρο, εκτός από την ισότητα των σχημάτων, προκύπτει ως συμπέρασμα και η παραλληλία των συμμετρικών ευθειών - ευθυγράμμων τμημάτων. Να τονιστεί αυτή η ιδιότητα και να επισημανθεί η διαφορά από τη συμμετρία ως προς άξονα.

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει στόχο την κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ονομάζονται τα μέρη του επιπέδου που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες και μια τρίτη ευθεία που τις τέμνει.

[Σημείωση: Ο λόγος που επελέγησαν για παράλληλες ευθείες τα σαφή όρια της ασφάλτου ενός δρόμου και για τέμνουσα ο άξονας ενός μονοπατιού ανάμεσα στα δύο αγροκτήματα, είναι για να μπορεί να ταυτιστεί, στο υποσυνείδητο των μαθητών, το «εντός» με την άσφαλτο και το «επί τα αυτά» με τις δύο ιδιοκτησίες].

Τα δύο προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό να εξεταστεί η σχέση που έχουν τα ζεύγη των γωνιών που σχηματίζονται όταν μια ευθεία τέμνει δύο παράλληλες ευθείες και να υπολογιστούν εάν είναι μία από αυτές γνωστή.

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι μέτριας δυσκολίας και έχουν σκοπό την εξοικείωση των μαθητών με τον υπολογισμό γωνιών, με βάση τη θεωρία της ενότητας αυτής.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Βρες το μέσον Ο του ΑΒ. Στη συνέχεια να βρεις τα συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το Ο: (α) του σημείου Α, (β) της ημιευθείας Αx′, (γ) της γωνίας με $A\widehat{O}x'$ και να συγκρίνεις τις γωνίες $A\widehat{O}x'$ και $O\widehat{B}y$ μεταξύ τους. Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

2. Δύο ευθείες παράλληλες x'x και y'y τέμνονται από τρίτη ευθεία ε στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και η γωνία $\varepsilon\widehat{A}x$ είναι 60°. Γράψε τη διχοτόμο της γωνίας $A\widehat{B}y$, που τέμνει τη x'x στο Δ και φέρε την ΑΓ κάθετη στην y'y που τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ στο σημείο Ε. Υπολόγισε όλες τις γωνίες των τριγώνων που σχηματίζονται.

3. Σε ευθεία ε πάρε διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ=4cm και ΒΓ=2cm. Με πλευρές τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ, κατασκεύασε προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε δύο ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Δικαιολόγησε γιατί είναι ΑΔ//ΒΕ και ΒΔ//ΓΕ.

Κεφάλαιο Β.3. Τρίγωνα — Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ: 8 διδακτικές ώρες

Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η παράγραφος αυτή αναφέρεται, αφενός, στην κατάταξη των τριγώνων και τη θέση που έχουν σ' αυτή τα γνωστά τρίγωνα (σκαληνό, ισοσκελές και ισόπλευρο ή οξυγώνιο, ορθογώνιο και αμβλυγώνιο) και αφετέρου, στον ορισμό των κύριων (κορυφές, πλευρές και γωνίες) και δευτερευόντων (διάμεσοι, ύψη και διχοτόμοι) στοιχείων των τριγώνων.

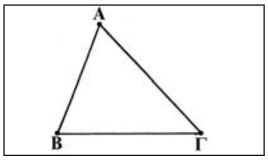
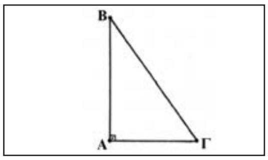
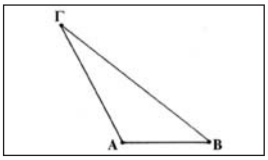
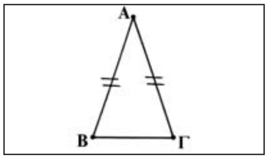
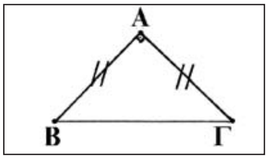
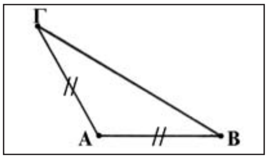
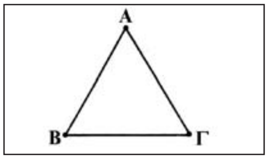
Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει ως στόχο την «ανακάλυψη», από τους μαθητές, των κριτηρίων κατάταξης των τριγώνων που, στην προκείμενη περίπτωση, αφορούν το πρώτο τη σχετική θέση (άρα το είδος των γωνιών του τριγώνου) και το δεύτερο το σχετικό μέγεθος των πλευρών των τριγώνων. Στη συνέχεια δίνονται οι ορισμοί των δευτερευόντων στοιχείων των τριγώνων (διάμεσος, ύψος και διχοτόμος).

Το παράδειγμα – εφαρμογή έχει στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές τον τρόπο κατασκευής των τριών υψών στα τρία είδη τριγώνων (οξυγώνιο, αμβλυγώνιο και ορθογώνιο).

Οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

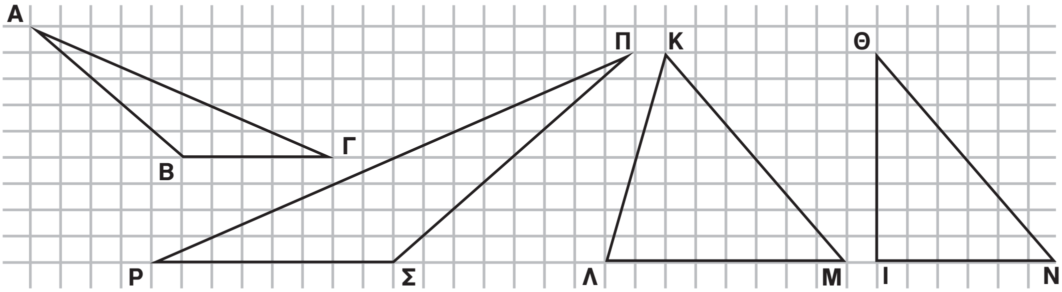
(α) η $1^η$ είναι άσκηση απαντήσεων σωστού ή λάθους και
(β) οι υπόλοιπες είναι μέτριας δυσκολίας και αποσκοπούν στην εξοικείωση των μαθητών με την κατασκευή σχημάτων σχετικών με τα στοιχεία των τριγώνων, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη για σύγκριση ευθυγράμμων σχημάτων μεταξύ τους.

Η προτεινόμενη δραστηριότητα για το σπίτι έχει στόχο την αναγνώριση και αναπαράσταση των διαφόρων ειδών τριγώνων με βάση το συνδυασμό των δύο κριτηρίων κατάταξης.

ΤΡΙΓΩΝΑ	ΟΞΥΓΩΝΙΟ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ
Σκαληνό			
Ισοσκελές			
Ισοσκελές		***Δεν υπάρχει***	***Δεν υπάρχει***

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρε από το Α την κάθετο στην ΒΓ και σύγκρινε τα τρίγωνα, στα οποία χωρίζεται το ΑΒΓ.
2. Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και βρες το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ. (α) Φέρε από το Δ παράλληλη προς τη ΒΓ και ονόμασε Ε το σημείο, στο οποίο η παράλληλη αυτή τέμνει την ΑΓ. Σύγκρινε τα τμήματα ΑΕ και ΕΓ. (β) Φέρε από το Δ την παράλληλη προς την ΑΓ και ονόμασε Ζ το σημείο, στο οποίο η παράλληλη αυτή τέμνει τη ΒΓ. Σύγκρινε τα τμήματα ΒΖ και ΖΓ.
3. Σχεδίασε από κάθε κορυφή ενός τριγώνου ευθεία παράλληλη προς την απέναντι πλευρά και σύγκρινε τα τρίγωνα που σχηματίζονται μεταξύ τους και με το αρχικό τρίγωνό.
4. Αντέγραψε σε τετραγωνισμένο χαρτί, τα παρακάτω τρίγωνα και σχεδίασε τα ύψη τους.



5. Αντέγραψε στο τετράδιό σου το διάγραμμα και να συμπληρωσέ το, κατατάσσοντας τα τρίγωνα με βάση τα κριτήρια: 1ο Σχετική θέση και 2ο Σχέση μεγέθους πλευρών.

Υπόδειξη:

ΤΡΙΓΩΝΟ

1° Κριτήριο ⇒ Οξυγώνιο | Ορθογώνιο | Αμβλυγώνιο

2° Κριτήριο ⇒ Σκαληνό | Ισοσκελές | Ισόπλευρο | Σκαληνό | Ισοσκελές | Σκαληνό | Ισοσκελές

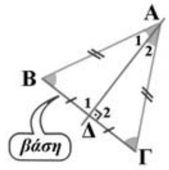
Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

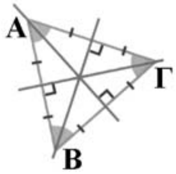
Οι τρεις προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο:

- η 1η την εμπειρική «ανακάλυψη», από τους μαθητές, της σταθερής σχέσης των τριών γωνιών κάθε τριγώνου,
- η 2η και η 3η τη γνωριμία με τις ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισοπλεύρου τριγώνου, μέσα από την ανάπτυξη παραδειγμάτων αξονικής συμμετρίας, ως προσέγγιση αποδεικτικής διαδικασίας, εύκολα αντιληπτής από τους μαθητές αυτής της ηλικίας, σύμφωνα με τις παρακάτω υποδείξεις:

Υπόδειξη για τη 2η: Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) διαπιστώνουμε με δίπλωση ότι η ευθεία της διαμέσου ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου. Κατά τη δίπλωση θα συμπέσει το τρίγωνο ΑΔΒ με το ΑΔΓ και επομένως θα είναι: $\widehat{\Delta}_1=\widehat{\Delta}_2=90^\circ$, $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ και $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.



Υπόδειξη για τη 3η: Όποια πλευρά κι αν πάρουμε ως βάση, το ισόπλευρο μπορεί να θεωρηθεί ισοσκελές, ως προς τη βάση αυτή. Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω στο ισόπλευρο τρίγωνο διαπιστώνουμε με δίπλωση ότι οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.



Στη συνέχεια, για να εμπεδωθούν τα παραπάνω συμπεράσματα προτρέπονται οι μαθητές να εξάγουν κανόνες, που σχετίζονται με τις ειδικές ιδιότητες των ισοσκελών και ισοπλεύρων τριγώνων.

Τα έξι προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν σκοπό:

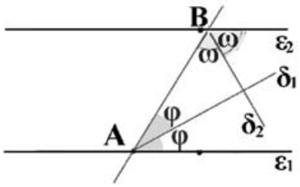
- το 1ο τη λογική διαπίστωση της ιδιότητας των τριών γωνιών κάθε τριγώνου να έχουν σταθερό πάντα άθροισμα 180°,
- το 2ο την εξαγωγή της σχέσης που συνδέει τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου,
- το 3ο την ισότητα που συνδέει τη εξωτερική γωνία κάθε τριγώνου με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών,
- το 4ο το μέτρο των γωνιών κάθε ισοπλεύρου τριγώνου,
- το 5ο το μέτρο των γωνιών κάθε ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου και
- το 6ο την εύρεση του μέτρου των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου, με δεδομένο το μέτρο μιας γωνίας του (δύο περιπτώσεις).

Οι δέκα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερις κατηγορίες:

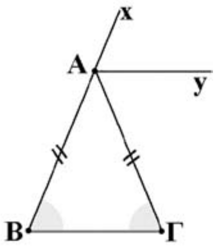
(α) η 1η είναι άσκηση με απαντήσεις σωστό ή λάθος,
(β) η 2η και η 3η αποσκοπούν στην κατασκευή τριγώνων, με τον κανόνα και το διαβήτη,
(γ) η 4η έως και η 6η είναι εφαρμογές της σταθερής σχέσης των γωνιών του τριγώνου,
(δ) η 7η και η 9η αποσκοπούν, επιπλέον, στη λύση απλών εξισώσεων και
(ε) η 10η αναφέρεται στο άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:

1. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Φέρε τις διχοτόμους δ_1 και δ_2 δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών και διαπίστωσε με τον γνώμονα ότι είναι κάθετες. Στη συνέχεια δικαιολόγησε τη διαπίστωση αυτή.



2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρε την προέκταση Αx της πλευράς ΑΒ προς το μέρος του Α και από το Α φέρε την Αy//ΒΓ. Δικαιολόγησε ότι $x\widehat{A}y = y\widehat{A}\Gamma$ και βρες τι είναι η Αy της γωνίας $x\widehat{A}\Gamma$.

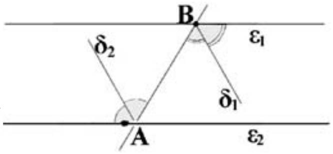


3. Γράψε ένα κύκλο (Ο, ρ) και μια διάμετρό του ΒΓ. Πάρε ένα άλλο σημείο Α του κύκλου και φέρε τις ΑΒ, ΑΓ και ΑΟ. Μέτρησε την γωνία και δικαιολόγησε την απάντησή σου.

4. Να δικαιολογήσεις γιατί (α) κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μόνο μια ορθή γωνία και (β) κάθε αμβλυγώνιο έχει μόνο μια αμβλεία γωνία.

5. Ακολούθησε την ίδια διαδικασία της προηγούμενης άσκησης για υπολόγισε το άθροισμα των γωνιών (α) ενός πενταγώνου και (β) ενός εξαγώνου.

6. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Φέρε τις διχοτόμους δ_1 και δ_2 δύο εντός εναλλάξ γωνιών και διαπίστωσε με τον κανόνα και το γνώμονα ότι είναι παράλληλες. Μετά δικαιολόγησε τη διαπίστωση αυτή.



Β.3.3. Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες

Η προτεινόμενη δραστηριότητα έχει ως στόχο:

την «ανακάλυψη», από τους μαθητές, των σχημάτων που δημιουργούνται από δύο ζευγάρια παραλλήλων ευθειών, που τέμνονται και σχηματίζουν διαφόρων ειδών παραλληλόγραμμα, όπως: πλάγιο παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο και τετράγωνο, ανάλογα εάν τέμνονται κάθετα ή πλάγια και εάν η απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών είναι ίση ή διαφορετική.

Στη συνέχεια προτρέπονται οι μαθητές να εξάγουν τον ορισμό του παραλληλογράμμου και των ειδικών κατηγοριών αυτού, δηλαδή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του τετραγώνου, καθώς και του τραπεζίου και του ισοσκελούς τραπεζίου. Παράλληλα να εμπεδώσουν την έννοια του ύψους ως απόσταση μεταξύ παραλλήλων ευθειών. Η προτεινόμενη **δραστηριότητα για το σπίτι** έχει στόχο την κατάταξη των σχημάτων με βάση κάποιο κριτήριο, το οποίο καλούνται οι μαθητές να επιλέξουν, ανεξαρτήτως αποτελέσματος.

Τα τρία προτεινόμενα παραδείγματα – εφαρμογές έχουν στόχο:

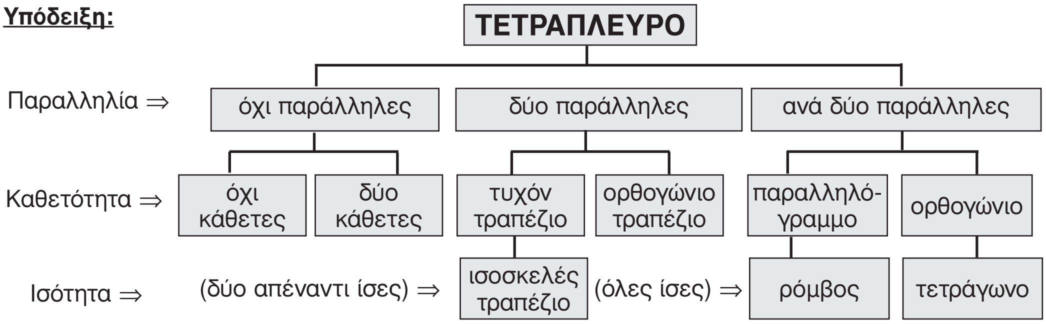
- το 1ο τη σύμπτωση των υψών του ορθογωνίου με τις πλευρές του,
- το 2ο και το 3ο αναφέρονται στην κατασκευή των υψών του παραλληλογράμμου και του ρόμβου από μία κορυφή τους.

Οι τέσσερις προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

(α) η 1η είναι άσκηση με απαντήσεις σωστό ή λάθος,
(β) η 2η αφορά το είδος των τριγώνων που σχηματίζονται σε ένα ειδικό τραπέζιο εάν φέρουμε τις διαγώνιές του και
(γ) η 3η και η 4η έχουν στόχο την κατασκευή γνωστών τετραπλεύρων με ισομεγέθη ξυλαράκια (σπίρτα), υπό τύπον παιχνιδιού.

Η δραστηριότητα για το σπίτι έχει στόχο να «ανακαλύψουν» οι μαθητές τα κριτήρια για την κωδικοποίηση της κατάταξης των τετραπλεύρων.

Υπόδειξη:



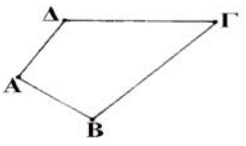
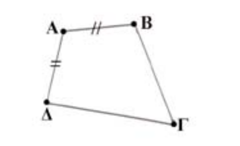
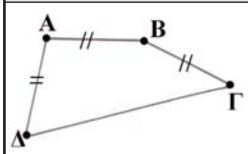
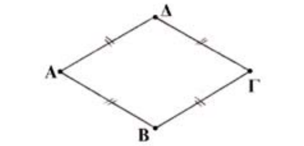
Το ιστορικό σημείωμα έχει τον σκοπό να «δουν» οι μαθητές την ιστορική διαδρομή, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, του ιδίου θέματος, δηλαδή την κατάταξη των τετραπλεύρων.

ΠΡΟΣΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

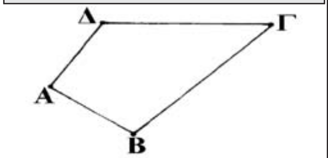
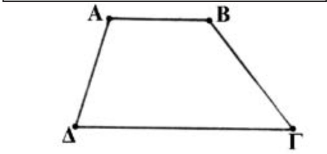
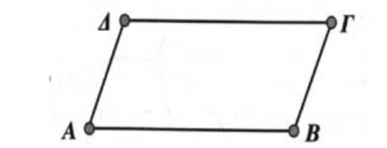
Να ταξινομηθούν τα τετράπλευρα με βάση κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο.

Υπόδειξη:

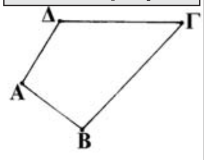
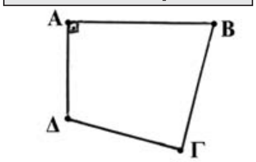
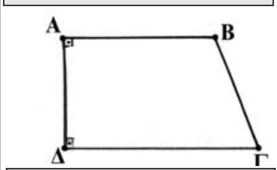
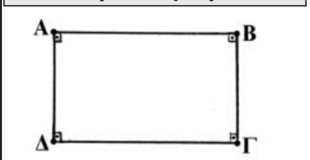
(α) Αν το κριτήριο είναι η ισότητα των πλευρών τους διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Πλευρές άνισες	Δύο πλευρές άνισες	Τρεις πλευρές άνισες	Όλες οι πλευρές άνισες
			
Τυχαίο τετράπλευρο (χωρίς ιδιαίτερη ονομασία)			**Ρόμβος**

(β) Αν το κριτήριο είναι η παραλληλία των πλευρών τους θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Όχι παράλληλες πλευρές	Δύο παράλληλες πλευρές	Ανά δύο απέναντι παράλληλες πλευρές
		
Τυχαίο τετράπλευρο	**Τραπέζιο**	**Παραλληλόγραμμο**

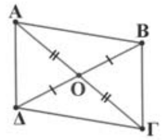
(γ) Αν το κριτήριο είναι η καθετότητα των πλευρών τους θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Όχι κάθετες πλευρές	Δύο κάθετες άνισες	Τρεις κάθετες άνισες	Ανά δύο διαδοχικές κάθετες πλευρές
			
Τυχαίο τετράπλευρο	**Τετράπλευρες με δύο πλευρές κάθετες**	**Ορθογώνιο Τραπέζιο**	**Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο**

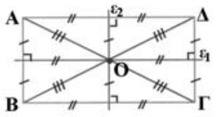
Β.3.4. Ιδιότητες παραλληλογράμμου – ορθογωνίου – ρόμβου – τετραγώνου – τραπεζίου – ισοσκελές τραπεζίου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΛΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ: 2 διδακτικές ώρες
Οι δύο προτεινόμενες δραστηριότητες έχουν στόχο τη γνωριμία με τις ιδιότητες όλων των ειδών παραλληλογράμμων και του τραπεζίου, μέσα από την ανάπτυξη παραδειγμάτων κεντρικής και αξονικής συμμετρίας ως προσέγγιση αποδεικτικής διαδικασίας, εύκολα αντιληπτής από τους μαθητές αυτής της ηλικίας, σύμφωνα με τις παρακάτω υποδείξεις:

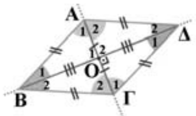
Υπόδειξη για τη 1η:
Με στροφή κατά 180° γύρω από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, διαπιστώνουμε ότι αυτό συμπίπτει με τον εαυτό του, άρα έχει κέντρο συμμετρίας το Ο.
Επειδή κατά τη στροφή αυτή το Α συμπίπτει με το Γ και το Β με το Δ, καταλαβαίνουμε ότι ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ.
Επίσης, ΑΒ=ΓΔ και ΑΔ=ΓΒ. Επομένως θα είναι $\widehat{A} = \widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$.



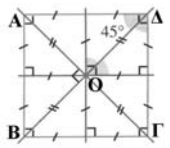
Υπόδειξη για τη 2(α): Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του φέρνουμε τις ε_1 και ε_2 κάθετες στις ΑΒ και ΒΓ, αντίστοιχα. Με διπλώσεις διαπιστώνουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι άξονες συμμετρίας του ορθογωνίου.
Από τη δίπλωση κατά μήκος της ε_1 βλέπουμε ότι: ΟΔ=ΟΓ και ΟΑ=ΟΒ.
Από τη δίπλωση κατά μήκος της ε_2 βλέπουμε ότι: ΟΔ=ΟΑ και ΟΓ=ΟΒ.
Επομένως ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ, άρα και ΑΓ=ΒΔ



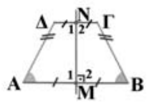
Υπόδειξη για τη 2(β): Στο ρόμβο ΑΒΓΔ διαπιστώνουμε με δίπλωση ότι οι ευθείες, στις οποίες βρίσκονται οι διαγώνιες, είναι άξονες συμμετρίας.
Από τη δίπλωση κατά μήκος της διαγωνίου ΑΓ προκύπτει ότι: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 90^\circ$, ΟΒ = ΟΔ, $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ και $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ενώ
από τη δίπλωση κατά μήκος της διαγωνίου ΒΔ προκύπτει ακόμα ότι:
ΟΑ = ΟΓ, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.



Υπόδειξη για τη 2(γ): Επειδή το τετράγωνο είναι ρόμβος και ορθογώνιο ταυτόχρονα, συμπεραίνουμε ότι έχει όλες τις προηγούμενες ιδιότητες.



Υπόδειξη για τη 2(δ):
Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ, ΑΔ=ΒΓ) διαπιστώνουμε με δίπλωση ότι η ευθεία που περνάει από τα μέσα Μ και Ν των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας του τραπεζίου.
Κατά τη δίπλωση, θα συμπέσει το ΑΜΝΔ με το ΒΜΝΓ και επομένως θα είναι: $\widehat{A} = \widehat{B}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 = 90^\circ$



Στη συνέχεια προτρέπονται οι μαθητές να εξάγουν τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και των ειδικών κατηγοριών αυτού, δηλαδή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του τετραγώνου, καθώς και του τραπεζίου και του ισοσκελούς τραπεζίου.

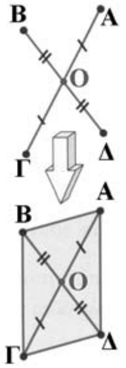
<u>Το προτεινόμενο παράδειγμα – εφαρμογή έχει στόχο</u> την εύρεση του κέντρου συμμετρίας των ειδικών περιπτώσεων παραλληλογράμμου, δηλαδή του ρόμβου, του ορθογωνίου και του τετραγώνου, μέσα από την εφαρμογή του ορισμού της κεντρικής συμμετρίας.

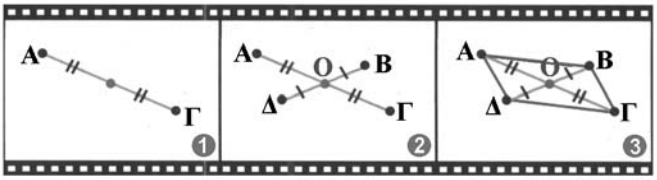
<u>Οι εννέα προτεινόμενες ασκήσεις – προβλήματα είναι απλές κατασκευαστικές με στόχο</u> να εξασκηθούν οι μαθητές, αφενός, στην επανάληψη της κατασκευής καθέτων, διχοτόμων και προεκτάσεων ευθυγράμμων τμημάτων, με τον κανόνα και το διαβήτη και αφετέρου στην αναγνώριση γνωστών ευθυγράμμων σχημάτων, χρησιμοποιώντας τις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

<u>ΠΡΟΣΘΕΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ:</u>

Όταν σ' ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι διχοτομούνται αυτό θα είναι παραλληλόγραμμο.

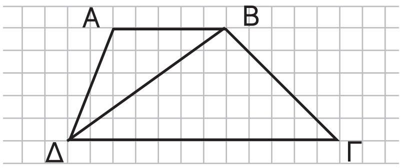
<u>Υπόδειξη:</u> Σχεδιάζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, που διχοτομούνται στο Ο και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το οποίο έχει ως διαγώνιες τα τμήματα αυτά. Επειδή το ΓΔ είναι συμμετρικό του ΑΒ ως προς Ο, θα είναι ΓΔ//ΑΒ. Ομοίως τα ΒΓ και ΔΑ είναι συμμετρικά ως προς Ο, οπότε είναι και ΒΓ//ΔΑ. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.





<u>ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ:</u>

1. Χάραξε τα ύψη του παραλληλογράμμου από την κορυφή Α, όταν η γωνία Α είναι οξεία.
2. Η μία πλευρά ενός παραλληλογράμμου είναι 4cm και η περίμετρός του 20cm. Βρες τις άλλες πλευρές.
3. Η μία πλευρά ενός παραλληλογράμμου είναι 6cm και η περίμετρός του είναι ίση με την περίμετρο ενός τετραγώνου με πλευρά 7cm. Βρες τις άλλες πλευρές του παραλληλογράμμου.
4. Να κατασκευάσεις τετράγωνο με περίμετρο 16cm.
5. Η γωνία Α ενός ρόμβου είναι 32˚. Υπολόγισε όλες τις γωνίες του.
6. Η γωνία Α ενός παραλληλογράμμου είναι 60˚. Φέρε τις διχοτόμους των γωνιών του και υπολόγισε όλες τις γωνίες του σχήματος.
7. Υπολόγισε καθεμιά από τις γωνίες ενός ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), αν γνωρίζεις ότι είναι $\widehat{A} = 48^\circ$.



8. Σχεδίασε τα ύψη των τριγώνων ΑΒΔ και ΔΒΓ, που σχηματίζονται, όταν φέρεις τη διαγώνιο ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ και μέτρησε τα ύψη των δύο αυτών τριγώνων με το υποδεκάμετρο. Τι παρατηρείς; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
9. Προέκτεινε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος της κορυφής Α ενός τριγώνου ΑΒΓ και πάρε τμήμα ΑΔ=ΑΒ πάνω στην προέκταση της ΑΒ και τμήμα ΑΕ=ΑΓ πάνω στην προέκταση της ΑΓ. Να εξετάσεις εάν ΔΕ=ΒΓ. Τι συμπεραίνεις για το τετράπλευρο ΒΓΔΕ;

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ (ΕΡΓΑΣΙΕΣ)

1. Ψάξε τα γεωμετρικά σχήματα που βλέπεις γύρω σου στην τάξη, στο σπίτι, στο δρόμο, στα μουσεία, στα κτίρια ή σε αντικείμενα που τράβηξαν την προσοχή σου. Ό,τι σου κάνει εντύπωση ή σου θυμίζει κάτι σχετικό μπορείς να το φωτογραφήσεις ή να το ζωγραφίσεις ή τέλος να το διηγηθείς στους συμμαθητές σου. Όταν μαζέψεις κάποιο υλικό που μπορεί να αξιολογηθεί, κράτησε τα πιο αποτελεσματικά ευρήματα. Μέσα από μια συζήτηση, με τους συμμαθητές σου και τον καθηγητή σου, μπορείς να καταλήξεις στο τρόπο που πρέπει να γίνει η παρουσίαση αυτής της δουλειάς. Η ολοκλήρωση της εργασίας μπορεί να γίνει με τη δημιουργία ενός άλμπουμ μέσα στο οποίο θα τοποθετήσεις αυτά που επέλεξες τελικά έτσι, ώστε να αντιστοιχούν στα θέματα που θέλεις να εξηγήσεις και να τεκμηριώσεις.

2. Μπορείς π.χ. να ψάξεις και να βρεις όλες τις σημαίες των κρατών του κόσμου που ισχύουν σήμερα. Να τις σχεδιάσεις ή να τις ζωγραφίσεις και να διερευνήσεις (α) πόσους άξονες συμμετρίας έχουν (0,1,2,3,...) και (β) αν έχουν ή όχι κέντρο συμμετρίας (0 ή 1). Να βάλεις τα αποτελέσματα της έρευνας σε ένα πίνακα και να τα συγκρίνεις μεταξύ τους. Όταν τελειώσει και ολοκληρωθεί η έρευνα απ' όλα τα παιδιά της τάξης, μέσα από μια συζήτηση με τους συμμαθητές σου και τον καθηγητή σου, μπορείς να καταλήξεις στον τρόπο που πρέπει να γίνει η παρουσίαση αυτής της δουλειάς. Η ολοκλήρωση της εργασίας μπορεί να γίνει με τη δημιουργία ενός άλμπουμ, μέσα στο οποίο θα τοποθετήσεις αυτά που επέλεξες να ερευνήσεις.

3. «Αχ βρε Οβελίξ». Πριν εμφανιστούν οι Ρωμαίοι, τίποτα δεν ανησυχούσε τους Γαλάτες. Όπως κάθε πρωί στο χωριό του Αστερίξ όλα ήταν ήρεμα. Τρεις άνθρωποι με ανάγκες και επιθυμίες - όπως όλοι μας - τριγυρνούν τα σπίτια του χωριού και προσπαθούν να ανταλλάξουν τα προϊόντα τους. Ο Οβελίξ που έχει χορτάσει πια αγριογούρουνο, προσφέρει μεν το Μενίρ που έφτιαξε, αλλά ζητάει ψάρια. Ο ψαράς, που δεν θέλει Μενίρ, προσφέρει ψάρια, αλλά ζητάει αγριογούρουνο. Ο κυνηγός, που δεν θέλει ψάρια, δίνει μεν αγριογούρουνο, αλλά ζητάει Μενίρ. Συναντήθηκαν βέβαια ανά δύο, αλλά δυστυχώς δεν συμφωνήθηκε καμία ανταλλαγή και κανείς δεν ήταν ικανοποιημένος. Κι' όμως υπάρχει τρόπος να είναι όλοι ευχαριστημένοι. Μήπως μπορείς να τους βοηθήσεις; Ας το δούμε πιο απλά:

1. Οβελίξ	προσφέρει Μενίρ, ζητάει ψάρια
2. Ψαράς	προσφέρει ψάρια, ζητάει αγριογούρουνο
3. Κυνηγός	προσφέρει αγριογούρουνο, ζητάει Μενίρ

Εδώ θα γίνει η συναλλαγή

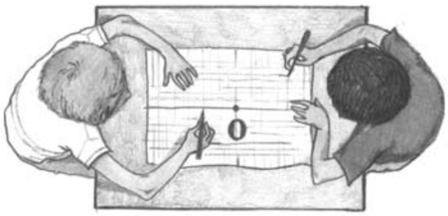
4. **Η ΑΤΑΞΙΑ.** Τέσσερις μαθητές, ο Γιάννης, ο Δημήτρης, ο Γιώργος και ο Νίκος κατηγορούνται για μια αταξία, που την έκανε μόνος του ένας απ' αυτούς. Ας τους ακούσουμε όμως να απολογούνται:

   Γιάννης: Ο Δημήτρης το έκανε
   Δημήτρης: Ο Νίκος το έκανε
   Γιώργος: Δεν το έκανα εγώ
   Νίκος: Ο Δημήτρης λεει ψέματα ότι το έκανα εγώ

   Αν γνωρίζεις ότι μόνο μια από τις απολογίες είναι αληθινή, μπορείς να βρεις τον ένοχο;
   Προσπάθησε ως εξής: Αν υποθέσουμε ότι ο Γιάννης λεει αλήθεια, τότε:
   – Όπως λεει ο Γιάννης, το έκανε ο Δημήτρης
   – Όλοι οι άλλοι λένε ψέματα
   – Οπότε ο Γιώργος θα λεει ψέματα, επομένως το έκανε αυτός
   – Δηλαδή την αταξία την έκαναν δύο. Ο Δημήτρης και ο Γιώργος
   – Αυτό όμως αποκλείεται, γιατί ξέρουμε ότι ένας μόνο το έκανε
   – Έτσι αποκλείεται να λεει αλήθεια ο Γιάννης
   Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο. Στο τέλος θα αποκλειστούν όλοι εκτός από έναν.

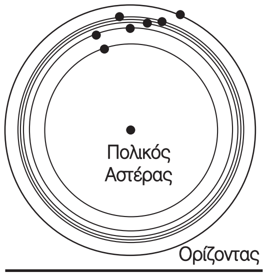
   (Από το περιοδικό «Ευκλείδης» της Ε.Μ.Ε)

5. Οι κανόνες του παρακάτω παιχνιδιού είναι:
   (α) Ο Κώστας γράφει μια γραμμή,
   (β) Ο Γιάννης γράφει την συμμετρική της ως προς το σημείο Ο και τη συνεχίζει φέρνοντας μια άλλη γραμμή και
   (γ) Ο Κώστας γράφει τη συμμετρική αυτής που έγραψε ο Γιάννης και τη συνεχίζει με μια άλλη δικιά του γραμμή κ.ο.κ. Χάνει εκείνος που έκανε λάθος κίνηση. Παίξε κι εσύ με το φίλο σου αυτό το παιχνίδι πάνω σε:
   (α) τετραγωνισμένο χαρτί και
   (β) σε λευκό χαρτί.



6. Η συμμετρία που εμφανίζεται στη φύση (Βιολογία, Ανθρωπολογία κλπ) δεν είναι σχεδόν ποτέ απόλυτη και τέλεια. Αντίθετα, η κατασκευαστική συμμετρία (Αρχιτεκτονική, Τέχνη κλπ) έχει τη δυνατότητα να προσεγγίσει το τέλειο, το οποίο όμως υπάρχει, μόνο, στη γεωμετρική συμμετρία. Να αναζητήσεις παραδείγματα από κάθε περίπτωση, να εξετάσεις τις διαφορές και να διαπιστώσεις τη σκοπιμότητα ή την ανάγκη που δημιούργησε αυτές τις διαφορές.

7. Ο κύκλος, που φαίνεται να διαγράφει κάθε αστέρι, με κέντρο τον πολικό αστέρα (στο Βόρειο ημισφαίριο), ολοκληρώνεται κάθε 24 ώρες. Στο σχήμα φαίνεται η θέση της Μεγάλης Άρκτου, τον Ιανουάριο στις 6 π.μ. Προσπάθησε να βρεις τη θέση του αστερισμού αυτού τον ίδιο μήνα στις 6 μ.μ.



ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ