ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - συν^2 x = 0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ είναι $f(x)>2x^3-1$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=f(x)+\dfrac{ημ^2 x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την F^{-1}

ΛΥΣΗ

α) Για $x\neq 0$ είναι:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1-συν^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{ημ^2 x}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x^3 - \frac{ημ^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(2x^3) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)^2 = 0-1=-1$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-\dfrac{ημ^2 x}{x^2}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$$

β)
- Από υπόθεση η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[0,\pi]$
- $f(0)\cdot f(\pi) = (-1)\cdot(2\pi^3) = -2\pi^3 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,\pi]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$, δηλαδή μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x^3+1$, $x\in R^*$, τότε:

$$h(x)=2x^3-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}-2x^3+1=1-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$|\eta\mu x|\le|x|\Leftrightarrow \eta\mu^2 x\le x^2\Leftrightarrow 0\le x^2-\eta\mu^2 x$$

και η ισότητα ισχύει μόνον για $x=0$

Η συνάρτηση h όμως έχει πεδίο ορισμού το R^*, επομένως $x^2-\eta\mu^2 x>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$, δηλαδή $f(x)-2x^3+1>0\Leftrightarrow f(x)>2x^3-1$ για κάθε $x\in R^*$

δ) Η συνάρτηση f ορίζεται στο R και η συνάρτηση $\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ ορίζεται στο R^*, επομένως η συνάρτηση F ορίζεται στο R^*

Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$F(x)=f(x)+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=2x^3-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=2x^3$$

Έστω $x_1, x_2\in R^*$ με $F(x_1)=F(x_2)$, τότε έχουμε:

$$2x_1^3=2x_2^3\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η F είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της F^{-1} λύνουμε την $y=F(x)$ ως προς x στο R^*

Είναι:

$$\begin{cases} y=F(x)\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=2x^3\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^3=\frac{y}{2}\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{y}{2}}, & y>0\\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}}, & y<0\end{cases}\Leftrightarrow F^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{y}{2}}, & y>0\\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}}, & y<0\end{cases}$$

Άρα $F^{-1}:R^*\to R$ με $F^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{x}{2}}, & x>0\\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{2}}, & x<0\end{cases}$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=(x^2-\eta\mu^2 x)^3$ (1) για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0\le f(x)\le x^2-\eta\mu^2 x$ **για κάθε** $x\in R$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \le x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x \ge 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right) \ge 0$$

που σημαίνει ότι:

$$f(x) \ge 0 \qquad (2)$$

οπότε από (1) προκύπτει ότι:

$$f^3(x) \le f^3(x) + f(x) = \left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)^3 \Rightarrow$$

$$f^3(x) \le \left(x^2 - \eta\mu^2 x\right)^3$$

Άρα

$$f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$0 \le f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \qquad (4)$$

β) Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - \eta\mu^2 x\right) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \quad (6)$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0

γ) Από τη σχέση (4) για $x \in R^*$ έχουμε:

$$0 \le \frac{f(x)}{x^2} \le 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left[1 - \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 1 - 1^2 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=x+2$ (1) για κάθε $x\in[0,8]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) $f\left(\frac{23}{8}\right)=\frac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος:

Έστω $x_1,x_2\in[0,8]$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1-x_2<0$

Είναι:

$$f^3(x_1)+f(x_1)=x_1+2$$

$$f^3(x_2)+f(x_2)=x_2+2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$f^3(x_1)-f^3(x_2)+f(x_1)-f(x_2)=x_1+2-x_2-2\Rightarrow$$

$$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\cdot\left(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\right)+f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2\Rightarrow$$

$$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\cdot\left(\underbrace{f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1}_{>0}\right)=\underbrace{x_1-x_2}_{<0}\Rightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)<0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος:

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,8]$ με

$x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$, άρα και $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$, οπότε

$$f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}x_1+2\geq x_2+2\Rightarrow x_1\geq x_2,$$

που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=[0,8]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta)=[f(0),\ f(8)]$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(8)$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(0)+f(0)=2\Leftrightarrow f^3(0)+f(0)-2=0$ (2)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–2**	**1**
///	**1**	**1**	**2**	
1	**1**	**2**	**0**	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(0)-1\right)\underbrace{\left(f^2(0)+f(0)+2\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Για $x=8$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(8)+f(8)=10 \Leftrightarrow f^3(8)+f(8)-10=0$ (3)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–10**	**2**
///	**2**	**4**	**10**	
1	**2**	**5**	**0**	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(8)-2\right)\underbrace{\left(f^2(8)+2f(8)+5\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(8)=2$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta)=\left[1\,,\ 2\right]$$

β) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $\left[0\,,\ 8\right]$ και $1=f(0)\neq f(8)=2$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(8)=2$, δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,8)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=\frac{3}{2}$

Για $x=x_o$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(x_o)+f(x_o)=x_o+2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x_o+2 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{8}+\frac{3}{2}=x_o+2 \Rightarrow x_o=\frac{27}{8}+\frac{12}{8}-\frac{16}{8} \Rightarrow x_o=\frac{23}{8}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0\,,\ 8\right]$, άρα είναι και « 1 – 1 » στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, δηλαδή $A_{f^{-1}}=\left[1\,,\ 2\right]$

Επίσης για κάθε $x\in\left[0,\ 8\right]$ έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3+y=f^{-1}(y)+2 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+y-2\,,\quad y\in\left[1\,,\ 2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}:\left[1\,,\ 2\right]\to R \quad \text{με} \quad f^{-1}(x)=x^3+x-2$$

δ) Για να βρούμε το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma):\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=f^{-1}\left(f(x)\right) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3+y-2=x \\ x^3+x-2=y \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$y^3-x^3+y-x=x-y \Leftrightarrow y^3-x^3+2(y-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)+2(y-x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)(\underbrace{y^2+xy+x^2+2}_{>0})=0 \Leftrightarrow$$

$$y-x=0 \Leftrightarrow y=x$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma):\begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right)$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-e-1)$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί $z=f(x)+\sqrt{2}f(x)i$ και $w=f(x)+2f^2(x)i$ με $|z|=\sqrt{3}\,(1+e^x)$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(1+e^x)$

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,-1)$

γ) Να βρείτε το είδος της γραμμής που διαγράφουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$|z|=\sqrt{f^2(x)+2f^2(x)}=\sqrt{3f^2(x)}=\sqrt{3}\,|f(x)|$$

και λόγω της (1) έχουμε ότι $|f(x)|=1+e^x>0$, που σημαίνει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο R, οπότε ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Είναι $f(1)=-1-e<0$ άρα $f(x)<0$, για κάθε $x\in R$. Επομένως $f(x)=-1-e^x$, $x\in R$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=-e^x<0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}(-1-e^x)=-1-\lim_{x\to-\infty}e^x=-1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(-1-e^x)=-\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,-1)$

γ) Αν $z=\kappa+\lambda i$, με $\kappa,\lambda\in R$ θα είναι : $\begin{cases} \kappa=f(x) \\ \lambda=\sqrt{2}\,f(x) \end{cases}$, οπότε $\lambda=\sqrt{2}\cdot\kappa$, με $\kappa,\lambda\in R$

Όμως από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x)<-1 \Leftrightarrow \kappa<-1$, που σημαίνει ότι η εικόνα του z ανήκει στην ημιευθεία $y=\sqrt{2}\cdot x$ με $x<-1$, (εξαιρείται η αρχή της)

δ) Έχουμε:

$$z \cdot \overline{w} = \left(f(x) + \sqrt{2}f(x) \cdot i\right) \cdot \left(f(x) - 2f^2(x) \cdot i\right) =$$
$$= f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x) + \left(\sqrt{2}f^2(x) - 2f^3(x)\right) \cdot i$$

Είναι:

$$\mathrm{Re}\left(z \cdot \overline{w}\right) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x), \text{ οπότε } g(x) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x), \ x \in R$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)\left(1 + 3\sqrt{2}f(x)\right) = 2(-1-e^x)(-e^x)\left[1 + 3\sqrt{2}(-1-e^x)\right] =$$
$$= 2e^x(1+e^x)\left(1 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}e^x\right) < 0 \ , \ x \in R$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

ΘΕΜΑ 20ο :

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1} \frac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = 5$ και ii) $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 3} \frac{x+2-f(x)}{ημ(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7συνx$, $x \in R$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : R \to R$, για την οποία ισχύει $g'(x) \le f'(3)$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x \neq 1$, θέτουμε $w(x) = \frac{f(x+2)-5}{x-1}$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} w(x) = 6 \quad \text{και} \quad f(x+2) = (x-1)w(x) + 5$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)w(x)+5\right] = 5$$

Η συνάρτηση $f(x+2)$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2) = f(1+2) = f(3)$$

οπότε:

$$f(3) = 5$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για x κοντά στο $x_o = 3$ είναι $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 6$

Αν θέσουμε $x = u + 2$ τότε όταν $x \to 3$ το $u \to 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{u\to 1} \frac{f(u+2)-f(3)}{u-1} = \lim_{u\to 1} \frac{f(u+2)-5}{u-1} = 6$$

Επομένως:

$$f'(3) = 6$$

β) Για x κοντά στο $x_o = 3$ είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x+2-f(x)}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x+2-f(x)-5+5}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x-3-\left(f(x)-5\right)}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x-3-\left(f(x)-f(3)\right)}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \frac{1-f'(3)}{1} = 1-6 = -5 \text{ , γιατί}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3} \overset{x-3=u}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$$

Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L' Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, 3)\cup(3, \beta)$

γ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0, 3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύουν:

- $h(0) = -7 < 0$ και
- $h(3) = 3f(3) - 9 - 7\sigma\upsilon\nu 3 = 15 - 9 - 7\sigma\upsilon\nu 3 = 6 - 7\sigma\upsilon\nu 3 > 0$,

  αφού $\dfrac{\pi}{2} < 3 < \pi$ και στο 2^o τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως $h(0)\cdot h(3) < 0$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 3]$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 3)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις x_1 και x_2 με $1 < x_1 < x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - x^6$, $x \in [x_1, x_2]$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $\varphi'(x) = g'(x) - 6x^5$ και ισχύει $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$

Άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi) = 0$

Είναι:

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - 6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 6\xi^5$$

Όμως:

$$g'(\xi) \le f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \le 6$$

Άρα:

$$6\xi^5 \le 6 \Leftrightarrow \xi^5 \le 1 \Leftrightarrow \xi \le 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } 1 < x_1 < \xi < x_2$$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g : R \to R$ με $g(x) = \ln f(x)$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

I) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Υπάρχει $\xi \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = \left(f'(\xi)\right)^2$$

ΛΥΣΗ

I) Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ονομάσουμε ω τη διαφορά της προόδου, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \alpha = \omega \quad (1) \quad \text{με } \omega > 0$$

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ονομάσουμε λ το λόγο της προόδου, τότε έχουμε:

$$f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma) \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \lambda \quad (2) \quad \text{με } \lambda > 0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln\frac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (3)

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε υπάρχουν:

- $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1) = \dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega} \cdot \ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ (4)
- $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2) = \dfrac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega} \cdot \ln\dfrac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (5)

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

ΙΙ) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ με :

$$g''(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)\cdot f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} \quad (6)$$

και $g'(x_1)=g'(x_2)$, επομένως η συνάρτηση g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0$

Οπότε από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\frac{f''(\xi)\cdot f(\xi)-\left(f'(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)\right)^2}=0\Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi)-\left(f'(\xi)\right)^2=0\Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi)=\left(f'(\xi)\right)^2$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: R\to R$ με $g(0)=2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=2e^x+e^y+3 \text{ για κάθε } x, y\in R \quad (1)}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{f(x)=2e^x-e^{1-x}+1 \quad \text{και} \quad g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2}$$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f, g και $f-g$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3}}$$

ΛΥΣΗ

α) Για $y=x$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x)+f(1-x)=3e^x+3 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε:

$$2f(1-x)+f(x)=3e^{1-x}+3 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3)

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=3e^x+3 \\ f(x)+2f(1-x)=3e^{1-x}+3 \end{cases} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4f(x)-2f(1-x)=-6e^x-6 \\ f(x)+2f(1-x)=3e^{1-x}+3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$-3f(x)=-6e^x+3e^{1-x}-3\Rightarrow f(x)=2e^x-e^{1-x}+1 \quad (4)$$

Για $y=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=2e^x+4 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$4e^x-2e^{1-x}+2+f(1)+g(x)-g(0)=2e^x+4$$

Είναι:

$$f(1)=2e=g(0)$$

οπότε έχουμε:

$$g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2$$

β) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

- $f'(x)=2e^x-e^{1-x}(1-x)'=2e^x+e^{1-x}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
- $g'(x)=-2e^x+2e^{1-x}(1-x)'=-2e^x-2e^{1-x}<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Επίσης για κάθε $x\in R$ είναι:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\left(2e^x-e^{1-x}+1\right)-\left(-2e^x+2e^{1-x}+2\right)=4e^x-3e^{1-x}-1 \text{ και}$$

$$(f-g)'(x)=4e^x-3e^{1-x}(1-x)'=4e^x+3e^{1-x}>0, \text{ οπότε η } f-g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } R$$

Επομένως οι συναρτήσεις f, g και $f-g$ δεν παρουσιάζουν ακρότατα.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 4e^x-3e^{1-x}-1=0$$

έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-g(x)=4e^x-3e^{1-x}-1,\ x\in R$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,1]$,
- $h(0)\cdot h(1)=(3-3e)(4e-4)=-12(e-1)^2<0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$, οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα $x_o\in(0,1)\subseteq R$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $h=f-g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Είναι:

$$4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3}\Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x}-3e^{-x^2+2x+1}<4e^{x-2}-3e^{-x+3}\Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x}-3e^{-x^2+2x+1}-1<4e^{x-2}-3e^{-x+3}-1\Leftrightarrow$$

$$h(x^2-2x)<h(x-2)\Leftrightarrow x^2-2x<x-2\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$$

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = (\alpha+1)^x - \alpha^x$, $\alpha > 1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f, για τις διάφορες τιμές του $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+1 > \alpha > 1$$

Οπότε:

- Για $x > 0$ είναι $(\alpha+1)^x > \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

  Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- Για $x < 0$ είναι $(\alpha+1)^x < \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

  Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = (\alpha+1)^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0$

  Άρα $f(x) = 0$ για $x = 0$

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha$$

και

$$f''(x) = (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2\alpha$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^x > \alpha^x \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι:

$$\ln(\alpha+1) > \ln\alpha > 0 \quad (2)$$

και

$$\ln^2(\alpha+1) > \ln^2\alpha > 0 \quad (3)$$

οπότε:

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) > \alpha^x \ln\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (3) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) > \alpha^x \ln^2\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2\alpha > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Δεδομένου ότι συνάρτηση f είναι και συνεχής στο $x_o = 0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0, +\infty)$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(\alpha+1)^x - \alpha^x\right] = 0 - 0 = 0$$

οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x - \alpha^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x - 1\right]\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1) - \ln\alpha\right]\right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1)\right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(\ln\alpha) = \ln\alpha$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ) 1ος τρόπος:

Αν ένας τουλάχιστον από τους x, y είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός $3^x - 2^y$ δεν είναι ακέραιος.
Επομένως, αναζητούμε μη αρνητικές λύσεις του συστήματος.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^x - 2^x$, που προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση για $\alpha = 2$
Είναι:

$$x > y \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ 2^x > 2^y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ -2^y > -2^x \end{Bmatrix} \Rightarrow 3^x - 2^y > 3^y - 2^x$$

Ομοίως

$$x < y \Rightarrow 3^x - 2^y < 3^y - 2^x$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύσεις (x, y) με $x \neq y$

Για $x = y$ είναι:

$$3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y) = (3, 3)$

2ος τρόπος:

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x \Leftrightarrow 3^x + 2^x = 3^y + 2^y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \quad (4)$$

όπου $g(x) = 3^x + 2^x$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και $1-1$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε $x=y$

Για $x=y$ το σύστημα γίνεται $3^x-2^x=19 \Leftrightarrow f(x)=f(3)$ (5), όπου $f(x)=3^x-2^x$

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ όμως η συνάρτηση είναι αρνητική, οπότε δεν έχουμε αρνητική ρίζα.

Επίσης είναι $f(0)=0\neq 19$, οπότε ούτε το 0 είναι ρίζα.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$, με βάση το ερώτημα (β) για $\alpha=2$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σχέση (5) δίνει τη μοναδική λύση $x=3$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(3,3)$

ΘΕΜΑ 24ο :

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(1)=0$ και**
- **$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $x\in(0,1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot f^{-1}(x)\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_o, f(x_o))$ με $x_o\in(0,1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και για κάθε $x\in(0,1)$, έχουμε:

$$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\frac{2\sqrt{1-x}}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)'$$

Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}+c$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

Επειδή $f(1)=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln x-\sqrt{1-x}+c\right)=0 \Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases}\ln x-\sqrt{1-x} &, \ 0<x<1\\ 0 &, \ x=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x} \ , \ x\in(0\,,\,1]$$

β) Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- είναι συνεχής στο διάστημα $(0\,,1]$ και
- $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$, για κάθε $x\in(0\,,1)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,,1]$, οπότε είναι και «1−1». Άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι $A_{f^{-1}}=f\left((0\,,1]\right)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0\,,1]$ θα είναι:

$f\left((0\,,1]\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\,,\,f(1)\right]=(-\infty\,,\,0]$, γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{1-x}\right)=-1$
- $f(1)=0$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι: $A_{f^{-1}}=(-\infty,0]$

ii) Είναι:

$$A_{f^{-1}}=(-\infty,0] \ \text{ και } \ f^{-1}\left((-\infty,0]\right)=A_f=(0\,,\,1]$$

Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει:

$$0<f^{-1}(x)\le 1 \Leftrightarrow 0<x^2f^{-1}(x)\le x^2$$

και

$$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}x^2=0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2f^{-1}(x)\right]=0$

γ) Για κάθε $x\in(0\,,\,1)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{και}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{3}{8(1-x)^2\sqrt{1-x}}>0$$

Άρα η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και επειδή είναι και συνεχής στο (0, 1), το σύνολο τιμών της συνάρτησης f'' είναι:

$$f''\big((0,1)\big)=\left(\lim_{x\to 0^+} f''(x)\,,\ \lim_{x\to 1^-} f''(x)\right)=\left(-\infty\,,+\infty\right)\ ,\ \text{γιατί:}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f''(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=-\infty$, αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=\frac{1}{4}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f''(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$, αφού $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-1$$

Η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως είναι και «$1-1$» και επειδή το $0\in f''\big((0\,,\,1)\big)$ θα υπάρχει ένα ακριβώς $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_o)=0$

Επειδή η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ θα ισχύει:

- για $0<x<x_o \Rightarrow f''(x)<f''(x_o)\Rightarrow f''(x)<0$ και
- για $x_o<x<1\Rightarrow f''(x_o)<f''(x)\Rightarrow f''(x)>0$

Άρα το σημείο $M(x_o\,,f(x_o))$ με $x_o\in(0,1)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

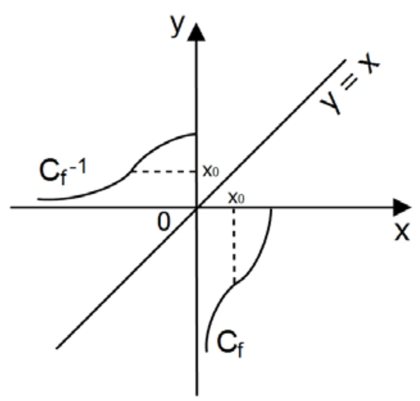
δ) Έχουμε:

$$A_f=(0\,,1] \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και σχεδιάζουμε την C_f

x		0	x_0	1	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Σ.Κ.	$\nearrow$	



ΘΕΜΑ 25ο :

Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to R$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, οπότε είναι παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ και $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}$ (1)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)}{x-2}$$

Είναι:

$$2<\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2}<f'(x)\overset{x>2}{\Rightarrow}f'(x)(x-2)-f(x)>0\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(2x-9)f(x+6)-(7x-32)f(x),\ x\in[4,5]$$

Η h συνεχής στο $[4,5]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $h(4)=-f(10)+4f(4)=-8g(10)+8g(4)=8\big(g(4)-g(10)\big)$

Για $4<10\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(4)<g(10)\Rightarrow g(4)-g(10)<0$, άρα $h(4)<0$

- $h(5)=f(11)-3f(5)=9g(11)-g(5)=9\big(g(11)-g(5)\big)$

Για $5<11\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(5)<g(11)\Rightarrow g(11)-g(5)>0$, άρα $h(5)>0$

Συνεπώς $h(4)\cdot h(5)<0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση:

$$h(x)=0 \Leftrightarrow (2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}\text{ , για } x \text{ κοντά στο } x_o=3$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\varphi(x)=\frac{1}{6}$$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$f(x)=\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}\right)=\frac{1}{6}\cdot 0-\sqrt{9}=-3$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=-3$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3, οπότε $f(3)=-3$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\varphi(x)-\sqrt{x+6}+3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$$

Άρα $f'(3)=0$

ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,+\infty)$, οπότε έχουμε:

- Για $2<x<3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(3)\Rightarrow f'(x)<0$
- Για $x>3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)\Rightarrow f'(x)>0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$
	τοπ. μεγ.		ελάχ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[2\,,3\right]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(2\,,3)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[2\,,3\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[3,+\infty\right)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(3\,,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[3,+\infty\right)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=3$ με ελάχιστη τιμή $f(3)=-3$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$ με τιμή $f(2)=0$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(4\,,f(4)\right)$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow y=f'(4)(x-4)+f(4)$$

Η f κυρτή στο $\left[2,+\infty\right)$ άρα

$$f(x)\geq y\Leftrightarrow f(x)\geq f'(4)(x-4)+f(4)$$

Έχουμε $f'(4)>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(4)(x-4)+f(4)\right)=+\infty$

οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left[2,3\right]$, οπότε $f\left(\Delta_1\right)=\left[-3\,,0\right]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[3,+\infty\right)$, οπότε $f\left(\Delta_2\right)=\left[-3,+\infty\right]$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left(\Delta\right)=f\left(\Delta_1\right)\cup f\left(\Delta_2\right)=\left[-3\,,+\infty\right)$$

> Αν $f(x)\geq g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, τότε θα είναι $f(x)\geq g(x)>0$, οπότε $0<\dfrac{1}{f(x)}\leq\dfrac{1}{g(x)}$
>
> Είναι:
>
> - $\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$
> - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$
>
> Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και επειδή $\dfrac{1}{f(x)}>0$ συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ΘΕΜΑ 26ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0$, **για κάθε** $x\neq 0$
- $f(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **και** $f'(1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(3x)=f(2x)+f(5x)$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ **ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι**

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)\quad \text{για } 1<\alpha<\beta$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$,άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0\Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)-f'(x)+xf''(x)=0\Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)=f'(x)-xf''(x)\Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x)=\frac{f'(x)-xf''(x)}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(f^3(x)\right)'=\left(-\frac{f'(x)}{x}\right)'$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_1\Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_1x$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_2\Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_2x$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-xf^3(x)+c_1x\right)=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-xf^3(x)+c_2x\right)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$ ισχύει $f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)=0$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}-xf^3(x)+c_1x & , \quad x<0\\ 0 & , \quad x=0\\ -xf^3(x)+c_2x & , \quad x>0\end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και ισχύει:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \qquad (1)$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xf^3(x)+c_1x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-f^3(x)+c_1\right)=-f^3(0)+c_1$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-xf^3(x)+c_2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-f^3(x)+c_2\right)=-f^3(0)+c_2$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$-f^3(0)+c_1=-f^3(0)+c_2\Leftrightarrow c_1=c_2$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f'(1)=-f^3(1)+c_2\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+c_2\Rightarrow c_2=0,\ \text{οπότε και}\ c_1=0$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}-xf^3(x) & , \quad x<0\\ 0 & , \quad x=0\\ -xf^3(x) & , \quad x>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=-xf^3(x),\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow$$

$$f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x)=2x\Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-2}(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=x^2+c$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{1}{f^2(1)}=1+c\Rightarrow 2=1+c\Rightarrow c=1$$

Άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{x^2+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in R$$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)$$

Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, 0\right]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, 0\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0, +\infty\right)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, +\infty\right)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f''(x) = -f^3(x) - x \cdot 3f^2(x)f'(x) = -f^2(x)\left(f(x) + 3xf'(x)\right) =$$

$$= -f^2(x)\left(f(x) + 3x\left(-xf^3(x)\right)\right) = -f^3(x)\left(1 - 3x^2 f^2(x)\right) =$$

$$= -f^3(x)\left(1 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\right) = -f^3(x)\left(\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot f^3(x)$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cap$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Προφανής λύση η $x = 0$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x > 2x \\ 3x > 5x \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x < 2x \\ 3x < 5x \end{cases} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x f^3(x)}{f(x)} = -x f^2(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

Οπότε:

$$h'(x) = -\frac{(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot f^2(x) \ , \quad x \in R$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \;$ ή $\; x > 1$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	
$h(x)$		↗		↘		↗	

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1\,,1]$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1\,,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1\,,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1\,,+\infty)$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1\,,+\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\ell nf(x)$, $x>1$,

Για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$ είναι:

$$K'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=h(x)$$

Η συνάρτηση K είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha\,,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\beta\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\alpha\,,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\beta\right)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦ $\xi_1\in\left(\alpha\,,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_1)=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$
- ♦ $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_2)=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Είναι:

$$1<\xi_1<\xi_2\overset{K'\uparrow}{\Rightarrow}K'(\xi_1)<K'(\xi_2)\Rightarrow\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)<K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<K(\alpha)+K(\beta)\Rightarrow$$

$$2\ell nf\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell nf(\alpha)+\ell nf(\beta)\Rightarrow\ell nf^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell n\big(f(\alpha)f(\beta)\big)\Rightarrow$$

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1)=1-\alpha$, $\alpha>0$ **και**
- $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)+\alpha x-\alpha y-\dfrac{\alpha x}{y}$ **για κάθε** $x, y>0$ **(1)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell nx-\alpha x$, $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x)\le 1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

δ) Αν $g(x)=-\dfrac{1}{\alpha}f(e^{\alpha x})$, $x\in R$, $\alpha>0$, να βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

ΛΥΣΗ

α) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)'=\left(f(x)-f(y)+\alpha x-\alpha y-\frac{\alpha x}{y}\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=0-f'(y)+0-\alpha+\frac{\alpha x}{y^2},\ y>0$$

Για $y=1$ έχουμε:

$$f'(x)(-x)=-f'(1)-\alpha+\alpha x\Leftrightarrow$$

$$-xf'(x)=-(1-\alpha)-\alpha+\alpha x\Leftrightarrow$$

$$xf'(x)=1-\alpha x\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=(\ell nx-\alpha x)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ell nx-\alpha x+c,\ x>0\quad (2)$$

Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1)=f(1)-f(1)+\alpha-\alpha-\alpha\Leftrightarrow$$

$$f(1)=-\alpha\quad (3)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1)=\ell n1-\alpha+c\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha=-\alpha+c\Leftrightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x)=\ell nx-\alpha x,\ x>0$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\ell nx - \alpha x\right)' = \frac{1}{x} - \alpha$$

Οπότε:

$$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(e, f(e)\right)$ είναι:

$$y - f(e) = f'(e)\left(x - e\right) \Leftrightarrow$$
$$y - \left(1 - \alpha e\right) = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)\left(x - e\right) \Leftrightarrow$$
$$y = \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αφού επαληθεύεται για $x = 0$ και $y = 0$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1 - \alpha x}{x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\alpha}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x > 0 \Leftrightarrow \alpha x < 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x < \dfrac{1}{\alpha}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\ell n\alpha - 1$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = \dfrac{1}{\alpha}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \ell n\dfrac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = -\ell n\alpha - 1$,

επομένως έχουμε:

$$f(x) \le -\ell n\alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για να ισχύει $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ πρέπει και αρκεί

$$-\ell n\alpha - 1 \le 1 \Leftrightarrow \ell n\alpha \ge -2 \Leftrightarrow \ell n\alpha \ge \ell ne^{-2} \Leftrightarrow \alpha \ge \frac{1}{e^2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε να ισχύει $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $\alpha = \dfrac{1}{e^2}$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} \cdot (\ell n e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x - \alpha e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} - x$$

$$g'(x) = (e^{\alpha x} - x)' = \alpha e^{\alpha x} - 1$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha x} = \dfrac{1}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \ell n e^{\alpha x} = \ell n \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x = -\ell n\alpha \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} > 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha x} > \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ell n e^{\alpha x} > \ell n \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x > -\ell n\alpha \Leftrightarrow x > -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\dfrac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$ με ελάχιστη τιμή

$$g\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{\alpha\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right)} - \left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{-\ell n\alpha} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1}{e^{\ell n\alpha}} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(\alpha) = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}, \ \alpha > 0$$

Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h'(\alpha) = \frac{(1+\ell n\alpha)' \cdot \alpha - 1 \cdot (1+\ell n\alpha)}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{1 - 1 - \ell n\alpha}{\alpha^2} = -\frac{\ell n\alpha}{\alpha^2}$$

Είναι:

- $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

- $h'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha < 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$

Το πρόσημο της $h'(\alpha)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		1		$+\infty$
$h'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$h(\alpha)$		↗		↘	
			μέγιστο		

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση h παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\alpha = 1$, οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 1$

ΘΕΜΑ 28^{o} :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\big(xf(x)\big)' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1 \ , & x < 0 \\ e^x + c_2 \ , & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $x_o = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \big(xf(x)\big) = \lim\limits_{x \to 0^-} \big(e^x + c_1\big) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \big(xf(x)\big) = \lim\limits_{x \to 0^+} \big(e^x + c_2\big) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ έχουμε:

$$xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, άρα:

$$f(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = 1 \qquad (1)$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε x κοντά στο $x_o = 0$ είναι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x - 1}{x}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A\left(0, f(0)\right)$, δηλαδή σημείο $A\left(0, 1\right)$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

γ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = \left(xe^x - e^x + 1\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = 0\cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$

Έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- Για $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Οπότε είναι:

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Επειδή $f'(0) = \frac{1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right)' = \frac{(xe^x - e^x + 1)'\cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot(x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{(e^x + xe^x - e^x)\cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^3e^x - 2x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3},$$

όπου $h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h'(x) = \left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2\right)' =$$
$$= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2e^x$$

Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Όμως $h(0) = 0\cdot e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0 + 2e^0 - 2 = 0$ και η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x > 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Επομένως

- Αν $x<0$ τότε $f''(x)>0$, αφού $h(x)<0$ και $x^3<0$
- Αν $x>0$ τότε $f''(x)>0$, αφού $h(x)>0$ και $x^3>0$

Άρα

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in R^*$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}=f'(0)$$

Οπότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$

Αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΘΕΜΑ 29ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha\ell nx+x+\alpha$ και $g(x)=\dfrac{x\ell nx}{x+\alpha}$, όπου $\alpha>0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)\ge -\dfrac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x>0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha\left(x\ell nx-\lambda\right)=\lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\alpha}{x}+1>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)\ ,\ \lim_{x\to +\infty}f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\alpha\right)=\alpha$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\alpha)=+\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A)=(-\infty,+\infty)=R$

Το $0\in f(A)=R$ επομένως θα υπάρχει $\rho\in A=(0,+\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$

β) Είναι:

$$A_g = (0\,,+\infty)\text{, αφού } x+\alpha>0 \text{ για κάθε } x>0$$

Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{x\ell nx}{x+\alpha}\right)' = \frac{(\ell nx+1)(x+\alpha)-x\ell nx}{(x+\alpha)^2} = \frac{\alpha\ell nx+x+\alpha}{(x+\alpha)^2} = \frac{f(x)}{(x+\alpha)^2} \qquad (1)$$

Από το (α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0\,,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$, οπότε:

- Για $0<x<\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(\rho) \Rightarrow f(x)<0$
- Για $x>\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(\rho) \Rightarrow f(x)>0$

Από τη σχέση (1) και επειδή $(x+\alpha)^2>0$ για κάθε $x \in A_g$, έχουμε:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=\rho$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\rho$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x>\rho$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\dfrac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$	$\nearrow$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=\rho$ με ελάχιστη τιμή $g(\rho)=\dfrac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$

Άρα για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x) \ge g(\rho) \Rightarrow g(x) \ge \frac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha} \qquad (2)$$

Όμως ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, οπότε ισχύει $\alpha\ell n\rho+\rho+\alpha=0 \Leftrightarrow \ell n\rho=-\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}$ (3)

Η σχέση (2) με βάση τη σχέση (3) γράφεται:

$$g(x) \ge \frac{\rho\cdot\left(-\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}\right)}{\rho+\alpha} \Rightarrow g(x) \ge -\frac{\rho}{\alpha}\;,\; x\in(0\,,+\infty)$$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g''(x)=\left(\frac{\alpha\ell nx+x+\alpha}{(x+\alpha)^2}\right)'=\frac{\left(\frac{\alpha}{x}+1\right)(x+\alpha)^2-2(x+\alpha)(\alpha\ell nx+x+\alpha)}{(x+\alpha)^4}=$$

$$=\frac{(x+\alpha)^2-2x(\alpha\ell nx+x+\alpha)}{x(x+\alpha)^3}=\frac{\alpha^2-x^2-2x\alpha\ell nx}{x(x+\alpha)^3}=\frac{h(x)}{x(x+\alpha)^3}\qquad(4)$$

όπου $h(x)=\alpha^2-x^2-2x\alpha\ell nx\,,\ x>0$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$h'(x)=-2x-2\alpha\ell nx-2\alpha=-2(\alpha\ell nx+x+\alpha)=-2f(x)$$

Είναι:

- $h'(x)=0\Leftrightarrow -2f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=\rho$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow -2f(x)>0\Leftrightarrow f(x)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x<\rho$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\alpha^2\nearrow$	$h(\rho)$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\alpha^2-x^2-2\alpha x\ell nx\right)=\alpha^2$$

Αφού

$$\lim_{x\to0^+}(x\ell nx)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0\qquad(5)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0\,,\rho]$, επομένως:

$$h(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^+}h(x)\,,h(\rho)\right]=\left(\alpha^2\,,h(\rho)\right]$$

Άρα για κάθε $x\in\Delta_1=(0\,,\rho]$ είναι:

$$h(\rho)\ge h(x)>\alpha^2>0\qquad(6)$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^2-x^2-2\alpha x\ell nx\right)=-\infty$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[\rho\,,+\infty)$, επομένως:

$$h(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}h(x)\,,h(\rho)\right]=\left(-\infty\,,h(\rho)\right]$$

Το $0 \in h(\Delta_2)$ επομένως θα υπάρχει $x_o \in \Delta_2 = [\rho, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) = 0$

Έχουμε:

- Για $\rho < x < x_o \overset{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_o) \Rightarrow h(x) > 0 \qquad (7)$
- Για $x > x_o \overset{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_o) \Rightarrow h(x) < 0 \qquad (8)$

Από τις σχέσεις (6) και (7) για κάθε $x \in (0, x_o)$ έχουμε:

$$h(x) > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) > 0 , \quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Από τη σχέση (8) για κάθε $x \in (x_o, +\infty)$ έχουμε:

$$h(x) < 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) < 0 , \quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Αφού $x(x+\alpha)^3 > 0$ για κάθε $x \in A_g = (0, +\infty)$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		x_o		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\cup$	$g(x_o)$	$\cap$	
			Σ.Κ.		

Επομένως η συνάρτηση g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M(x_o, g(x_o))$

δ) Έχουμε:

$$\alpha(x\ell nx - \lambda) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha x \ell nx = \lambda(\alpha + x) \Leftrightarrow \frac{x\ell nx}{\alpha + x} = \frac{\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow g(x) = \frac{\lambda}{\alpha} \qquad (9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (9) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και της ευθείας $y = \frac{\lambda}{\alpha}$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Από (β) ερώτημα έχουμε:

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\rho}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
			ελάχιστο		

Είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\ell nx}{x+\alpha} \overset{(5)}{=} \frac{0}{0+\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\ell nx}{x+\alpha} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\ell nx}{x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell nx}{1+\frac{\alpha}{x}} = +\infty$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x\ell nx = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\frac{\lambda}{\alpha} < -\frac{\rho}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda < -\rho$, τότε η εξίσωση (9) είναι αδύνατη.
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha} = -\frac{\rho}{\alpha} \Leftrightarrow \lambda = -\rho$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 = \rho$
- Αν $-\frac{\rho}{\alpha} < \frac{\lambda}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow -\rho < \lambda < 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει δύο ρίζες $\rho_1 \in (0, \rho)$ και $\rho_2 \in (\rho, 1)$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 = 1$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha} > 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda > 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 > 1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ **για κάθε** $x \in R$
- $f'(x) = \dfrac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}$ **για κάθε** $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in R^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\dfrac{e^{\alpha}+2e^{\beta}}{3}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την παραβολή $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^x\right)\cdot f(x)}{1+f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\left(1+f(x)\right) = \left(1+e^x\right)f(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow \left(\ln f(x) + f(x)\right)' = \left(x + e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x + c, \quad c \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε :

$$\ln f(0) + f(0) = 0 + e^0 + c \Leftrightarrow \ln 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \cdot 1 + e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x\ln e + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x\,,\ x \in R \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(t) = t + \ln t$, $t > 0$, που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι και «$1-1$»

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h\big(f(x)\big) = h(e^x) \overset{h:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x,\ x \in R$$

β) Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = xe^{\frac{1}{x}},\ x \in R^*$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

Επίσης $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1 = \lambda$$ και

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[g(x) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0}\frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u - e^0}{u - 0} = \left.\frac{de^u}{du}\right|_{u=0} = e^0 = 1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$

γ) Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x) = e^x$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_1\right) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha} = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$

- $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi_2\right) = \dfrac{f\left(\beta\right)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{\alpha+2\beta}{3}} = \dfrac{f\left(\beta\right)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f''(x)=e^x>0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f\left(\beta\right)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)-f(\alpha) < 2\left[f\left(\beta\right)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)\right] \Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha)+2f(\beta) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^\alpha+2e^\beta}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha+2e^\beta}{3}\right)$$

δ) Σχηματίζουμε τη διαφορά $\Delta(x)=e^x-x^2-1,\ x \in R$

Η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\Delta'(x)=e^x-2x,\ x \in R$

Επίσης $\Delta''(x)=e^x-2,\ x \in R$

Παρατηρούμε ότι $\Delta''(x)=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\Delta''(x)$	$-$	0	$+$
$\Delta'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ελάχιστο

$$\Delta'\left(\ln 2\right)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2\left(1-\ln 2\right)>0 \ \text{(εφόσον } e>2 \overset{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln e>\ln 2 \Rightarrow 1>\ln 2\text{)}$$

Άρα $\Delta'(x) \geq \Delta'\left(\ln 2\right)>0 \Rightarrow \Delta'(x)>0,\ x \in R$, οπότε η συνάρτηση Δ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Είναι $\Delta(0)=e^0-0^2-1=0$. Άρα η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Delta(x)=0$ και ισχύει:

$$\Delta\left(\left[0,1\right]\right)=\left[\Delta(0),\Delta(1)\right]=\left[0,e-2\right],\ \text{άρα } \Delta(x)\geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0,1\right]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E=\int_0^1 \left|\Delta(x)\right|dx \overset{\Delta(x)\geq 0}{=} \int_0^1 \left(e^x - x^2 - 1\right)dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 =$$

$$= e - \frac{1}{3} - 1 - \left(e^0 - 0\right) = e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \quad \text{τ.μ.}$$