

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ε.2

Σ ύ ν ο λ α

ΕΠΙΠΕΔΟ 1ο

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

α) Βασικές ερωτήσεις θεωρίας

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η: Τι λέγεται σύνολο (κατά τον Cantor);

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η: Τι λέγονται στοιχεία ή μέλη ενός συνόλου;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η: Πως διαβάζονται τα σύνολα \in , \notin και τι δηλώνουν οι σχέσεις $x \in A$, $x \notin A$;

ΕΡΩΤΗΣΗ 6^η: Τι λέγονται ίσα σύνολα; Πως συμβολίζονται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 8^η: Ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού του υποσυνόλου;

ΕΡΩΤΗΣΗ 9^η: Τι λέγεται κενό σύνολο; Πως συμβολίζεται;

ΕΡΩΤΗΣΗ 10^η: Τι λέγεται βασικό σύνολο , με ποιο γράμμα συμβολίζεται και πως παριστάνεται στο επίπεδο;

ΕΡΩΤΗΣΗ 11^η: Πως παριστάνονται στο επίπεδο τα σύνολα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 12^η: Τι λέγεται διάγραμμα του Venn;

β) Ερωτήσεις θεωρίας για τα κριτήρια αξιολόγησης

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η: Τι λέγεται παράσταση ενός συνόλου A με αναγραφή των στοιχείων του;

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η: Τι λέγεται παράσταση ενός συνόλου A με περιγραφή των στοιχείων του;

ΕΡΩΤΗΣΗ 13^η: α) Τι λέγεται ένωση των συνόλων A και B και πως συμβολίζεται;

β) Πως παριστάνεται με διάγραμμα του Venn;

ΕΡΩΤΗΣΗ 14^η: α) Τι λέγεται τομή των συνόλων Α και Β και πως συμβολίζεται;

β) Πως παριστάνεται με διάγραμμα του Venn;

ΕΡΩΤΗΣΗ 15^η: α) Τι λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου Α και πως συμβολίζεται;

β) Πως παριστάνεται με διάγραμμα του Venn;

ΕΡΩΤΗΣΗ 18^η: Τι λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου;

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

M_1 : Για να δείξουμε ότι δύο σύνολα A , B είναι ίσα αρκεί να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία του ενός είναι ίσα με όλα τα στοιχεία του άλλου.

Παράδειγμα

Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε ίσα σύνολα;

i) $\Gamma = \{2, 4, 6, 8\}$

ii) $E = \{-3, -2, -1, 0\}$

$\Delta = \{4, 6, 8\}$

$H = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 1\}$

Επίλυση

Εφαρμογή 1η από τον μαθητή

Να εξεταστεί αν τα σύνολα A και B είναι ίσα μεταξύ τους.

$A = \{3, 4\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} / (x-3)(x-4) = 0\}$

M_2 : Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

Παράδειγμα

Αν $A = \{0, 3, 5\}$, $B = \{0\}$, $\Gamma = \{3, 5\}$ και $\Delta = \{5, 3\}$, να εξετάσετε ποιοι από τους ισχυρισμούς είναι σωστοί:

i) $A \subseteq B$

ii) $B \subseteq \Gamma$

iii) $\Gamma \subseteq \Delta$

iv) $\Delta \subseteq A$

Επίλυση

Εφαρμογή 2η από τον μαθητή

Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathcal{Q} / 1 < x < 2\}$. Να βρεθούν τρία υποσύνολα του A που να περιέχουν τουλάχιστον από τρία στοιχεία.

M_3 : Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο A είναι το κενό αρκεί να δείξουμε ότι δεν περιέχει στοιχεία.

Παράδειγμα

Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι το κενό;

i) $A = \{x \in \mathcal{R} / x^2 = 9 \text{ και } 2x = 4\}$ ii) $B = \{x \in \mathcal{R} / x + 8 = 8\}$

Επίλυση**Εφαρμογή 3η από τον μαθητή**

Να εξεταστεί ποιο από τα επόμενα σύνολα είναι το κενό.

α) $A = \{x \in \mathcal{R} / x^2 + 1 = 0\}$

β) $B = \{x \in \mathcal{R} / 2x = 8 \text{ και } x^2 = 36\}$

γ) $\Gamma = \{0\}$

M_4 : Για να βρούμε την ένωση δυο συνόλων A, B αρκεί να πάρουμε όλα τα στοιχεία του A και του B από μία φορά.

Παράδειγμα

Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-5, 7, 8, 10\}$, και $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$. Να βρείτε τα σύνολα.

$A \cup B$, $B \cup \Delta$, $(A \cup B) \cup \Gamma$

Επίλυση

Εφαρμογή 4η από τον μαθητή

M_5 : Για να βρούμε την τομή δυο συνόλων A, B αρκεί να πάρουμε τα κοινά (ίδια) στοιχεία τους.

Παράδειγμα

Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-5, 7, 8, 10\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$ και $\Delta = \emptyset$. Να βρείτε τα σύνολα. $A \cap \Gamma$, $A \cap \Delta$, $(A \cap B) \cap \Delta$

Επίλυση**Εφαρμογή 5η από τον μαθητή**

Αν $A = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \varepsilon\}$, να υπολογίσετε τα σύνολα:

i) $A \cap B$, ii) $B \cap \Gamma$, iii) $A \cap \Gamma$

M_6 : Για να βρούμε το συμπλήρωμα ενός συνόλου A γνωρίζοντας ότι το βασικό σύνολο είναι το Ω αρκεί να πάρουμε τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A .

Παράδειγμα

Αν $\Omega = \{-1, 0, 1, 11, 12, 13\}$, $A = \{1, 11, 13\}$ και $B = \{-1, 0, 11\}$, να βρείτε τα σύνολα:

A' , B' , $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, O' και Ω'

Επίλυση**Εφαρμογή 6η από τον μαθητή**

Αν $\Omega = \{-2, 0, 1, 3, 9, 14\}$, $A = \{1, 3, 14\}$ και $B = \{-2, 0, 3\}$, να βρείτε τα σύνολα:

A' , B' , $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, O' και Ω'

Γ. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ

α) Παραδείγματα και εφαρμογές του σχολικού βιβλίου

1 Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:

$$A = \{ \chi \in \mathbb{N} : \chi + 3 < 8 \}$$

$$B = \{ \chi \in \mathbb{Z} : |\chi + 2| = 5 \}$$

2 Να γραψετε με περιγραφή τα σύνολα

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$

3 Να παραστήσετε με ένα διάγραμμα του Venn όλα τα παρακάτω σύνολα

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$B = \{ 3, 4, 5 \}$$

$$\Gamma = \{ 5, 6 \}$$

4 Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 7 \}$$

$$B = \{ 3, 4, 5, 0 \}$$

$$\Gamma = \{ 5, 6 \}$$

Να βρείτε τα σύνολα: $A \cup B$, $A \cap B$, Γ' , $A \cup B \cup \Gamma$

5 Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε ίσα σύνολα:

$$\alpha) A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \} \quad B = \{ \beta, \alpha, \gamma, \delta \}$$

$$\beta) A = \{ -2, -1, 1, 0, 2 \} \quad B = \{ \chi \in \mathbb{Z} : |\chi| \leq 2 \}$$

$$\gamma) A = \{ -2, 3, 4, -1, 0 \} \quad B = \{ \chi \in \mathbb{N} : \chi < 5 \}$$

ΕΠΙΠΕΔΟ 2ο

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις κρίσεως και στα ερωτήματα σωστό ή λάθος, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1η

Στον ορισμό του συνόλου ,
τι σημαίνει η έκφραση «
προέρχονται από την
εμπειρία μας»;

ΕΡΩΤΗΣΗ 2η

Στον ορισμό του συνόλου ,
τι σημαίνει η έκφραση «
προέρχονται από την
διανόησή μας»;

ΕΡΩΤΗΣΗ 3η

Στον ορισμό του συνόλου ,
τι σημαίνει η έκφραση «
είναι καλά ορισμένα»;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4η

Δίνεται το σύνολο
 $A = \{ \alpha, \beta, 1, \emptyset, \{1,2\} \}$
Ποιοι συμβολισμοί είναι
σωστοί;
α) $\alpha \notin A$ β) $1 \in A$
γ) $\{\alpha, \beta\}$ δ) $\{1,2\} \notin A$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5η

Είναι σωστό ή λάθος ότι:
Τα σύνολα $A = \{-2, 2\}$ και
 $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = 4\}$ είναι
ίσα.

2.ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΟΥ - ΔΙΑΤΑΞΗ

Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β).

Συνδέστε με μία γραμμή τα στοιχεία των δύο στηλών.

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
Ενωση συνόλων	$\{ \chi \in \mathbb{N} : \chi < 4 \}$
Περιγραφή συνόλου	$A \cup B$
Τομή συνόλων	$\{ 0,1,2,3,4 \}$
Κενό σύνολο	$A \cap B \cap \Gamma$
Υποσύνολο συνόλου	\emptyset
Αναγραφή συνόλου	$A \subseteq B$

Συμπληρώστε τα κενά των προτάσεων που ακολουθούν.

- 1) Σύνολο λέγεται
- 2) Αν $A = \{ \dots, \dots \}$ και $B = \{ \chi \in \mathbb{Z} : \chi^2 = 4 \}$ τότε $A = B$
- 3) Αν $A = \{ 1,3,5,\dots \}$ και $B = \{ 2,4,6,\dots \}$ τότε $A \cup B = \dots$
και $A \cap B = \dots$

Συμπληρώστε τον πίνακα με την κατάλληλη μαθηματική έκφραση.

1. Ισα σύνολα: A B
2. Το A υποσύνολο του B A B
3. A ένωση B A B
4. A τομή B A B
5. το A είναι κενό A

3. ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1Η

Ποια είναι αληθής από τις παρακάτω προτάσεις;

(Α) $\frac{3}{5} \in \mathbb{N}$ (Β) $-2 \in \mathbb{N}$ (Γ) $-7 \notin \mathbb{Z}$ (Δ) $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$

A	B	Γ	Δ
---	---	---	---

ΕΡΩΤΗΣΗ 2Η

Η ένωση δύο συνόλων A και B ορίζεται ως

A $A \cup B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ και } \chi \in B \}$

B $A \cap B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ ή } \chi \in B \}$

Γ $A \cup B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ ή } \chi \in B \}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3Η

Η τομή δύο συνόλων A και B ορίζεται ως

A $A \cap B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ και } \chi \in B \}$

B $A \cup B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ και } \chi \notin B \}$

Γ $A \cap B = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \text{ ή } \chi \in B \}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4Η

Το συμπλήρωμα του συνόλου A είναι το

A $A' = \{ \chi \in A / \chi \notin A \}$

B $A' = \{ \chi \in \Omega / \chi \notin A \}$

Γ $A' = \{ \chi \in \Omega / \chi \in A \}$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5Η

Το κενό σύνολο συμβολίζεται με

A $\{ \emptyset \}$

B $\emptyset \text{ ή } \{ \}$

Γ $\{ \kappa, \epsilon, \nu, \acute{o} \}$

4.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΠΟΤΕ.....ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:ΟΤΑΝ..

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Πότε.....

με όταν...

Ερώτηση α)

..... ορίζεται ένα σύνολο
A;

Ερώτηση β)

..... ορίζουμε ένα
σύνολο δι' αναγραφής των
στοιχείων του;

Ερώτηση γ)

..... ορίζουμε ένα
σύνολο με περιγραφή των
στοιχείων του;

Ερώτηση δ)

..... δύο σύνολα είναι
ίσα;

Ερώτηση ε)

..... ένα σύνολο A είναι
υποσύνολο ενός συνόλου
B;

Ερώτηση στ)

..... ένα σύνολο είναι
κενό;

5.ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Διατυπώσεις των θεμάτων.

11. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα

α) $A = \{ \chi \in \mathbb{N} : \chi^2 - 4 = 0 \}$

β) Οι φυσικοί αριθμοί από το 5 μέχρι και το 9.

12. Να βρείτε το σύνολο λύσεων κάθε εξίσωσης

α) $\chi(\chi-1)(\chi+20) = 0$

β) $3\chi(\chi-7) = 0$

γ) $2\chi^2 - 4 = 0$

13. Αν $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2 \}$, $\Gamma = \{ -3, -5 \}$, $\Delta = \{ \chi \in \mathbb{Z} : \chi \text{ αρνητικός} \}$, να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι είναι λάθος.

Α) $A \subseteq B$ β) $B \subseteq \Gamma$ γ) $A = \Gamma$ δ) $\Gamma \subseteq \Delta$.

14. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι το κενό

$A = \{ \chi \in \mathbb{R} / \chi^2 = 4 \text{ και } 3\chi = 12 \}$

$B = \{ \chi \in \mathbb{N} / \chi - 3 = -3 \}$

15. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $A = \{ 5, \lambda^2 \}$ και $B = \{ \lambda, 5 \}$ είναι μεταξύ τους ίσα.

6.ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

16. Να γραφούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα

α) $A = \{ \chi \in \mathbb{N} : \chi^3 - 4\chi = 0 \}$

β) $B = \{ (\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Z}, \psi \in \mathbb{Z} \text{ και } \chi^2 + \psi^2 = 1 \}$

17. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσα τα σύνολα $A = \{ 1, \lambda^2 \}$ και $B = \{ 1, 2 \}$

18. Να βρείτε το σύνολο των λύσεων της κάθε εξίσωσης

α) $\chi(\chi-1)(\chi+1)(-\chi^2+4) = 0$

β) $\chi^2(\chi-2)(\chi-5)^3 = 0$

γ) $\chi(2\chi^2-1)(\chi^2+7) = 0$

19. Βρείτε δύο τριμελή και δύο τετραμελή υποσύνολα του συνόλου λύσεων της ανίσωσης

$$\sqrt[4]{\chi-1} > 2.$$

20. Έστω A το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\chi^3 - \chi = 0$ (1). Αν $\alpha < \beta < \gamma$ οι λύσεις της εξίσωσης (1), να βρεθεί η $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

7. ΕΠΠΛΕΟΝ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

21. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\sqrt{17} \quad 34 \quad -\frac{1}{3} \quad 0,884 \quad -1 \quad 0 \quad \sqrt{144} \quad \frac{32}{16} \quad -2,5656\dots \quad \pi \quad 6,1\overline{5}$$

Να μεταφέρετε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς στη σειρά, που αντιστοιχεί στο κατάλληλο αριθμητικό σύνολο.

$\in \mathbb{N}$	
$\in \mathbb{Z}$	
$\in ;$	
$\in \mathbb{R}$	

- 22. α.** Αν $\Omega = \mathbb{Z}$ τότε από ποιους αριθμούς αποτελείται το σύνολο \mathbb{N}' ;
- β.** Αν $\Omega = ;$ τότε από ποιους αριθμούς αποτελείται το σύνολο \mathbb{Z}' ;
- γ.** Αν $\Omega = \mathbb{R}$ τότε από ποιους αριθμούς αποτελείται το σύνολο $;'$;
- δ.** Αν $\Omega = \mathbb{R}$ τότε να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά:
 $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \dots \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \dots \quad \mathbb{Z} \cap ;' = \dots \quad \mathbb{R}' = \dots \quad \mathbb{N} \cap \mathbb{N}' = \dots$

23. Αν $\Omega = \{ x \in \mathbb{N} / x \leq 12 \}$, $A = \{ x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 2 \}$ και $B = \{ x \in \Omega / x \text{ διαιρέτης του } 18 \}$ τότε να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$A \cap B = \dots \quad A \cup B = \dots \quad (A \cup B)' = \dots \quad A' \cap B = \dots$$

24. Αν Ω είναι το σύνολο των συμφώνων του ελληνικού αλφαβήτου, τότε:

- α.** Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

$$A = \{ x \in \Omega / x \text{ άηχο σύμφωνο} \}$$

$$H = \{ x \in \Omega / x \text{ ηχηρό σύμφωνο} \}$$

$$\Sigma = \{ x \in \Omega / x \text{ στιγμιαίο σύμφωνο} \}$$

$$E = \{ x \in \Omega / x \text{ εξακολουθητικό σύμφωνο} \}$$

$$X = \{ x \in \Omega / x \text{ χειλικό σύμφωνο} \}$$

$$O = \{ x \in \Omega / x \text{ οδοντικό σύμφωνο} \}$$

$$\Delta = \{ x \in \Omega / x \text{ διπλοδοντικό σύμφωνο} \}$$

$$\Lambda = \{ x \in \Omega / x \text{ λαρυγγικό σύμφωνο} \}$$

$$Y = \{ x \in \Omega / x \text{ υγρό σύμφωνο} \}$$

$$P = \{ x \in \Omega / x \text{ ρινικό σύμφωνο} \}$$

- β.** Να σημειώσετε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα παρακάτω σύνολα:

$$A \cap \Sigma \quad H \cap \Sigma \quad A \cap E$$

$$A \cap H \quad \Sigma \cap E \quad X \cap O \quad Y \cap P$$

$$X \cup O \cup \Delta \quad \Lambda \cup Y \cup P \quad (X \cup O \cup \Delta)' \cap (\Lambda \cup Y \cup P)'$$

$$(A \cup H)' \quad (\Sigma \cup E)' \quad (X \cup O \cup \Delta \cup \Lambda \cup Y \cup P)'$$

$$[P \cup (A \cap X)] \quad (P \cup A) \cap (P \cup X)$$

- 25.** Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις.

- A.** Έστω δυο σύνολα A, B, Γ τέτοια, ώστε $A \subseteq B \subseteq \Gamma$. Τότε:

α. $(A \cap B) \subseteq A$

β. $(A \cup B) \subseteq A$

γ. $A \cap (B \cap \Gamma) \subseteq B$

δ. $A' \cap B' = \emptyset$

- B.** Έστω δυο σύνολα A, B τέτοια, ώστε $A \cap B = \emptyset$. Τότε:

α. $A \subseteq B$ **β.** $B \subseteq A$ **γ.** $A \subseteq B'$ **δ.** $A \cap B' \subseteq A$

ΤΕΛΟΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ